УДК 519.21

Б. В. Бондарев, М. Е. Королев (Донец. ун-т)

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ НОРМИРОВАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ПРОЦЕССОВ СО СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ

For normalized integrals of processes with weak dependence, we prove the law of iterated logarithm in the Schtraßen form. The results obtained are used for the construction of a curvilinear confidence region, in which a solution of the equation with small parameter is sought.

Для нормованих интегралів від процесів із слабкою залежністю доведено закон повторного логарифму у формі Штрассена.

Одержані результати застосовано при побудові криволінійної довірчої області, в якій буде знаходитись розв'язок рівняння з малим параметром.

Пусть $x(t)$, $t \geq 0$, — стационарный в узком смысле случайный процесс с нулевым средним такой, что с вероятностью 1 $|x(t)| \leq c < +\infty$. Будем предполагать, что $x(t)$ удовлетворяет условию абсолютной регулярности [1] с коэффициентом регулярности

$$\beta(\tau) \xrightarrow[\tau \to +\infty]{} 0$$

таким, что

$$\int_0^{+\infty} \beta^{1/5}(\tau)\, d\tau < +\infty. \tag{1}$$

Пусть

$$W_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{2n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}},$$

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}} \int_0^{nt} x(s)\, ds.$$

Здесь $W(t)$ — стандартный винеровский процесс

$$0 < \sigma^2 = 2 \int_0^{+\infty} M\, x(0)\, x(s)\, ds < +\infty. \tag{2}$$

Хорошо известен следующий результат, доказанный В. Штрассеном [2] (см. также [3]), получивший в дальнейшем название функционального закона повторного логарифма. Суть его состоит в том, что множеством предельных точек последовательности $W_n(t)$, $t \in [0, 1]$, в смысле метрики пространства $C_{[0,1]}$ является множество K абсолютно непрерывных функций $x(t)$, $t \in$ $\in [0, 1]$, таких, что

$$x(0) = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \leq 1. \tag{3}$$

В данной работе теорема В. Штрассена установлена для последовательностей $\zeta_n(t)$, $t \in [0, 1]$, а именно, доказан следующий результат.

Теорема. *Пусть* $M\, x(t) = 0$, $|x(t)| \leq c < +\infty$ *и выполнено условие* (1). *Тогда множеством предельных точек последовательности* $\{\zeta_n(t),\ t \in [0, 1]\}$ *является* K.

Доказательство. Пусть F_0^t — минимальная σ-алгебра, порожденная процессом $x(s)=0,\ 0\le s<t$;

$F_{t+\tau}^{+\infty}$ — минимальная σ-алгебра, порождённая процессом $x(s)$ при $t+\tau\le \le s<+\infty$.

В силу того, что выполнено условие абсолютной регулярности [3], имеем

$$M\sup_{A\in F_{t+\tau}^{+\infty}}\left|P(A/F_0^t)-P(A)\right| = \beta(\tau)\xrightarrow[\tau\to+\infty]{} 0.$$

Покажем, что

$$M\left|M\{x(s)/F_0^t\}\right|^p \le 2^p c^p\beta(s-t). \tag{4}$$

Пусть сначала процесс

$$x(s) = \sum_i \lambda_i\chi(A_i),$$

т. е. представим в виде конечной суммы. Здесь $\chi(A_i)$ — индикатор множества $A_i\in F_{t+\tau}^{+\infty}$. Пусть $B_i\in F_0^t$, тогда

$$\left|M\{x(s)/F_0^t\}\right| \le \sum_i |\lambda_i|\left|P(A_i/B_j)-P(A_i)\right|^{1/q}\left|P(A_i/B_j)-P(A_i)\right|^{1/p} \le$$

$$\le\left(\sum_i|\lambda_i|^q\left[P(A_i/B_j)+P(A_i)\right]\right)^{1/q}\left(\sum_i\left|P(A_i/B_j)-P(A_i)\right|\right)^{1/p}.$$

