УДК 517.5

С. Г. Дронов, канд. физ.-мат. наук,
А. А. Лигун, д-р физ.-мат. наук (Днепродзержин. индустр. ин-т)

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ*

Duality relations for local periodic cubic and parabolic splines of minimal defect and certain their corollaries are obtained.

Одержані співвідношення двоїстості для локальних періодичних кубічних та параболічних сплайнів мінімального дефекту та деякі висновки з них.

Пусть L_p, $p \in [1, \infty)$, — пространство 2π-периодических суммируемых в p-й степени функций $x(t)$ с нормой

$$\| x \|_p = \left(\int_0^{2\pi} | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}$$

и L_∞ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных на $[0, 2\pi]$ функций $x(t)$ с нормой $\| x \|_\infty = \sup \mathrm{vrai} \{ | x(t) | \mid t \in [0, 2\pi] \}$. Через L_p^r, $p \in [1, \infty]$, $r = 1, 2, \ldots$, — обозначим множество 2π-периодических функций $x(t)$, у которых $(r-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на всей оси и $x^{(r)} \in L_p$, и положим

$$W_p^r = \{ x \mid x \in L_p^r ; \| x^{(r)} \|_p \le 1 \}.$$

Пусть $k = \pi n^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $B_{0,h}(t)$ 2π-периодическую функцию, равную $1/h$ для $|t| < h/2$ и 0 для $h/2 \le |t| \le \pi$, и для $r = 1, 2, \ldots$ положим

$$B_{r,h} = B_{0,h} * B_{r-1,h},$$

где, как обычно,

$$(f * \varphi)(t) = \int_0^{2\pi} f(u) \varphi(t-u) \, du.$$

Ясно, что

$$f * B_{r,h} = \frac{1}{h^r} \Delta_h^{r+1} f, \tag{1}$$

где $\Delta_h^k f = \Delta_h^1 (\Delta_h^{k-1} f)$ и $\Delta_h^1 f(t) = f(t + h/2) - f(t - h/2)$.

Функцию $B_{r,h}(t)$ называют B-сплайном порядка r с шагом h [1, с. 44]), нормированным условием

$$\int_0^{2\pi} B_{r,h}(t) \, dt = 1.$$

Положим $t_{i,r} = (i + (1 - (-1)^{r+1})/4) h)$, $i \in \mathbb{Z}$. Функция $s_r \in C^{r-1}$ называется периодическим сплайном порядка r минимального дефекта по равно-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

мерному разбиению, если она является алгебраическим многочленом степени не выше r на каждом из промежутков $(t_{i-1,r}; t_{i,r})$, $i \in \mathbb{Z}$.

Пусть для 2π-периодической дифференцируемой функции $x(t)$

$$x_i^{(\nu)} = x^{(\nu)}(ih), \quad x_{i+0,5}^{(\nu)} = x^{(\nu)}\left(ih + \frac{h}{2}\right), \quad i \in \mathbb{Z}; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad x^{(0)} = x,$$

и

$$x_i^* = \frac{1}{h} \int\limits_{(i-0,5)h}^{(i+0,5)h} x(t)\,dt, \quad i \in \mathbb{Z},$$

и для всех $i \in \mathbb{Z}$ и $\nu \in \mathbb{N}$

$$\Delta^0 x_i = x_i, \quad \Delta^2 x_i = x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1},$$

$$\Delta^{2\nu+2} x_i = \Delta^2(\Delta^{2\nu} x_i), \quad \Delta^{2\nu+1} x_i = \Delta^{2\nu}(x_{i+0,5} - x_{i-0,5}),$$

а для $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$a_{i,k} = \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{8}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i,$$

$$b_{i,k} = \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i,$$

$$c_{i,k} = \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i^*,$$

$$d_{i,0} = x_i^*, \qquad d_{i,1} = x_i^* - \frac{5}{24} \Delta^2 x_i^*.$$

Рассмотрим сплайны

$$s_{2,k}(t) = \sum_{i=1}^{2n} a_{i,k} B_{2,h}(t - ih), \tag{2}$$

$$s_{3,k}(t) = \sum_{i=1}^{2n} b_{i,k} B_{3,h}(t - ih), \tag{3}$$

$$s_{2,k}^*(t) = \sum_{i=1}^{2n} c_{i,k} B_{2,h}(t - ih), \tag{4}$$

$$s_{3,k}^*(t) = \sum_{i=1}^{2n} d_{i,k} B_{3,h}(t - ih), \quad k = 0, 1. \tag{5}$$

Локальные сплайны (2) – (5) рассматривались во многих работах (см., например, [2, 3]). Они очень удобны в вычислительной практике и широко применяются в различных задачах описания кривых с помощью сплайнов. Сплайны (2), (3) близки к интерполяционным периодическим сплайнам, а (4), (5) — к интерполяционным в среднем сплайнам (подробнее об этом см. [2, 3]). В частности, в этих работах доказано, что $s_2(x, t) = s_{2,\infty}(x, t)$ и $s_3(x, t) = s_{3,\infty}(x, t)$ являются интерполяционными сплайнами порядка 2 и 3 соответственно, а $s_{2,\infty}^*(x, t)$ — сплайн порядка два, интерполирующий функцию $x(t)$ в среднем на интервалах $((i - 0,5)h, (i + 0,5)h)$, $i \in \mathbb{Z}$.

