УДК 517. 9

Н. А. Али, С. В. Янчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

We study rotary motions for an autonomous second-order differential equation with impulse influence and periodic right-hand side and indicate some important properties of these motions. By using the numerical-analytic method, we establish sufficient conditions for the existence of rotary motions.

Досліджуються обертальні рухи для автономного диференціального рівняння другого порядку з імпульсною дією та періодичною правою частиною. Вказані деякі важливі властивості таких рухів, за допомогою чисельно-аналітичного методу визначені достатні умови існування обертальних рухів.

Рассматривается система, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка с импульсным воздействием

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad x \in R, \tag{1}$$

$$\Delta\frac{dx}{dt}\bigg|_{x = x_0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)} = I\left(\frac{dx}{dt}\right) \tag{2}$$

с функцией $f(x, y)$, периодической по x с периодом 2π.

Будем исследовать вращательные движения системы, т. е. те, для которых выполняется условие периодичности второго рода

$$x(t+T) = \nu T + x(t) \tag{3}$$

с некоторыми положительными постоянными ν и T. Подобная задача без импульсного воздействия была рассмотрена в [1]. В настоящей работе аналогичные результаты получены для периодических автономных систем с импульсным воздействием вида (1). А именно, исследованы некоторые свойства вращательных движений таких систем, даны достаточные условия существования вращательных движений на основании численно-аналитического метода Самойленко для импульсных систем [2]. Рассмотрен пример маятника с линейным трением, постоянным вращающим моментом и импульсным воздействием.

Обозначив $y(t) = x'(t)$, запишем задачу (1), (2) в каноническом виде

$$\begin{aligned} dy/dt &= f(x, y), \\ dx/dt &= y, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\Delta y|_{x = x_0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)} = I(y). \tag{5}$$

Отметим некоторые общие свойства вращательного движения, указанные в [1]. Прежде всего, из равенства (3) следует представление

$$x(t) = \nu t + \Phi(\nu t), \tag{6}$$

где $\Phi(\phi)$ — периодическая по ϕ с периодом νT функция.

Если $\Phi(\nu t)$ непрерывна при $t \in R$ и является непрерывно дифференцируемой за исключением, быть может, счетного числа точек, то тогда во всех остальных точках справедливо представление

$$y(t) = \frac{dx}{dt} = \nu + \frac{d\Phi(\nu t)}{dt}$$

и, очевидно, $y(t+T) = y(t)$ почти всюду.

Рассмотрим теперь фазовую траекторию системы (4), (5). Имеем почти всюду

$$y(x(t), x_0) = y(t) = y(t+T) = y(x(t+T), x_0) =$$
$$= y(\nu t + x(t), x_0).$$

Отсюда следует, что почти всюду

$$y(x, x_0) = y(x + \nu t, x_0), \tag{7}$$

т. е. периодична с периодом νT.

С учетом вида системы (4), (5) очевидно, что равенство (7) справедливо при условии $x \neq x_0 (\operatorname{mod} 2\pi)$. Этим точкам будут соответствовать моменты времени $\{\tau_n\}$, определяемые равенством

$$x = \nu\tau_n + \Phi(\nu\tau_n) = x_0 (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Теперь предположим, что функция $f(x, y)$ непрерывна по y и удовлетворяет условию Липшица в области

$$x \in R, \qquad a \leq y \leq b, \tag{8}$$

так что найдутся постоянные M, K, K_1 такие, что для всех x, x', x'', y, y', y'' из области (8)

$$|f(x, y)| \leq M,$$
$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \leq K_1 |x' - x''| + K_2 |y' - y''|.$$

Пусть импульсное воздействие удовлетворяет следующим условиям:

1) $I(0) = 0$;

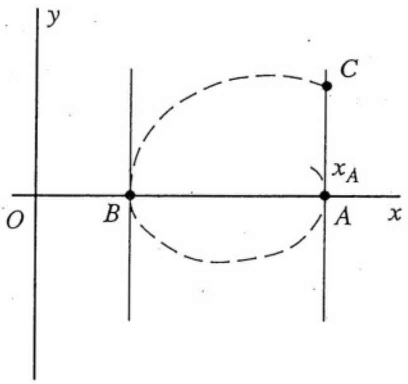
2) функция $I(y)$ не может убывать быстрее, чем функция $-y$, *t.e.* $\forall\, x > y: x - y > -(I(x) - I(y))$.

