УДК 512. 536

И. В. Протасов (Нац. ун-т, Киев)

ИДЕАЛЫ И СВОБОДНЫЕ ПАРЫ В ПОЛУГРУППЕ $\beta\mathbb{Z}$

We prove that the equations $\xi + x = m\xi + y$, $x + \xi = y + m\xi$ have no solutions in the semigroup $\beta\mathbb{Z}$ for every free ultrafilter ξ and every integer $m \neq 0, 1$. We study semigroups generated by the ultrafilters ξ, $m\xi$. For left maximal idempotents, we prove a reduced hypothesis about elements of finite order in $\beta\mathbb{Z}$.

Доведено, що рівняння $\xi + x = m\xi + y$, $x + \xi = y + m\xi$ не мають розв'язків у півгрупі $\beta\mathbb{Z}$ для кожного вільного ультрафільтра ξ і кожного цілого числа $m \neq 0, 1$. Вивчаються півгрупи, породжені ультрафільтрами ξ, $m\xi$. Для лівомаксимальних ідемпотентів доведена редукована гіпотеза про елементи скінченного порядку в $\beta\mathbb{Z}$.

Рассмотрим чех-стоунову компактификацию $\beta\mathbb{Z}$ множества $\mathbb{Z}$ целых чисел с дискретной топологией.

Элементами пространства $\beta\mathbb{Z}$ являются ультрафильтры на множестве $\mathbb{Z}$, а базу топологии образуют подмножества $\overline{A} = \{\xi \in \beta\mathbb{Z} : A \in \xi\}$, где A пробегает все подмножества из $\mathbb{Z}$. Отождествим $\mathbb{Z}$ с подмножеством всех главных ультрафильтров из $\beta\mathbb{Z}$ и положим $\mathbb{Z}^* = \beta\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}$.

Продолжим операцию сложения целых чисел на множество $\beta\mathbb{Z}$, полагая для ультрафильтров ξ, η и подмножества $A \subseteq \mathbb{Z}$

$$A \in \xi + \eta \Leftrightarrow \{z \in \mathbb{Z} : A - z \in \xi\} \in \eta.$$

Операция сложения ультрафильтров ассоциативна, непрерывна по второму аргументу при фиксированном первом и непрерывна по первому аргументу, если фиксированный второй аргумент является главным ультрафильтром [1].

Для ультрафильтра $\xi \in \beta\mathbb{Z}$ и целого числа m обозначим через $m\xi$ ультрафильтр с базой из подмножеств $\{mQ : Q \in \xi\}$. Отображение $f_m : \beta\mathbb{Z} \to \beta\mathbb{Z}$, $f_m(\xi) = m\xi$, $m \neq 0$, является изоморфизмом полугруппы $\beta\mathbb{Z}$ на подполугруппу $\overline{m\mathbb{Z}}$ и, в частности, f_1, f_{-1} — автоморфизмы полугруппы $\beta\mathbb{Z}$.

Сформулируем вначале с некоторыми комментариями основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Для любого ультрафильтра* $\xi \in \mathbb{Z}^*$ *и любого целого числа* $m \neq 0, 1$ *справедливо*

$$\xi + \beta\mathbb{Z} \cap m\xi + \beta\mathbb{Z} = \varnothing.$$

Приведем равносильную формулировку теоремы 1: уравнение $\xi + x = m\xi + y$ неразрешимо в полугруппе $\beta\mathbb{Z}$ для любых $\xi \in \mathbb{Z}^*$, $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

Отметим, что неразрешимость уравнения $\xi + x = 2\xi + y$ доказана в статье [2].

Теорема 2. *Для любого ультрафильтра* $\xi \in \mathbb{Z}^*$ *и любого целого числа* $m \neq 0, 1$ *справедливо*

$$\beta\mathbb{Z} + \xi \cap \beta\mathbb{Z} + m\xi = \varnothing.$$

Частным случаем теоремы 2 является теорема 2.11 из [3] о неразрешимости в $\beta\mathbb{N}$ уравнения $x + \xi = x + 2\xi$ для любого свободного ультрафильтра ξ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$.

Теоремы 1, 2 применяются в данной работе для исследования подполугрупп $\langle \xi, m\xi \rangle$ полугруппы $\beta\mathbb{Z}$, порожденных ультрафильтрами $\xi, m\xi$.