Далее,

$$M\left|M\{x(s)/F_0^t\}\right|^p \le$$

$$\le c^p\sum_j\left(\sum_i\left|P(A_i/B_j)+P(A_i)\right|\right)^{p/q}\sum_i\left|P(A_i/B_j)-P(A_i)\right|P(B_j)\le$$

$$\le c^p2^{p/q}\left(\sum_j\left|P(\cup^+A_i/B_j)-P(\cup^+A_i)\right|P(B_j)+\right.$$

$$\left.+\sum_j\left|P(\cup^-A_i/B_j)-P(\cup^-A_i)\right|P(B_j)\right)\le$$

$$\le 2^{p-1}c^p2\beta(\tau) = 2^pc^p\beta(\tau),$$

где $\cup^+A_i$ — сумма множеств A_i, для которых [4]

$$P(A_i/B_j)-P(A_i)\ge 0;$$

$\cup^-A_i$ — сумма множеств A_i, для которых

$$P(A_i/B_j)-P(A_i)<0.$$

Введем в рассмотрение следующие процессы:

$$\mu_t = \int_0^{+\infty}M\{x(s)/F_0^t\}\,ds-\eta_0,\qquad \eta_t=\int_t^{+\infty}M\{x(s)/F_0^t\}\,ds,\qquad t\ge0.$$

Случайный процесс η_t, $t \geq 0$, определен, так как

$$M|\eta_t|^m \leq \left(\int_t^{+\infty} \left(M \left| M\{x(s)/F_0^t\} \right|^m \right)^{1/m} ds \right)^m \leq$$

$$\leq c^m 2^m \left(\int_0^{+\infty} \beta^{1/m}(\tau)\, d\tau \right)^m, \quad m \geq 1. \tag{5}$$

Действительно, поскольку

$$M|\xi_1 \ldots \xi_m| \leq (M|\xi_1|^m)^{1/m} \ldots (M|\xi_m|^m)^{1/m}$$

(в справедливости последнего убеждаемся по индукции), имеем

$$M|\eta_t|^m = \int_t^{+\infty} \ldots \int_t^{+\infty} M \left| M\{x(s_1)/F_0^t\} \right| \ldots \left| M\{x(s_m)/F_0^t\} \right| ds_1 \ldots ds_m \leq$$

$$\leq \left(\int_t^{+\infty} \left(M \left| M\{x(s)/F_0^t\} \right|^m \right)^{1/m} ds \right)^m \leq \left(\int_t^{+\infty} (2^m c^m \beta(s-t))^{1/m} ds \right)^m \leq$$

$$\leq 2^m c^m \left(\int_0^{+\infty} \beta^{1/m}(\tau)\, d\tau \right)^m.$$

В силу того, что

$$\int_0^{+\infty} M \left| M\{x(s)/F_0^t\} \right| ds \leq$$

$$\leq \int_0^t M \left| M\{x(s)/F_0^t\} \right| ds + \int_t^{+\infty} M \left| M\{x(s)/F_0^t\} \right| ds < +\infty,$$

мартингал μ_t также определен.

Пусть $\mu_t = \int_0^{+\infty} M\{x(s)/F_0^t\}\, ds - \eta_0$. Этот процесс [5, 6] является спиралью; у него существует модификация, являющаяся мартингалом и спиралью; он является квадратично интегрируемым мартингалом, а поскольку μ_t — спираль, его квадратическая характеристика $\langle \mu, \mu \rangle_t$ также является спиралью [7].

Воспользовавшись леммой 2 и леммой 3 из [5], получаем

$$M\mu_t^2 = tM\mu_1^2 = t\sigma^2, \tag{6}$$

где $0 < \sigma^2 = 2 \int_0^{+\infty} Mx(0)\,x(s)\, ds < +\infty$.

Отметим, в частности, что [4]

$$0 < \sigma^2 < 2 \int_0^{+\infty} |Mx(0)\,x(s)|\, ds < c^2 \int_0^{+\infty} \beta(\tau)\, d\tau,$$

$$\frac{1}{2} M\langle \mu, \mu \rangle_{nt} = 2t \int_0^{+\infty} Mx(0)\,x(s)\, ds. \tag{7}$$

Таким образом, случайный процесс

$$\frac{\mu_{nt}}{\sqrt{n}} = \sigma \frac{W(nt)}{\sqrt{n}}, \tag{8}$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. Представление (8) следует из того, что выполняется (6), где μ_t — мартингал с непрерывными траекториями.