При сделанных предположениях относительно правых частей системы (4), (5) справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Фазовая траектория* $y = y(x)$ *вращательного движения* $x = x(t)$ *системы* (4), (5) *не пересекает ось* Ox.

Для доказательства покажем сначала, что фазовые траектории системы (4), (5) не пересекаются между собой. Для этого, очевидно, достаточно показать, что они не пересекаются в точках $x = x_0 (\operatorname{mod} 2\pi)$.

Рассмотрим две произвольные траектории. Пусть одна из них проходит через точку (x_1, y'), а другая — через (x_1, y''). Для определенности возьмем $y' < y''$. После импульсного воздействия траектории перейдут в точки с ординатами соответственно $y_1' = y' + I(y')$ и $y_1'' = y'' + I(y'')$. Их разность $y_1'' - y_1'' = y'' - y' + I(y'') - I(y')$ положительна согласно условию 2. Это и показывает, что эти траектории не пересекаются.



Теперь предположим, что траектория вращательного движения $y(x)$ пересекла ось Ox в некоторой точке A (см. рисунок) с координатой x_A. Поскольку для всех положительных y: $y + I(y) > 0$, а для всех отрицательных $y + I(y) < 0$ и $I(0) = 0$, то $x_A \neq x_0 \pmod{2\pi}$.

Далее, согласно (7) имеем

$$y(x_A, x_0) = y(x_A + n\nu T, x_0) = 0 \qquad \forall\, n \in Z.$$

Это указывает на то, что траектория должна пересечь ось Ox еще, как минимум, счетное число раз. Таким образом, существует точка B очередного пересечения траектории, которая будет лежать левее точки A, поскольку траектория до этого момента не может перейти на другую сторону прямой $x = x_A$ (более детально см. рассуждения в [1]). Из определения вращательного движения следует, что при $t \to +\infty$ $x(t) \to +\infty$, поэтому должна существовать некоторая точка C, в которой траектория пересекает ось $x = x_A$. Поскольку траектория не может пересекаться и не может иметь вертикальных касательных при $y \neq 0$, то очевидно, что траектория при $t \to -\infty$ не может выйти из области ABC. Это противоречит стремлению x к $-\infty$ при $t \to -\infty$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Прежде чем перейти к доказательству следующей теоремы, которая характеризует свойства вращательного движения нашей системы, сформулируем два вспомогательных результата, обобщающих теоремы Массера [3] на случай уравнения с импульсным воздействием. Для этого рассмотрим уравнение первого порядка с импульсным воздействием

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$
$$\Delta y\big|_{x = x_0 \pmod{2\pi}} = I(y) \tag{9}$$

с 2π-периодичной правой частью по x. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть правая часть дифференциального уравнения из* (9) *такая, что для него выполнены условия теоремы существования и единственности, а импульсное воздействие удовлетворяет условиям* 1 *и* 2. *Тогда если задача* (9) *имеет ограниченное решение при* $t > 0$, *то она имеет периодическое решение с периодом* $2\pi/k$, *где* k — *некоторое натуральное число.*

Доказательство леммы полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы в [3]. Достаточно лишь отметить, что при выполнении условий леммы имеем единственность решения, а также справедливость следующего утверждения: из того, что для двух решений $y_1(x), y_2(x)$: $y_1(0) < y_2(0)$ следует $y_1(x) < y_2(x)$ при всех $x > 0$.

С учетом изложенного выше доказательство следующей леммы также переносится на импульсный случай.

Лемма 2. *При выполненных условиях леммы* 1 *для задачи* (9) *любое почти периодическое решение является периодическим с периодом* $2\pi/k$, *где* k — *некоторое натуральное число.*

Теперь несложно доказать такую теорему.