Пару ультрафильтров $\xi, \eta \in \beta\mathbb{Z}$ назовем свободной, если подполугруппа $\langle \xi, \eta \rangle$ является свободным произведением подполугрупп $\langle \xi, \eta \rangle$, порожденных ультрафильтрами ξ, η. Е. Г. Зеленюк высказал предположение, что пара ультрафильтров $\xi, m\xi$ свободна для любого ультрафильтра $\xi \in \mathbb{Z}^*$ и любого натурального числа $m > 1$. Следующие две теоремы подтверждают это предположение в некоторых частных случаях.

Теорема 3. *Пара ультрафильтров* $\varepsilon, m\varepsilon$ *свободна для любого идемпотента* $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*$ *и любого целого числа* $m \neq 0, \pm 1$.

Теорема 3 дает новый пример полугруппы, вложимой в полугруппу $\beta\mathbb{Z}$. Кроме того, из характеризации минимального идеала M полугруппы $\beta\mathbb{Z}$ [4] вытекает, что $m\xi \in M$ для любого $\xi \in M$ и любого целого числа $m \neq 0$. Следовательно, в минимальном идеале M найдутся пары идемпотентов, произведения которых не являются идемпотентами.

Отметим, что вопрос о свободе пары $\varepsilon, -\varepsilon$ для любого идемпотента $\varepsilon \in \beta\mathbb{Z}$ остается открытым.

Ультрафильтр $\xi \in \beta\mathbb{Z}$ называется левосократимым, если из соотношения $\xi + \eta = \xi + \mu$ следует $\eta = \mu$.

Теорема 4. *Если* ξ *— левосократимый ультрафильтр из* $\beta\mathbb{Z}$, *то пара* $\xi, m\xi$ *свободна для любого целого числа* $m \neq 0, 1$.

Из теоремы 4 и описания левосократимых ультрафильтров вытекает, что множество ультрафильтров $\xi \in \mathbb{Z}^*$ таких, что пара $\xi, m\xi$ свободна для любого целого числа $m \neq 0, 1$, содержит плотное и открытое в $\mathbb{Z}^*$ подмножество.

Одна из наиболее известных гипотез о полугруппе $\beta\mathbb{Z}$ состоит в том, что каждый элемент конечного порядка в $\beta\mathbb{Z}$ является идемпотентом [5]. Е. Г. Зеленюк доказал [6], что каждая конечная подгруппа в $\beta\mathbb{Z}$ одноэлементна. Таким образом, гипотеза об элементах конечного порядка в $\beta\mathbb{Z}$ редуцируется к следующей гипотезе.

Для любого идемпотента $\varepsilon \in \beta\mathbb{Z}$ система из двух уравнений $x + x = \varepsilon, x + \varepsilon = \varepsilon$ имеет в $\beta\mathbb{Z}$ лишь тривиальное решение $x = \varepsilon$.

Первым шагом в направлении подтверждения редуцированной гипотезы об элементах конечного порядка является теорема 5. Перед формулировкой этой теоремы напомним определение левого предпорядка на множестве идемпотентов полугруппы $\mathbb{Z}^*$. Идемпотенты $\varepsilon, \eta \in \mathbb{Z}^*$ находятся в отношении $\eta \underset{l}{\leq} \varepsilon$, если $\eta + \varepsilon = \eta$. Как известно [7], для каждого идемпотента $\eta \in \mathbb{Z}^*$ найдется такой левомаксимальный идемпотент $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*$, что $\eta \underset{l}{\leq} \varepsilon$.

Теорема 5. *Если* ε *— левомаксимальный идемпотент из* $\mathbb{Z}^*$, $\xi \in \beta\mathbb{Z}$ *и* $\xi + \xi = \varepsilon$, $\xi + \varepsilon = \varepsilon$, *то* $\xi = \varepsilon$.

Перейдем к доказательствам сформулированных результатов.

***Доказательство теоремы* 1.** Применяя автоморфизм f_{-1} полугруппы $\beta\mathbb{Z}$, можно считать, что $\mathbb{N} \in \xi$. Покажем вначале, что $\xi + \beta\mathbb{Z} \cap m\xi + \beta\mathbb{Z} = \varnothing$ для любого натурального числа $m > 1$.

Построим специальное разбиение множества $\mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, m^2 - 1\}$ на 6 частей $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Отметим, что для $m = 2$ такое разбиение использовалось в статье [2].