Из работы [5] следует, что справедливо представление

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{nt} x(s)\, ds = \frac{\sigma W(nt)}{\sqrt{n}} + \frac{\eta_{nt}}{\sqrt{n}}. \tag{9}$$

Как отмечалось в [5],

$$\eta_t = \int_t^{+\infty} M\{x(s)/F_0^t\}\, ds \le M\left\{\left[\eta_1 + \int_t^1 x(s)\, ds\right] / F_0^t\right\}, \quad 0 \le t \le 1,$$

а следовательно,

$$\eta_t \le M\left\{\left[|\eta_1| + \int_0^1 |x(s)|\, ds\right] / F_0^t\right\} = \xi_t.$$

Очевидно, что ξ_t — мартингал относительно потока F_0^t, $t \ge 0$.

Воспользовавшись неравенством Дуба для мартингалов [8], имеем

$$M \sup_{0 \le t \le 1} |\xi_t|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M|\xi_t|^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p M\left(|\eta_1| + \int_0^1 |x(s)|\, ds\right)^p \le$$

$$\le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p 2^{p-1}\left(M|\eta_1|^p + \int_0^1 M|x(s)|^p\, ds\right). \tag{10}$$

Таким образом, из (10) с учетом

$$M|\eta_1|^m \le 2^m c^m \left(\int_0^{+\infty} \beta^{1/m}(\tau)\, d\tau\right)^m$$

имеем

$$M \sup_{0 \le t \le 1} |\eta_t|^m \le \left(\frac{m}{m-1}\right)^m 2^{m-1} c^m \left[1 + 2^m \left(\int_0^{+\infty} \beta^{1/m}(\tau)\, d\tau\right)^m\right]. \tag{11}$$

Далее, в силу того, что

$$P\left\{\sup_{0 \le t \le 1} |\eta_{nt}| > \delta\sqrt{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}\right\} \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n-1} P\left\{\sup_{k \le t \le k+1} |\eta_t| > \delta\sqrt{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}\right\} \le$$

$$\le n P\left\{\sup_{0 \le t \le 1} |\eta_t| > \delta\sqrt{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}\right\} \le$$

$$\leq n\left(\frac{m}{m-1}\right)^m 2^{m-1} c^m \left[1 + 2^m \left(\int\limits_0^{+\infty} \beta^{1/m}(\tau)\, d\tau\right)^m\right] \frac{1}{\delta^m (2\sigma^2 n \operatorname{Ln} \operatorname{Ln} n)^{m/2}}. \quad (12)$$

Из (12) следует

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\eta_{nt}| > \delta \sqrt{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}\right\} \leq$$

$$\leq \frac{5^5}{4^3} c^5 \left[1 + 32\left(\int\limits_0^{+\infty} \beta^{1/5}(\tau)\, d\tau\right)^5\right] \frac{1}{(2\sigma^2)^{5/2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^{5/2} (\operatorname{Ln} \operatorname{Ln} n)^{5/2}}\right) <$$

$$< +\infty. \quad (13)$$

Отсюда в силу теоремы Бореля – Кантелли [8] с вероятностью 1 произойдет лишь конечное число событий

$$A_n = \left\{\sup_{0 \leq t \leq 1} |\eta_{nt}| > \delta \sqrt{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}\right\}.$$

Из представления (9), в частности, вытекает представление

$$\zeta_n(t) = W_n(t) + \rho_n(t), \quad (14)$$

где

$$\rho_n(t) = \frac{\eta_{nt}}{\sqrt{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}}.$$

Пусть

$$A = \{\zeta_n \in K^{\varepsilon+\delta}\}, \qquad \overline{B} = \{\|\rho_n\| > \delta\}, \qquad C = \{W_n \in K^{\varepsilon}\}.$$

Здесь K^{ν} означает ν-окрестность множества K. Далее, поскольку $B \cap C \subset A$, то

$$P\{\zeta_n \notin K^{\varepsilon+\delta}\} \leq P\{\zeta_n \notin K^{\varepsilon}\} + P\{\|\rho_n\| > \delta\}. \quad (15)$$

В работе [3] показано, что $\sum_{n=1}^{+\infty} P\{\zeta_n \notin K^{\varepsilon}\} < +\infty$.