Теорема 2. *Движение* $x = x(t)$ *системы* (4), (5) *является вращательным тогда и только тогда, когда его фазовая траектория периодична с периодом* $2\pi/k$, *где* k — *некоторое натуральное число.*

Доказательство достаточности полностью повторяет рассуждения, приведенные в [1]. Остановимся лишь на доказательстве необходимости. Предположим, что наша система имеет вращательное движение с некоторым периодом T. Как показано выше (формула (7)), функция $y(x, x_0)$ периодична с периодом νT. Поскольку $y(x, x_0) \neq 0$, то фазовая траектория движения совпадает с интегральной кривой уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}, \qquad x \neq x_0 (\operatorname{mod} 2\pi),$$

$$\Delta y\big|_{x=x_0 (\operatorname{mod} 2\pi)} = I(y). \tag{10}$$

Согласно лемме 2 периодическое решение $y = y(x)$ системы (10) должно иметь период $T_1 = \nu T = 2\pi/k$.

Далее будем исходить из уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} - g\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

$$\Delta\frac{dx}{dt}\bigg|_{x = x_0 (\operatorname{mod} 2\pi)} = I\left(\frac{dx}{dt}\right), \tag{11}$$

где функция $g(x, y)$ удовлетворяет тем же условиям, что и функция $f(x, y)$, а функция $I(y)$ — условиям 1 и 2. Согласно теоремам 1 и 2 вращательные движения системы (11) однозначно определяются периодическими периода $2\pi/k$ решениями уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda + \frac{g(x, y)}{y}, \qquad a \leq y \leq b, \quad a > 0,$$

$$\Delta y\big|_{x=x_0 (\operatorname{mod} 2\pi)} = I(y). \tag{12}$$

Используя этот факт, исследуем вопрос существования и вычисления вращательных решений (11). Для этого используем численно-аналитический метод [3]. Обозначим $f_1(x, y) = g(x, y)/y$. Будем предполагать, что I — непрерывная функция, а также в области (8) выполняются неравенства

$$|f_1(x, y)| \leq M_1, \qquad |f_1(x, y') - f_1(x, y'')| \leq K_f|y' - y''|,$$

$$|I(y)| \leq M_1, \qquad |I(y') - I(y'')| \leq K_I|y' - y''|,. \tag{13}$$

И, кроме того, пусть

$$M_1 \leq \frac{b-a}{2\pi + 4}, \qquad K_f\frac{2\pi}{3} + K_I\left(2 + \frac{K_f 2\pi}{3}\right) < 1. \tag{14}$$

При этих предположениях последовательность периодических функций

$$y_{m+1}(x, x_H, y_H) =$$

$$= y_H + \int_{x_H}^{x} \left[f_1(s, y_m(s, x_H, y_H)) - \overline{f_1(s, y_m(s, x_H, y_H))} \right] ds +$$

$$+ \sum_{\substack{x_l = x_0 \,(\mathrm{mod}\, 2\pi) \\ x_0 \le x_l \le x}} I(y_m(x_l, x_H, y_H)) - \overline{xI(y_m(x_l, x_H, y_H))}$$

равномерно сходится к периодической функции $y(x)$, а последовательность

$$\Delta_m(x_H, y_H) = \overline{f_1(s, y_m(x, x_H, y_H))} + \overline{I(y_m(x, x_H, y_H))}$$

сходится к Δ-постоянной для точки (x_H, y_H) если только $(x_H, y_H) \in R^1 \times D_{f_1}$, где

$$D_{f_1} = \left[a + M_1 \pi \left(1 + \frac{2}{\pi} \right),\ b - M_1 \pi \left(1 + \frac{2}{\pi} \right) \right].$$

Здесь

$$\overline{f_1(x, y(x))} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s, y(s))\, ds,$$

$$\overline{I(y(x))} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{p} I(y(x_i)),$$

x_i — моменты импульсного воздействия.