Для натуральных чисел $a, b,\ a < b$, обозначим через $[a, b)$ полуинтервал $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ числовой прямой $\mathbb{R}$, $n[a, b) = [na, nb)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через d целую часть числа $(m^3 - m^2)/3$. Так как $m > 1$, то

$d \geq 1$. Рассмотрим следующие полуинтервалы числовой прямой $\mathbb{R}$:

$$L_1 = [m^2, m^2 + d), \quad L_2 = [m^2 + d, m^2 + 2d), \quad L_3 = [m^2 + 2d, m^3),$$
$$L_4 = mL_1, \quad L_5 = mL_2, \quad L_6 = mL_3.$$

Далее, для $i = 1, 2, \ldots, 6$ положим

$$B_i = \bigcup_{k=0}^{\infty} m^{2k} L_i, \quad A_i = B_i \cap \mathbb{N}.$$

Из определения подмножеств A_i непосредственно следует

$$mA_1 \subseteq A_4, \quad mA_2 \subseteq A_5, \quad mA_3 \subseteq A_6,$$
$$mA_4 \subseteq A_1, \quad mA_5 \subseteq A_2, \quad mA_6 \subseteq A_3.$$

Так как $\mathbb{N} \in \xi$, ξ — свободный ультрафильтр и подмножество $\mathbb{N} \setminus \{A_1 \cup \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6\}$ конечно, то $A_i \in \xi$ для некоторого $i = 1, 2, \ldots, 6$. Пусть, например, $A_4 \in \xi$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Заметим, что $A_3 \cup A_4 \cup A_5 \in \xi + z$ для любого целого числа z. Следовательно,

$$z + \beta\mathbb{Z} \subseteq \overline{A_3 \cup A_4 \cup A_5}.$$

С другой стороны, $mA_4 \subseteq A_1$ и поэтому $A_6 \cup A_1 \cup A_2 \in m\xi + z$ для любого целого числа z. Значит,

$$m\xi + \beta\mathbb{Z} \subseteq \overline{A_6 \cup A_1 \cup A_2}.$$

Поскольку

$$\overline{(A_3 \cup A_4 \cup A_5)} \cap \overline{(A_6 \cup A_1 \cup A_2)} = \varnothing,$$

то $\xi + \beta\mathbb{Z} \cap m\xi + \beta\mathbb{Z} = \varnothing$. Соотношение $\xi + \beta\mathbb{Z} \cap m(-\xi) + \beta\mathbb{Z} = \varnothing$ для любого натурального числа m достаточно очевидно. Действительно, так как $N \in \xi$, то $\xi + \beta\mathbb{Z} \subseteq \overline{\mathbb{N}}$, $m(-\xi) + \beta\mathbb{Z} \subseteq \overline{(-\mathbb{N})}$. Осталось заметить, что $\overline{\mathbb{N}} \cap \overline{(-\mathbb{N})} = \varnothing$.

***Доказательство теоремы* 2.** Зафиксируем натуральное число $m > 1$ и вложим группу $\mathbb{Z}$ в кольцо $\mathbb{Z}_m$ целых m-адических чисел. Каждый элемент $z \in \mathbb{Z}_m$ однозначно записывается в виде

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i m^{i-1}, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

Положим $l_z = \min\{i : a_i \neq 0\}$, $\lambda_z = a_{l(z)}$ для каждого числа $z \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$. Заметим, что если $z, h \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ и $l(h) > l(z)$, то

$$l(z) = l(-z), \quad \lambda(-z) = m - \lambda(z),$$
$$l(mz) = l(z) + 1, \quad \lambda(mz) = \lambda(z),$$
$$l(h+z) = l(z), \quad \lambda(h+z) = \lambda(z).$$

Операция сложения в кольце $\mathbb{Z}_m$ продолжается на множество $\beta\mathbb{Z}_m$ всех ультрафильтров на $\mathbb{Z}_m$. Обозначим $\mathbb{Z}_m^* = \beta\mathbb{Z}_m \setminus \mathbb{Z}_m$. Поскольку $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_m$, то полугруппу $\beta\mathbb{Z}$ можно отождествить с подполугруппой $\{\xi \in \beta\mathbb{Z}_m : \mathbb{Z} \in \xi\}$ полугруппы $\beta\mathbb{Z}_m$. Поэтому достаточно убедиться в том, что

$$\beta\mathbb{Z}_m+\xi \cap \beta\mathbb{Z}_m+m(\pm\xi) = \varnothing,$$

$$\beta\mathbb{Z}_3+\xi' \cap \beta\mathbb{Z}_3+m(-\xi') = \varnothing$$

для любых ультрафильтров $\xi\in\mathbb{Z}_m^*$, $\xi'\in\mathbb{Z}_3^*$.