Таким образом, отсюда с учетом (13) следует

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P\{\zeta_n \notin K^{\varepsilon+\delta}\} < +\infty, \quad (16)$$

т. е. все бесконечные подпоследовательности, имеющие предел, имеют его во множестве $K^{\varepsilon+\delta}$, а в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, и в K.

Остается проверить, что для каждого $x(t) \in K$ такого, что $\int_0^1 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt = a^2 < 1$, справедливо соотношение $P\{\zeta_n \in (\{x\})^{\varepsilon}$ бесчисленное число раз$\} = 1$.

Так как

$$\{\zeta_n \in (\{x\})^{\varepsilon+\delta}\} = \{\|\zeta_n - x\| < \varepsilon + \delta\} > \{\|W_n - x\| + \|\rho_n\| < \varepsilon + \delta\} >$$
$$> \{\|W_n - x\| < \varepsilon\} \cap \{\|\rho_n\| \le \delta\}, \tag{17}$$

а для $A_n = \{\|\rho_n\| > \delta\}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(A) < +\infty,$$

то в силу леммы Бореля – Кантелли

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right\} = P\left\{\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right\} = 0,$$

т. е.

$$P\left\{\underline{\lim_{n\to+\infty}} \overline{A}_n\right\} = P\left\{\bigcup_{n=1}^{+\infty}\bigcap_{k=n}^{+\infty} \overline{A}_k\right\} = P\left\{\overline{\bigcap_{n=1}^{+\infty}\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k}\right\} =$$
$$= 1 - P\left\{\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n\right\} = 1.$$

Таким образом, за исключением конечного числа номеров для всех остальных события

$$\overline{A}_n = P\{\|\rho_n\| \le \delta\}$$

происходят с вероятностью 1.

В работе [3] также показано, что

$$P\left\{\overline{\lim_{n\to+\infty}} B_n\right\} = 1,$$

где $B_n = \{\|W_n - x\| < \varepsilon\}$.

Тогда из (17) следует

$$P\{\zeta_n \in (\{x\})^{\varepsilon+\delta}\} = 1.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим одно приложение полученных результатов.

Пусть на $[0, 1]$ задано уравнение

$$\frac{dz_n}{dt} = a(t, z_n(t)) + \sigma(t, z_n(t))\, X(nt),$$
$$z_n(0) > z_0, \tag{18}$$

Здесь $X(nt)$ — „быстрые" случайные осцилляции.

Наряду с (18) рассмотрим „укороченное" уравнение

$$\frac{dz_0}{dt} = a(t, z_0(t)),$$
$$z_0(0) = z_0, \tag{19}$$

полученное из (18) отбрасыванием случайного слагаемого.

Относительно $X(t)$ сохраним сделанные в теореме 1 предположения, относительно $a(t, z)$, $\sigma(t, z)$ будем предполагать следующее:

$$|a(t,z)| \le c(1+|z|), \quad |\sigma(t,z)| \le c(1+|z|),$$
$$|a'_z(t,z)| \le c_1 + \infty, \quad |\sigma'_z(t,z)| \le \sigma_1 < +\infty,$$
$$|a''_{zz}(t,z)| \le c_2 < +\infty, \quad |\sigma''_{zz}(t,z)| \le \sigma_2 < +\infty,$$
$$\sup_{0\le t\le 1} |\sigma(t, z_0(t))| + \int_0^1 \left|\frac{d\sigma(t, z_0(t))}{dt}\right| dt \le c < +\infty.$$

Тогда решение задачи (18) с вероятностью, близкой к 1 (при больших n), будет находиться в пределах

$$z_0(t) - \sqrt{\frac{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\,\bar z(t) \le z_n(t) \le z_0(t) + \sqrt{\frac{2\sigma^2 n \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\,\bar z(t),$$