Обозначим

$$r = \left(K_I + \frac{\pi}{3} K_f \right) + \sqrt{\left(K_I + \frac{\pi}{3} K_f \right)^2 + \frac{2\pi}{3} K_I K_f}, \qquad q = K_f + \frac{K_I}{2\pi},$$

$$\varepsilon_m = \frac{r^m}{1 - r} M_1 \pi \left(1 + \frac{2}{\pi} \right),$$

$$\lambda'_m = \min_{(x_H, y_H) \in R^1 \times D_{f_1}} \Delta_m(x_H, y_H), \qquad \lambda''_m = \max_{(x_H, y_H) \in R^1 \times D_{f_1}} \Delta_m(x_H, y_H).$$

Справедлива следующая теорема

Теорема 3. *Пусть система*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{y},$$
$$\Delta y|_{x = 2\pi n,\, n \in Z} = I(y) \tag{15}$$

удовлетворяет условиям (13), (14). *Тогда:*

1) *найдутся такие постоянные* λ' *и* λ'', *что для всех* λ *из отрезка* $\lambda' \le \lambda \le \lambda''$ *система* (11) *имеет вращательные движения;*

2) *выполняются неравенства*

$$\lambda' \le \lambda'_m + \varepsilon_m q \le \lambda''_m - \varepsilon_m q \le \lambda''_m \tag{16}$$

при условии $\lambda''_m - \lambda'_m \ge 2\varepsilon_m q$;

3) *движение системы* (11), *проходящее через точку* $(x_H, y_H) \in R^1 \times D_{f_1}$, *является вращательным тогда и только тогда, когда*

$$\lambda = \Delta(x_H, y_H), \qquad \Delta(x_H, y_H) = \lim_{m \to \infty} \Delta_m(x_H, y_H); \tag{17}$$

4) *число вращения* $2\pi\nu$ *вращательного движения системы* (11), *проходящее при* $t = 0$ *через точку* $(x_H, y_H) \in R^1 \times D_{f_1}$, *удовлетворяет неравенству*

$$|\nu - \nu_m| \le \varepsilon_m \left(1 + \frac{M_1 \pi \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)}{a} \right)^2, \tag{18}$$

где

$$\nu_m = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{y_m(x, x_H, y_H)} \right)^{-1}. \tag{19}$$

Идея доказательства такая же, как и в соответствующей теореме из [1].

В качестве примера рассмотрим маятник с линейным трением и постоянным вращающим моментом, который подвержен импульсному воздействию:

$$\begin{gathered} \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + \sin x = \mu, \\ \Delta \frac{dx}{dt}\bigg|_{x = x_0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)} = I\left(\frac{dx}{dt}\right), \end{gathered} \tag{20}$$

где λ, μ — положительные постоянные. Аналогичный пример, но без импульсного воздействия, был рассмотрен в [1].

Соответствующее уравнение фазовых траекторий имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{dy}{dx} = -\lambda + \frac{\mu - \sin x}{y}, \\ \Delta y|_{x = x_0 (\mathrm{mod}\, 2\pi)} = I(y). \end{gathered} \tag{21}$$

Мы не будем конкретизировать здесь вид импульсного воздействия. Пусть I непрерывна, удовлетворяет условию Липшица с константой K, а также $|I(y)| \le M_1$. Обозначим $M = \max\{M_1, (\mu+1)/a\}$.

Система (21) будет являться T-системой, если будут выполняться следующие условия:

$$a^2 > \frac{2\pi(\mu+1)(1+K)}{3(1-2K)}, \quad b \ge a + (2\pi + 4)M. \tag{22}$$

Если предположить, что $I(y)$ не возрастает, то из теоремы 3 можно указать те λ, при которых у системы (20) существует вращательное движение. Исходя из нулевого приближения, эти значения λ определяются из неравенств

$$\begin{gathered} \frac{\mu - 1}{b - M(\pi+2)} + \frac{I(a + M(\pi+2))}{2\pi} + \frac{q}{1-r} M\pi\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \le \lambda \le \\ \le \frac{\mu+1}{a + M(\pi+2)} + \frac{I(b - M(\pi+2))}{2\pi} - \frac{q}{1-r} M\pi\left(1 + \frac{2}{\pi}\right). \end{gathered} \tag{23}$$

где r — положительное собственное число матрицы

$$\begin{pmatrix} (\mu+1)2\pi/3a^2 & (\mu+1)/a^2 \\ 2\pi K & 2K \end{pmatrix}, \quad q = \frac{\mu+1}{a^2} + \frac{K}{2\pi}.$$

При этом решения лежат в области $a \le y \le b$.

1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
3. *Massera J. L.* The existence of periodic solutions of systems of differential equations // Duke Math. J. – 1950. – **17**, №4. – P. 457–477.

Получено 14.05.96