На кольце $\mathbb{Z}_m$ имеется естественная компактная топология с базой окрестностей нуля, состоящей из подмножеств $U_k=\{z\in\mathbb{Z}_m:\ l(z)\geq k\}\cup\{0\}$, $k\in\in\mathbb{N}$. Далее запись $\xi\underset{\tau}{\to} z$ означает, что ультрафильтр $\xi\in\beta\mathbb{Z}_m$ сходится в топологии τ к элементу $z\in\mathbb{Z}_m$. Если $\xi,\eta\in\beta\mathbb{Z}_m$ и $\xi\underset{\tau}{\to} z$, $\eta\underset{\tau}{\to} h$, то согласно лемме 8 из [8] $\eta+\xi\underset{\tau}{\to} h+z$.

Рассмотрим чех-стоуновы продолжения $\bar{l}:\beta\mathbb{Z}_m\setminus\{0\}\to\beta\mathbb{N}$, $\bar{\lambda}:\beta\mathbb{Z}_m\setminus\setminus\{0\}\to\{0,1,\dots,m-1\}$ отображений $l:\mathbb{Z}_m\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$, $\lambda:\mathbb{Z}_m\setminus\{0\}\to\{0, 1,\dots,m-1\}$. Из отмеченных выше свойств отображений l,λ и определения операции сложения ультрафильтров непосредственно вытекают следующие свойства отображений $\bar{l}$, $\bar{\lambda}$. Если $\xi\in\mathbb{Z}_m^*$, $\eta\in\beta\mathbb{Z}_m$ и $\eta\underset{\tau}{\to}0$, то

$$\bar{l}(\xi) = \bar{l}(-\xi),\qquad \bar{\lambda}(-\xi) = m-\bar{\lambda}(\xi),$$

$$\bar{l}(m\xi) \neq \bar{l}(\xi),\qquad \bar{\lambda}(m\xi) = \bar{\lambda}(\xi),$$

$$\bar{l}(\eta+\xi) = \bar{l}(\xi),\qquad \bar{\lambda}(\eta+\xi) = \bar{\lambda}(\xi).$$

Проверим свойство $\bar{l}(m\xi)\neq\bar{l}(\xi)$. Пусть $\mathbb{N}=N_1\cup N_2$ — разбиение множества $\mathbb{N}$ на нечетные и четные числа. Та как $\bar{l}(\xi)$ — ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то $N_i\in\bar{l}(\xi)$ для некоторого $i=1,2$. Выберем такое подмножество $Q\in\xi$, что $l(Q)\subseteq N_i$. Поскольку $l(mQ)\in\mathbb{N}\setminus N_i$ и $l(mQ)\in\bar{l}(m\xi)$, то $\mathbb{N}\setminus N_i\in\in\bar{l}(m\xi)$.

Допустим, что $\beta\mathbb{Z}_m+\xi\cap\beta\mathbb{Z}_m+k\xi\neq\varnothing$ для некоторых ультрафильтра $\xi\in\mathbb{Z}_m^*$ и целого числа k. Выберем такие ультрафильтры $\eta,\mu\in\beta\mathbb{Z}_m$, что $\eta+\xi=\mu+k\xi$. Пусть $\xi\underset{\tau}{\to} z$, $\eta\underset{\tau}{\to} h$. Тогда

$$(\eta-h)+(\xi-z) = (\mu-h+(k-1)z)+k(\xi-z).$$

Обозначим $\eta_1=\eta-h$, $\xi_1=\xi-z$, $\mu_1=\mu-h+(k-1)z$. Заметим, что $\xi_1\in\in\mathbb{Z}_m^*$, $\xi_1\underset{\tau}{\to}0$, $\eta_1\underset{\tau}{\to}0$, $k\xi_1\underset{\tau}{\to}0$. Так как $\eta_1+\xi_1=\mu_1+k\xi_1$, то $\mu_1\underset{\tau}{\to}0$.

Полагая $k=m$, имеем $\bar{l}(\eta_1+\xi_1)=\bar{l}(\xi_1)$, $\bar{l}(\mu_1+m\xi_1)=\bar{l}(m\xi_1)$, что противоречит свойству $\bar{l}(\xi_1)\neq\bar{l}(m\xi_1)$.

Если $k=-m$, то $\bar{l}(\eta_1+\xi_1)=\bar{l}(\xi_1)$, $\bar{l}(\mu_1-m\xi_1)=\bar{l}(-m\xi_1)=\bar{l}(m\xi_1)$, что противоречит свойству $\bar{l}(\xi_1)\neq\bar{l}(m\xi_1)$.