где

$$\bar z(t) = \exp\left\{\int_0^t a'_z(t, z_0(s))\,ds\right\} \times$$
$$\times \left(\int_0^t \exp\left\{-2\int_0^\tau a'_z(s, z_0(s))\,ds\right\} \sigma^2(\tau, z_0(\tau))\,d\tau\right)^{1/2}. \tag{20}$$

Обозначим

$$\xi_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}}\,[z_n(t) - z_0(t)],$$
$$\eta_n(t) = \int_0^t a'_z(s, z_0(s))\,\eta_n(s)\,ds + \int_0^t \sigma(s, z_0(s))\,d\xi_n(s). \tag{21}$$

Из теоремы 1, в частности, следует, что начиная с некоторого номера справедливы оценки

$$|\zeta_n(t) - \zeta_n(s)| \le \sqrt{|t-s|} + 2\varepsilon, \qquad \sup_{0\le t\le 1} |\zeta_n(t))| \le 1 + \varepsilon. \tag{22}$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, из (21) и (22) имеем

$$\sup_{0\le t\le 1} |\eta_n(t))| \le (1+\varepsilon)\exp\{c_1\}\,c. \tag{23}$$

Воспользовавшись свойствами $a(t,z)$, $\sigma(t,z)$ и ограниченностью $X(t)$, имеем

$$\xi_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}} \times$$
$$\times \left\{\int_0^t \left[a(s, z_0(s)) + \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\,\xi_n(s) - a(s, z_0(s))\right] ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \left[\sigma(s, z_0(s)) + \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\,\xi_n(s) - \sigma(s, z_0(s))\right] X(ns)\,ds\right\} +$$
$$+ \int_0^t \sigma(s, z_0(s))\,d\zeta_n(s). \tag{24}$$

Отсюда

$$|\xi_n(t)| \le c_1 \int_0^t |\xi_n(s)|\, ds + \sigma_1 \int_0^t |\xi_n(s)|\, ds +$$

$$+ \sup_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t)| \left[|\sigma(t, z_0(t))| + \int_0^t |\sigma'_s(s, z_0(s))|\, ds \right]. \tag{25}$$

Из (25) имеем

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t)| \le (1+\varepsilon)(\exp\{c_1 + \sigma_1\})\, c$$

для достаточно больших номеров n.

Случайный процесс $\xi_n(t)$ можно также записать в виде

$$\xi_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}} \int_0^n \left[a\left(s, z_0(s) + \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\, \xi_n(s)\right) - \right.$$

$$\left. - a(s, z_0(s)) - a'_z(s, z_0(s)) \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\, \xi_n(s) \right] ds +$$

$$+ \int_0^t a'_z(s, z_0(s))\, \xi_n(s)\, ds +$$

$$+ \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}} \int_0^t \left[\sigma\left(s, z_0(s) + \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\, \xi_n(s)\right) - \right.$$

$$\left. - \sigma(s, z_0(s)) - \sigma'_z(s, z_0(s)) \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\, \xi_n(s) \right] X(ns)\, ds +$$

$$+ \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}} \int_0^t \sigma'_z(s, z_0(s))\, \xi_n(s)\, d\zeta_n(s) +$$

$$+ \int_0^t \sigma(s, z_0(s))\, d\zeta_n(s). \tag{26}$$

Пусть

$$\xi_n^1(t) = \int_0^t a'_z(s, z_0(s))\, \xi_n^1(s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, z_0(s))\, d\zeta_n(s) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}} \int_0^t \sigma'_z(s, z_0(s))\, \xi_n^1(s)\, d\zeta_n(s). \tag{27}$$

Вычитая (27) из (26), с учетом ограниченности $\sup\limits_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t)|$ неравенства

$$|f(x+a) - f(a) - f'_a(a)\, x| = \frac{|f''_{xx}(\overline{x})|\, x^2}{2}$$

и неравенства Гроноулла получаем

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t) - \xi_n^1(t)| = 0 \tag{28}$$

с вероятностью 1.

