УДК 519.46

М. И. Кадец (Харьков. гос. акад. гор. хоз-ва)

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ СКАЛЯРНО ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

We prove the following theorem: If every separable subspace Y of a Banach space X has a separable weak sequential closure in Y^{**}, then every scalarly almost periodic group acting in X is strongly almost periodic.

Доведено теорему про те, що якщо кожний сепарабельний підпростір Y банахового простору X має сепарабельне слабке секвенційне замикання в Y^{**}, то кожна скалярно майже періодична група, що діє в X, є сильно майже періодичною.

Начнем с определения понятий, фигурирующих в заглавии.

Определение 1. *Ограниченная непрерывная функция $f(t)$, определенная на числовой оси $\mathbb{R}$ и принимающая значения в банаховом пространстве X, называется (сильно) почти периодической (в дальнейшем — п. п.), если множество ее сдвигов $f(t+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, относительно компактно в равномерной метрике. При $X = \mathbb{C}$ получаем определение почти периодической функции Бора.*

Определение 2. *Функция $f(t)\colon \mathbb{R} \to X$ называется скалярно п. п., если для любого линейного функционала $x^* \in X^*$ скалярная функция $\langle x^*, f(t)\rangle$ есть п. п. функция Бора.*

Иногда скалярно п. п. функцию называют слабо п. п. функцией, однако при этом возникает возможность смещения этого понятия с понятием слабо п. п. функции в смысле Эберляйна [1].

Каждая п. п. функция со значениями в X является скалярно п. п. Обратное верно в том и только в том случае, когда в X совпадают слабая и сильная сходимости последовательностей (свойство Шура) [2].

Определение 3. *Однопараметрическая сильно непрерывная группа линейных непрерывных операторов $T(t)$ ($t \in \mathbb{R}$, $T(t_1+t_2) = T(t_1)T(t_2)$, $T(0) = I$), действующих в банаховом пространстве X, называется сильно п. п., если для любого элемента $x \in X$ функция $T(t)x$ со значениями в X является п. п. (эквивалентно: множество значений этой функции относительно компактно в X). Группа $T(t)$ называется скалярно п. п., если для любых $x \in X$ и $x^* \in X^*$ скалярные функции $\langle x^*, T(t)x\rangle$ суть п. п. функции Бора.*

Вообще говоря, приведенные выше понятия определяются для произвольной топологической группы G (почти периодические представления группы G, см. [3]), но в этой статье ми ограничимся случаем $G = \mathbb{R}$.

Ю. И. Любичу [4] принадлежит следующее утверждение. Если X слабо секвенциально полно (т. е. каждая слабая последовательность Коши в нем слабо сходится), то каждая скалярно п. п. группа является сильно п. п. Если же $X = c$ (банахово пространство всех сходящихся числовых последовательностей), то существует скалярно п. п. группа, не являющаяся сильно п. п.

Возникает естественный для теории функций со значениями в пространствах Банаха вопрос: каков максимально широкий класс банаховых пространств, для которых выполняется первая часть отмеченного выше утверждения Любича?

Настоящая статья дает частичный ответ на этот вопрос.

Теорема. *Пусть банахово пространство X имеет следующее свойство (S): для каждого его сепарабельного подпространства Y слабое* секвенциаль-*

ное замыкание Y во втором сопряженном Y^{**} сепарабельно. Тогда каждая скаОлярно п.п группа является сильно почти периодической.

Нам потребуются некоторые известные факты о скалярно п. п. функциях.

Предложение 1 [5]. *Множество значений каждой скалярно п. п. функции сепарабельно.*

Предложение 2 [6]. *Спектр скалярно п. п. функции не более чем счетен.*

Напомним, что спектром скалярно п. п. функции $f\colon \mathbb{R} \to X$ называется объединение спектров всех п. п. функций Бора $\langle x^*, f(t)\rangle$, когда x^* пробегает сопряженное пространство X^*.

Счетность спектра скалярно п. п. функций позволяет распространить подход, связанный с компактификацией числовой оси $\mathbb{R}$, с п. п. функций Бора на скалярно п. п. функции. Пусть $f(t)\colon \mathbb{R} \to X$ — скалярно п. п. функция, $\Lambda = \{\lambda_n\}_1^\infty$ — ее спектр. С помощью этого спектра (точнее, с помощью наименьшего числового модуля M, содержащего спектр) мы можем наделить числовую ось топологией, относительно которой она станет предкомпактной метризуемой группой G_0. (В случае периодической функции $f(t)$ и только в этом случае произойдет отождествление точек, отстоящих на расстояния, кратные периоду, так что прямая превратится в окружность. Никаких существенных осложнений этот случай не создает.) Пополнение группы G_0 обозначим через G. Это — компактная метрическая группа. Функция $f(t)$ на G_0 будет слабо равномерно непрерывной (т. е. будет равномерно непрерывной каждая скалярная функция $\langle x^*, f(t)\rangle$, $x^* \in X^*$). Функцию $f(t)$ можно доопределить по непрерывности на компакт G (для доопределенной функции мы сохраним обозначение $f(t)$, $t \in G$). При этом доопределении ее значения на $G \setminus G_0$ могут не принадлежать X. Они будут принадлежать слабому* секвенциальному замыканию пространства X в X^{**}. Заметим, наконец, что сильная почти периодичность функции $f(t)$ равносильна сильной непрерывности ее доопределения на G.