Если же $m=3$, $k=-1$, то $\bar{\lambda}(\eta_1+\xi_1)=\bar{\lambda}(\xi_1)$, $\bar{\lambda}(\mu_1-\xi_1)=\bar{\lambda}(-\xi_1)$. Так как $\bar{\lambda}(\xi_1)\in\{1,2\}$, то получено противоречие с тем, что $\bar{\lambda}(-\xi_1)=3-\bar{\lambda}(\xi_1)$.

***Доказательство теоремы* 3.** Зафиксируем идемпотент $\varepsilon\in\mathbb{Z}^*$, натуральное число $m>1$ и покажем вначале, что пара $\varepsilon, m\,\varepsilon$ свободна. Применяя автоморфизм f_{-1} полугруппы $\beta\mathbb{Z}$, можно считать, что $\mathbb{N}\in\varepsilon$.

Каждое натуральное число z однозначно представимо в виде

$$z = \sum_{i=k}^{n} a_i m^{i-1}, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \quad a_k \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Положим $l(z) = k$, $r(z) = n$ и

$$\lambda(z) = l(z) \bmod 2, \quad \rho(z) = r(z) \bmod 2.$$

Заметим, что

$$l(mz) = l(z) + 1, \quad r(mz) = r(z) + 1,$$
$$\lambda(mz) = 1 - \lambda(z), \quad \rho(mz) = 1 - \rho(z).$$

Сопоставим числу z вектор $(b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$, координаты которого определяются следующим правилом:

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i = 0; \\ +, & \text{если } a_i \neq 0 \text{ и число } i \text{ четно}; \\ -, & \text{если } a_i \neq 0 \text{ и число } i \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Обозначим через $\nu(z)$ число перемен знаков в векторе $(b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n)$. Очевидно, что $\nu(mz) = \nu(z)$. Если $l(h) > r(z)$, то

$$\nu(h+z) = \begin{cases} \nu(h) + \nu(z), & \text{если } \rho(z) = \lambda(h); \\ \nu(h) + \nu(z) + 1, & \text{если } \rho(z) \neq \lambda(h). \end{cases}$$

Пусть $\overline{\lambda} : \beta\mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $\overline{\rho} : \beta\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ — чех-стоуновы продолжения отображений $\lambda : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $\rho : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Тогда $\overline{\lambda}(m\xi) = 1 - \overline{\lambda}(\xi)$, $\overline{\rho}(m\xi) = 1 - \overline{\rho}(\xi)$ для любого ультрафильтра $\xi \in \beta\mathbb{N}$.

Возьмем произвольное натуральное число $p > 1$ и положим $\nu_p(z) = \nu(z) \bmod p$. Рассмотрим чех-стоуново продолжение $\overline{\nu}_p : \beta\mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$ отображения $\nu_p : \mathbb{N} \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Ясно, что $\overline{\nu}_p(\xi) = \overline{\nu}_p(m\xi)$ для любого ультрафильтра $\xi \in \beta\mathbb{N}$.

Как известно [1], $n\mathbb{N} \in \eta$ для любых идемпотента $\eta \in \beta\mathbb{N}$ и натурального числа n. Поэтому из определений операции сложения ультрафильтров и отображений ν_p, $\overline{\nu}_p$ вытекает следующее утверждение. Если $\xi, \eta \in \beta\mathbb{N}$ и η — идемпотент, то

$$\nu_p(\xi + \eta) = \begin{cases} \left(\overline{\nu}_p(\xi) + \overline{\nu}_p(\eta)\right) \bmod p, & \text{если } \overline{\rho}(\eta) = \overline{\lambda}(\xi); \\ \left(\overline{\nu}_p(\xi) + \overline{\nu}_p(\eta) + 1\right) \bmod p, & \text{если } \overline{\rho}(\eta) \neq \overline{\lambda}(\xi). \end{cases}$$

В частности,

$$\nu_p(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{\rho}(\eta) = \overline{\lambda}(\eta); \\ p-1, & \text{если } \overline{\rho}(\eta) \neq \overline{\lambda}(\eta). \end{cases}$$

Выберем произвольный ультрафильтр δ из подполугруппы $\langle \varepsilon, m\varepsilon \rangle$, порожденный идемпотентами $\varepsilon, m\varepsilon$. Предположим, что

$$\delta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$

где $\xi_i, \eta_i \in \{\varepsilon, m\varepsilon\}$, $\xi_i \neq \xi_{i+1}$, $\eta_j \neq \eta_{j+1}$ для всех $i = 1, \ldots, k-1$, $j = 1, \ldots, n-1$. Мы должны убедиться в том, что $k = n$ и $\xi_i = \eta_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Согласно теореме 1 $\xi_1 = \eta_1$, а по теореме 2 $\xi_k = \eta_n$. Поэтому достаточно доказать, что $k = n$.