Решение уравнения (27) имеет вид

$$\xi_n^1(t) = \exp\left\{\int_0^t a_z'(s, z_0(s))\,ds + \int_0^t \sigma_z'(s, z_0(s))\,X(ns)\,ds\right\} \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{-\int_0^\tau a_z'(s, z_0(s))\,ds - \int_0^\tau \sigma_z'(s, z_0(s))\,X(ns)\,ds\right\} \sigma(\tau, z_0(\tau))\,d\zeta_n(\tau). \tag{29}$$

Нетрудно убедиться в том, что при $n \to \infty$ $\xi_n^1(t)$ в равномерной метрике сближается с $\eta_n(t)$. Действительно,

$$\int_0^t \sigma_z'(s, z_0(s))\,X(ns)\,ds = \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}} \times$$

$$\times \left[\sigma_z'(t, z_0(s))\,\zeta_n(t) - \int_0^t \frac{d}{ds}\sigma_z'(s, z_0(s))\,\zeta_n(s)\,ds\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0, \tag{30}$$

т. е. из (28) – (30) с вероятностью 1 имеем

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\xi_n(t) - \eta_n(t)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

В силу теоремы множество предельных точек последовательности $\{\zeta_n(t)\}$, $t \in [0, 1]$, лежит в K. Пусть $\{n'\}$ — последовательность номеров таких, что

$$\zeta_{n'} \xrightarrow[n' \to +\infty]{} X(t).$$

Тогда, переходя в (21) к пределу по последовательности $\{n'\}$, получаем

$$\lim_{n' \to +\infty} |\eta_{n'}(t)| = \eta(t),$$

причем

$$\eta(t) = \int_0^t a_z'(s, z_0(s))\,\eta(s)\,ds + \int_0^t x'(s)\,\sigma(s, z_0(s))\,ds,$$

а в силу того, что $X'(t)$ интегрируема с квадратом,

$$\eta(t) = \exp\left\{\int_0^t a_z'(s, z_0(s))\,ds\right\} \times$$

$$\times \int_0^t \exp\left\{-\int_0^\tau a_z'(s, z_0(s))\,ds\right\} X'(\tau)\,\sigma(\tau, z_0(\tau))\,d\tau.$$

Пусть $t \in [0, 1]$ — фиксировано. Рассмотрим на $[0, 1]$ функционал

$$\varphi(z) = \exp\left\{\int_0^t a_z'(s, z_0(s))\,ds\right\} \times$$

$$\times \left| \int_0^t \exp\left\{ -\int_0^\tau a_z'(s, z_0(s))\, ds \right\} \sigma(\tau, z_0(\tau))\, z(\tau)\, d\tau \right|.$$

Максимизируя его на множестве функций $z(\tau)$, $0 \le \tau \le t$, таких, что

$$\int_0^t |z(\tau)|^2 d\tau \le 1,$$

получаем

$$|\eta(t)| \le \exp\left\{ \int_0^t a_z'(s, z_0(s))\, ds \right\} \times$$

$$\times \left(\int_0^t \exp\left\{ -2\int_0^\tau a_z'(s, z_0(s))\, ds \right\} \sigma^2(\tau, z_0(\tau))\, d\tau \right)^{1/2} = \bar{z}(t),$$

т. е. решение задачи (18) с вероятностью близкой к 1 (при больших n) будет находиться в пределах

$$z_0(t) - \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\, \bar{z}(t) \le z_n(t) \le z_0(t) + \sqrt{\frac{2\sigma^2 \operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} n)}{n}}\, \bar{z}(t).$$

Таким образом, можно указать неслучайные криволинейные границы для решения $z_n(t)$.

1. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. – М.: Наука, 1970. – 384 с.
2. *Strassen V.* An invariance principle for the law of iterated logariphm // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1964. – 1964. – **3**, № 3. – P. 221–226.
3. *Булинский А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов и полей. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 64 с.
4. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
5. *Чикин Д. О.* Функциональная теорема для стационарных процессов. Мартингальный подход // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**, вып. 4. – С. 731–741.
6. *Sam Lazaro J., de Meyer P. A.* Questions de theorie des flots // Lect. Notes Math. – 1975. – **465**. – S. 1–96.
7. *Protter P.* Semimartingales and measures and random preserving flows // Ann. Inst. H. Poincaré B. – 1986. – № 2. – P. 127–147.
8. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 576 с.

Получено 16.01.95