Доказательство теоремы. Возьмем произвольный элемент $y_0 \in X$ и образуем скалярно п. п. функцию $f(t) = T(t)y_0$. Обозначим замкнутую линейную оболочку множества ее значений через Y, а ее слабое* секвенциальное замыкание в Y^{**} через $E = E(Y) \subset Y^{**}$. В соответствии с изложенным выше компактифицируем группу $\mathbb{R}$, превратив ее в предкомпактную метрическую группу с пополнением G. Функция $f(t)$ после ее доопределения на G будет слабо* непрерывной функцией со значениями в E. Теорема будет доказана, если мы установим сильную непрерывность доопределенной функции. Так как рассматриваемая функция порождена группой $T(t)$, достаточно доказать ее сильную непрерывность хотя бы в одной точке $t_0 \in G$.

Для продолжения доказательства теоремы нам потребуется ряд сведений о специальных эквивалентных нормах в сепарабельных пространствах Банаха. Пусть E — сепарабельное пространство Банаха, Γ — замкнутое линейное подпространство сопряженного пространства E^*. С помощью Γ определим на E функционал

$$p_\Gamma(e) = \sup\left\{\left|\langle e^*, e\rangle\right|\colon e^* \in \Gamma,\ \|e^*\| \le 1\right\}.$$

Далее определим характеристику Диксмье подпространства Γ:

$$r(\Gamma) = \inf\{\, p_\Gamma(e)\colon e \in E,\ \|e\| = 1\}.$$

Подпространство Γ называется нормирующим, если $r(\Gamma) > 0$, и 1-нормирующим, если $r(\Gamma)=1$. Заметим, что $r(\Gamma)=1$ в том и только в том случае, когда $p_\Gamma(e)=\|e\|$ для всех $e\in E$. По поводу свойств (и, в частности, эквивалентных определений) характеристики Диксмье см. [7, с. 28 – 44].

Предложение 3 [8, с. 176 – 184]. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $\Gamma\subset E^*$ — нормирующее подпространство. На E существует эквивалентная норма $\|\cdot\|$ со свойством $H(\Gamma)$, состоящим в выполнении следующих двух условий*:

K_1) *если* $\langle e^*, e_n\rangle \xrightarrow[n]{} \langle e^*, e\rangle$ $\forall e^*\in\Gamma$, *то* $\liminf\|e_n\|\ge\|e\|$;

K_2) *если кроме того* $\|e_n\|\to\|e\|$, *то* $\|e_n-e\|\to 0$.

Докажем следующее усиление предложения 3.

Предложение 4. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, $\Gamma\subset E^*$ — нормирующее подпространство. На E можно ввести эквивалентную норму со свойством $H(\Gamma)$, относительно которой Γ будет 1-нормирующим подпространством.*

Доказательство. Из подпространства Γ выделим сепарабельное нормирующее подпространство Γ_0. Для этого на единичной сфере пространства E возьмем счетное плотное подмножество $\{e_n\}_1^\infty$. Для каждого e_n выделим в Γ элемент e_n^*, $\|e_n^*\|=1$, $\langle e_n^*, e_n\rangle \ge p_\Gamma(e_n)/2$. Замыкание линейной оболочки множества $\{e_n^*\}$ даст нам требуемое подпространство $\Gamma_0\subset\Gamma$. Введем согласно предложению 3 эквивалентную норму в E со свойством $H(\Gamma_0)$ и покажем, что автоматически $r(\Gamma_0)=1$. Это вытекает из следующих соображений. 1. Условие K_1) означает, что единичный шар $B(E)$ секвенциально замкнут в слабой Γ_0-топологии (т. е. в топологии, в которой окрестности нуля определяются конечными наборами линейных функционалов из Γ_0). 2. Так как Γ_0 — нормирующее подпространство, то топологическое замыкание $B(E)$ в слабой Γ_0-топологии ограничено (оно лежит в „раздутом" шаре $r^{-1}(\Gamma_0)B(E)$). 3. Поскольку Γ_0 сепарабельно, то слабая Γ_0-топология метризуема на каждом ограниченном подмножестве пространства E. В частности, она метризуема на шаре $r^{-1}(\Gamma_0)\times B(E)$. 4. Так как в метрическом пространстве понятия секвенциального и топологического замыкания совпадают, то шар $B(E)$ замкнут не только секвенциально, но и топологически, что влечет требуемое равенство $r(\Gamma_0)=1$. (По поводу изложенных соображений см. [7, с. 28–34].) Поскольку $\Gamma\supset\Gamma_0$, то в этой же норме будут выполняться свойство $H(\Gamma)$ и равенство $r(\Gamma)=1$.