Зафиксируем теперь натуральное число p так, чтобы $p > k$, $p > n$.

Допустим, что $\overline{\lambda}(\varepsilon) = \overline{\rho}(\varepsilon)$ и, следовательно, $\overline{\nu}_p(\varepsilon) = \overline{\nu}_p(m\varepsilon) = 0$. Тогда

$$\overline{\nu}_p(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k) = (k-1) \bmod p = k-1,$$

$$\overline{\nu}_p(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n) = (n-1) \bmod p = n-1.$$

Предположим, что $\overline{\lambda}(\varepsilon) \neq \overline{\rho}(\varepsilon)$ и, следовательно, $\overline{\nu}_p(\varepsilon) = \overline{\nu}_p(m\varepsilon) = p-1$. Тогда

$$\overline{\nu}_p(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k) = k(p-1) \bmod p = p-k,$$

$$\overline{\nu}_p(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n) = n(p-1) \bmod p = p-n.$$

Так как $\overline{\nu}_p(\xi_1 + \ldots + \xi_k) = \overline{\nu}_p(\eta_1 + \ldots + \eta_n)$, то $k = n$ в любом из двух возможных случаев.

Осталось убедиться в том, что пара $\varepsilon, -m\varepsilon$ свободна. Для этого воспользуемся разложением целых чисел по отрицательному базису из работы [9]. Каждое целое число $z \neq 0$ однозначно представимо в виде

$$z = \sum_{i=k}^{n} a_i(-m)^{i-1}, \quad a_i \in \{0, 1, \ldots, m-1\}, \quad a_k \neq 0, \quad a_n \neq 0.$$

Применительно к этой ситуации аналогично вводятся отображения $l, r, \lambda, \rho, \nu, \nu_p$ и их чех-стоуновы продолжения. Далее доказательство проводится по изложенной выше схеме.

О полугруппе $S(\xi)$. Пусть G — произвольная бесконечная группа с единицей e. Используя мультипликативную запись, продолжим операцию умножения на чех-стоунову компактификацию βG группы G как дискретного пространства. Для произвольных ультрафильтров $\xi, \eta \in \beta G$ и подмножества $A \subseteq G$ положим

$$A \in \xi\,\eta \Leftrightarrow \{g \in G : Ag^{-1} \in \xi\} \in \eta.$$

Естественно, группа G отождествляется с подмножеством главных ультрафильтров из βG, $G^* = \beta G \setminus G$ — замкнутая подгруппа полугруппы βG.

Для произвольного ультрафильтра $\xi \in \beta G$ положим

$$S(\xi) = \{\eta \in \beta G : \xi\eta = \xi\}.$$

Очевидно, что $e \in S(\xi)$ и $S(\xi)$ — замкнутая подполугруппа полугруппы βG. По лемме 5.4 из [10] $S(\xi) \cap G = \{e\}$. Если же $S(\xi) \cap G^* = \varnothing$, то найдется такой идемпотент $\eta \in G^*$, что $\eta \in S(\xi)$.

Зафиксируем произвольный идемпотент ε полугруппы βG и опишем минимальный идеал $M(\varepsilon)$ полугруппы $S(\varepsilon)$. Очевидно, что $\{\varepsilon\}$ — минимальный правый идеал полугруппы $S(\varepsilon)$. Значит, $\{\xi\varepsilon\}$ — минимальный правый идеал полугруппы $S(\varepsilon)$ для любого ультрафильтра $\xi \in S(\varepsilon)$. Наоборот, если R — минимальный правый идеал полугруппы $S(\varepsilon)$ и $\xi \in R$, то $\xi\varepsilon \in R$ и $R = \{\xi\varepsilon\}$. Так как минимальный идеал полугруппы с компактной топологией, в которой все левые сдвиги непрерывны, является объединением минимальных правых идеалов [7], то

$$M(\varepsilon) = \{\xi\varepsilon : \xi \in S(\varepsilon)\}.$$

Из полученного описания следует, что минимальный идеал полугруппы

$S(\varepsilon)$ состоит из идемпотентов и совпадает с множеством всех левых нулей полугруппы $S(\varepsilon)$.

Левые сокращения в полугруппе βG. В работе [11] получено описание левосократимых ультрафильтров в полугруппе $\beta\mathbb{N}$. Распространим это описание на произвольные полугруппы βG.

Для ультрафильтра $\xi \in \beta G$ следующие условия равносильны:

1) $S(\xi) = \{e\}$;

2) ξ — *левосократимый ультрафильтр*;

3) *найдется такое подмножество $Q \in \xi$, что $Q \cap Qg \notin \xi$ для любого элемента $g \in G \setminus \{e\}$.*

Доказательство проведем по кольцевой схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $S(\xi) = e$, однако, найдутся такие ультрафильтры η, μ, что $\xi\eta = \xi\mu$ и $\mu \neq \eta$. Выберем подмножества $H \in \eta$, $M \in \mu$ так, чтобы $H \cap M = \varnothing$. Так как $\xi\eta \in \mu\overline{M}$, то найдется такое подмножество $H_1 \in \eta$, что $H_1 \subseteq H$ и $\xi\overline{H_1} \subseteq \xi\overline{M}$. Рассмотрим произвольный элемент $h \in H_1$. Тогда $\xi h \in \xi\overline{M}$ и $\xi \in \xi\overline{M}h^{-1}$. Поскольку $h \notin M$, то $e \notin \overline{M}h^{-1}$. Найдем такой ультрафильтр $\delta \in \overline{M}h^{-1}$, что $\xi = \xi\delta$. Так как $\delta \neq e$, получено противоречие с тем, что $S(\xi) = \{e\}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть ξ — левосократимый ультрафильтр, однако, для любого подмножества $Q \in \xi$ найдется такой элемент $g_Q \in G \setminus \{e\}$, что $Q \cap Q_{g_Q} \in \xi$. Тогда $Q \cap Q_{g_Q} \subseteq Q$, $(Q \cap Q_{g_Q})g_Q^{-1} \subseteq Q$. Так как $g \in G$, то $\overline{(Q \cap Q_{g_Q})}g_Q^{-1} \subseteq \subseteq \overline{Q}$. Значит, $\xi g_Q^{-1} \in \overline{Q}$. Переходя к пределу по ультрафильтру ξ, получаем $\xi\eta = \xi$ для некоторого ультрафильтра $\eta \in G^*$, что противоречит левой сократимости ультрафильтра ξ.

3) $\Rightarrow$ 1). Предположим, что условие 3) выполнено, однако, $\xi\eta = \xi$ для некоторого ультрафильтра $\eta \in G^*$. Поскольку $\xi\eta \in \overline{Q}$, то найдется такое подмножество $H \in \eta$, что $\xi\overline{H} \subseteq \overline{Q}$, $H \subseteq G \setminus \{e\}$. Выберем произвольный элемент $h \in H$. Тогда $Q \in \xi h$ и $Qh^{-1} \in \xi$. Значит, $Q \cap Qh^{-1} \in \xi$, что противоречит условию 3).

Используя полученную характеризацию, покажем, что для любой бесконечной группы G в подполугруппе G^* имеется плотное открытое подмножество левосократимых ультрафильтров. Для этого достаточно в любом счетном подмножестве $A \subseteq G$ найти такое бесконечное подмножество $Q \subseteq A$, что подмножество $Q \cap Q_g$ конечно для любого элемента $g \in G \setminus \{e\}$.

Рассмотрим подгруппу H, порожденную подмножеством A, и занумеруем элементы подмножества $H \setminus \{e\} = \{h_n \colon n \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что $H \cap Hg = \varnothing$ для всех $g \in G \setminus H$. Элементы подмножества $Q = \{g_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ будем выбирать индуктивно. В качестве g_1 возьмем произвольный элемент подмножества A. Предположим, что уже выбраны элементы $g_1, \ldots, g_n$ так, что

$$Q_n \cap Q_n\left(H_m \cup H_m^{-1}\right) \subseteq Q_m$$

для всех $n > m$, где $Q_n = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $H_m = \{h_1, \ldots, h_m\}$. Выберем произвольный элемент $g_{n+1} \in A \setminus (Q_n \cup Q_n\left(H_n \cup H_n^{-1}\right)$.

Зафиксируем произвольный элемент $h \in H \setminus \{e\}$ и найдем такой номер m, что $h = h_m$. Допустим, что $g_n \in Q \cap Qh_m$. Тогда $g_n = g_k h_m$ и $k \neq m$. По построению подмножества Q $n, k \leq m$. Значит, $Q \cap Qh \subseteq Q_m$.