Используя предложение 4, докажем утверждение, которое позволит завершить доказательство теоремы.

Лемма. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство, Γ — нормирующее подпространство сопряженного пространства E^*; G — метрический компакт. Пусть $f(t)\colon G\to E$ — Γ-слабо непрерывная функция. Тогда найдется точка $x_0\in G$, в которой функция $f(t)$ сильно непрерывна.*

Доказательство. Поскольку все понятия, фигурирующие в лемме, имеют линейно-топологическую (а не метрическую) природу, то утверждение леммы достаточно доказать в какой-либо эквивалентной норме. В соответствии с предложением 4 введем на E эквивалентную норму, относительно которой E будет иметь $H(\Gamma)$ свойство, а Γ будет 1-нормирующим подпространством. Образуем скалярную функцию

$$\varphi(t) = \sup\left\{\left|\langle e^*, f(t)\rangle\right| : e^*\in\Gamma,\ \|e^*\|\le 1\right\}, \qquad t\in G.$$

Так как $r(\Gamma)=1$, то $\varphi(t)=\|f(t)\|_E$. Поскольку G сепарабельно, $\varphi(t)$ —

функция первого класса Бэра. Значит, в G существует плотное G_δ подмножество ее точек непрерывности. Пусть $t_0 \in G$ — одна из таких точек. Тогда для любой последовательности $(t_n)_1^\infty$, сходящейся к t_0, имеем

$$f(t_n) \xrightarrow{\Gamma\text{-слабо}} f(t_0) \quad (\Gamma\text{-слабая непрерывность } f(t)),$$

$$\| f(t_n) \| \to \| f(t_0) \| \quad (\text{непрерывность } \varphi(t) \text{ при } t = t_0).$$

Так как E имеет свойство $H(\Gamma)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \| f(t_n) - f(t_0) \| = 0.$$

Завершение доказательства теоремы. Мы имеем сепарабельное банахово пространство Y и его слабое* секвенциальное замыкание в Y^{**} (обозначенное через E), которое сепарабельно по условию теоремы. В качестве Γ возьмем образ Y^* при его естественном вложении в E^*. Более подробно: рассмотрим изометрические вложения

$$Y \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} Y^{**};$$

переходя к сопряженным операторам, получаем

$$Y^* \xrightarrow{\pi_1} Y^{***} \xrightarrow{j^*} E^* \xrightarrow{i^*} Y^*$$

(здесь π_1 — каноническое вложение). Положим $\Gamma = j^* \pi_1 Y^*$. Это — нормирующее подпространство в E^*. В начале доказательства теоремы мы имели слабо* непрерывную функцию $f(t)$, определенную на метрическом компакте G и принимающую значения в сепарабельном подпространстве пространства Y^{**}. Можно сказать иначе: мы имеем Γ-слабо непрерывную функцию $f(t)$, определенную на G и принимающую значения в сепарабельном банаховом пространстве E. Таким образом, выполняются условия леммы, откуда следует существование хотя бы одной точки сильной непрерывности функции $f(t)$. Согласно сделанному ранее замечанию функция $f(t)$ сильно непрерывна на G, что и доказывает теорему.

Класс банаховых пространств со свойством (S), выделенный в теореме, строго шире класса слабо секвенциально полных пространств, фигурировавшего в теореме Любича. Он содержит, в частности, квазирефлексивные пространства. Можно предположить, что максимально широкий класс банаховых пространств, для которых верно заключение теоремы, образован пространствами, не содержащими подпространств, изоморфных пространству c.

1. *Кадец М. И., Любич Ю. И.* О связях между различными видами почти периодичности представлений групп // Теория функций, функцион. анализ и прил. – 1990. – Вып. 53. – С. 3–5.
2. *Димитров Д. Б., Кадец М. И.* О слабо почти периодических функциях // Там же. – 1972. – Вып. 16. – С. 150–154.
3. *Любич Ю. И.* Введение в теорию банаховых представлений групп. – Харьков: Выща шк., 1985. – 143 с.
4. *Любич Ю. И.* Об условиях полноты системы собственных векторов корректного оператора // Успехи мат. наук. – 1963. – **18**, № 1. – С. 165–171.
5. *Amerio L.* Abstract almost-periodic functions and functional equations // Boll. Unione math. ital. – 1965. – **20**, № 8. – P. 267–383.
6. *Кадец М. И., Кюрстен К. Д.* Счетность спектра слабо почти периодических функций со значениями в банаховом пространстве // Теория функций, функцион. анализ и прил. – 1980. – Вып. 33. – С. 45–49.
7. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения. – Киев: Выща шк., 1980. – 216 с.
8. *Bessaga C., Pelczynsky A.* Selected topics in infinite-dimensional topology. – Warscawa: PWN, 1975.

Получено 17.04.95