***Доказательство теоремы* 4.** Ввиду теоремы 1 достаточно доказать, что ультрафильтр $m\xi$ левосократим для любого левосократимого ультрафильтра ξ и любого целого числа $m \neq 0$. Допустим противное и выберем такой идемпотент $\varepsilon \in \mathbb{Z}^*$, что $m\xi + \varepsilon = m\xi$. Так как $m\mathbb{Z} \in \varepsilon$, то найдется такой идемпотент μ, что $\varepsilon = m\mu$. Значит, $m(\xi + \mu) = m\xi$. Поскольку f_m — изоморфизм полугруппы $\beta\mathbb{Z}$ на полугруппу $\beta(m\mathbb{Z})$, то $\xi + \mu = \xi$, что противоречит левой сократимости ультрафильтра ξ.

***Доказательство теоремы* 5.** Убедимся в справедливости следующего более общего утверждения.

Если ε — *левомаксимальный идемпотент полугруппы* G^*, $\xi \in \beta G$ *и* $\xi\xi = \varepsilon$, $\xi\varepsilon = \varepsilon$, *то* $\xi = \varepsilon$.

По определению левого предпорядка, из условий $\varepsilon\eta = \varepsilon$, $\eta \in G^*$, $\eta\eta = \eta$ вытекает $\eta\varepsilon = \eta$. Следовательно, минимальный идеал $M(\varepsilon)$ полугруппы $S(\varepsilon)$ совпадает с множеством всех идемпотентов полугруппы $S(\varepsilon)$. Допустим, что $\xi \neq \varepsilon$. Тогда $\xi \neq \xi\xi$ и, значит, $\xi \notin M(\varepsilon)$. Если $S(\varepsilon) = \{e\}$, то ультрафильтр ξ левосократим и, следовательно, является элементом бесконечного порядка. Поэтому $S(\varepsilon) \neq e$ и $\xi\mu = \xi$ для некоторого идемпотента $\mu \in G^*$. Поскольку $\xi\mu = \xi$, то $\xi\xi\mu = \xi\xi$ и $\varepsilon\mu = \varepsilon$. Значит, $\mu \in S(\varepsilon)$. Но тогда $S(\varepsilon)\mu \subseteq M(\varepsilon)$. По условию $\xi\varepsilon = \varepsilon\xi = \varepsilon$. Значит, $\xi \in S(\varepsilon)$ и поэтому $\xi\mu \in M(\varepsilon)$. Так как $\xi\mu$ — идемпотент и $\xi\mu = \xi$, то ξ — идемпотент и $\xi = \varepsilon$, что противоречит предположению.

1. *Hindman N.* Ultrafilters and combinatorial number theory // Lect. Notes Math. – 1979. – **751.** – P. 49–184.
2. *Протасов И. В.* Точки совместной непрерывности полугруппы ультрафильтров абелевой группы // Мат. сб. – 1996. – **187,** №2. – С. 131–140.
3. *Bergelson V., Hindman N.* Nonmetrizable topological dynamics and Ramsey theory // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – **320,** № 1. – P. 293–320.
4. *Hindman N.* The ideal structure of the space of K-uniform ultrafilters on a discrete semigroup // Rocky Mounain J. Math. – 1986. – **16,** №4. – P. 685–701.
5. *Baker J., Hindman N., Pym J.* Elements of finite order in Stone-Čech compactifications // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1993. – **36,** № 1. – P. 49–54.
6. *Зеленюк Е. Г.* Конечные группы в βN тривиальны. – Киев, 1996. – 33 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики, 96.3).
7. *Ruppert W.* Compact semitopological semigroups: an intrinsic theory // Lect. Notes Math. – 1984. – **1079.** – P. 1–260.
8. *Зеленюк Е. Г., Протасов И. В.* Топология на абелевых группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54,** №5. – С. 1090–1107.
9. *Budak T., Isik N., Pym J.* Subsemigroups of Stone–Čech compactifications // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1994. – **116.** – P. 99–118.
10. *Протасов И. В.* Фильтры и топологии на полугруппах // Мат. студ. праці Львів. мат. тов-ва. – 1994. – Вип. 3. – С. 15–28.
11. *Strauss D.* N^*. Does not contain an algebraic and topological copy of βN // London Math. Soc. – 1992. – **46,** №3. – P. 463–470.

Получено 21.03.96