В работе [4] доказано, что если $s_r(x,t)$ — сплайн порядка r, интерполирующий функцию $x(t)$ в точках ih, $i \in \mathbb{Z}$, то для любых функций x, $y \in L_1^{r+1}$ выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} [x(t) - s_r(x,t)]\, y^{(r+1)}(t)\,dt = (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} [y(t) - s_r(y,t)]\, x^{(r+1)}(t)\,dt. \tag{6}$$

В работе [5] получено обобщение этого равенства на широкий класс интерполяционных сплайнов. Эти равенства оказались полезными в вопросах, связанных с оценками уклонений сплайнов на различных классах функций. В данной работе мы приведем аналоги равенства (6) для сплайнов (2) – (5) и получим некоторые следствия из них. При этом мы будем следовать схеме рассуждений работы [5].

Теорема. *Пусть* $r = 2, 3$ *и* $x, y \in L_1^{r+1}$. *Тогда для* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_0^{2\pi} [x(t) - s_{r,k}(x,t)]\, y^{(r+1)}(t)\,dt = (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} [y(t) - s_{r,k}(y,t)]\, x^{(r+1)}(t)\,dt, \tag{7}$$

и при $r = 2$, $k = 0, 1, \ldots$, *и* $r = 3$, $k = 0, 1$

$$\int_0^{2\pi} [x(t) - s^*_{r,k}(x,t)]\, y^{(r+1)}(t)\,dt = (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} [y(t) - s^*_{r,k}(y,t)]\, x^{(r+1)}(t)\,dt. \tag{8}$$

Пусть V^r — множество всех 2π-периодических функций $x(t)$, у которых $(r-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на всей оси, а r-я производная имеет ограниченную вариацию на периоде. С помощью предельного перехода из теоремы непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Пусть* $r = 2, 3$. *Тогда для любых функций* $x, y \in V^r$ *выполняется равенство*

$$\int_0^{2\pi} [x(t) - s_{r,k}(x,t)]\, d(y^{(r)}(t)) = (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} [y(t) - s_{r,k}(y,t)]\, d(x^{(r)}(t)) \tag{9}$$

для $k = 0, 1, \ldots$ *и*

$$\int_0^{2\pi} [x(t) - s^*_{r,k}(x,t)]\, d(y^{(r)}(t)) = (-1)^{r+1} \int_0^{2\pi} [y(t) - s^*_{r,k}(y,t)]\, d(x^{(r)}(t)) \tag{10}$$

для $k = 0, 1, \ldots$ *при* $r = 2$, *и* $k = 0, 1$ *при* $r = 3$.

Интегрируя по частям (7) и (8), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\int_0^{2\pi} [x^{(m)}(t) - s^{(m)}_{r,k}(x,t)]\, d(y^{(r-m)}(t)) =$$

$$= (-1)^{r-m+1} \int_0^{2\pi} [y^{(m)}(t) - s^{(m)}_{r,k}(y,t)]\, d(x^{(r-m)}(t)) \tag{11}$$

для $m = 1, 2, \ldots, r$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$, и

$$\int_0^{2\pi} [x^{(m)}(t) - (s^*_{r,k}(x,t))^{(m)}]\, d(y^{(r-m))}(t)) =$$

$$= (-1)^{r-m+1} \int_0^{2\pi} [y(t) - (s^*_{r,k}(y,t))^{(m)}]\, d(x^{(r-m)}(t)) \qquad (12)$$

для $m = 1, 2, \ldots, r$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$ при $r = 2$, и $k = 0, 1$ при $r = 3$.

Доказательство *теоремы.* Обозначим левую часть равенства (7) при $r = 3$ через A. Тогда

$$A = \int_0^{2\pi} x(t) y^{(4)}(t)\, dt - \int_0^{2\pi} s_{3,k}(x,t) y^{(4)}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} x(t) y^{(4)}(t)\, dt -$$

$$- \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} x_i \int_0^{2\pi} B_{3,h}(t-ih) y^{(4)}(t)\, dt = B - C. \qquad (13)$$

Ввиду периодичности $x(t)$ и $y(t)$ с помощью интегрирования по частям получим

$$B = \int_0^{2\pi} x(t) y^{(4)}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} x^{(4)}(t) y(t)\, dt. \qquad (14)$$

Кроме того, из равенства (1) имеем

$$\int_0^{2\pi} B_{3,h}(t-ih) y^{(4)}(t)\, dt = (B_{3,h} * y^{(4)})_i = \frac{1}{h^4} \Delta^4 y_i.$$

Следовательно,

$$C = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{h^4} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \sum_{i=1}^{2n} \Delta^{2\nu} x_i \Delta^4 y_i. \qquad (15)$$

Нетрудно установить, что для любых чисел a_i и b_i, $i \in \mathbb{Z}$, таких, что $a_{i+2n} = a_i$ и $b_{i+2n} = b_i$, $i \in \mathbb{Z}$, выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i \Delta^2 b_i = \sum_{i=1}^{2n} \Delta^2 a_i b_i. \qquad (16)$$

Отсюда и из (15) получаем

$$C = \frac{1}{h^4} \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \sum_{i=1}^{2n} \Delta^{2\nu} y_i \Delta^4 x_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} y_i \int_0^{2\pi} B_{3,h}(t-ih) x^{(4)}(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$A = \int_0^{2\pi} x^{(4)}(t) y(t)\, dt - \int_0^{2\pi} x^{(4)}(t) s_{3,k}(y,t)\, dt,$$

что и завершает доказательство равенства (7) при $r = 3$. При $r = 2$ оно доказывается аналогично.

Ввиду того, что для любых функций $x, y \in L_1^3$

$$\int_0^{2\pi} x(t)\, y'''(t)\, dt = -\int_0^{2\pi} x'''(t) y(t)\, dt,$$

для доказательства (8) при $r = 2$ достаточно показать, что

$$\int_0^{2\pi} s_{2,k}^*(x, t)\, y'''(t)\, dt = -\int_0^{2\pi} s_{2,k}^*(y, t) x'''(t)\, dt. \tag{17}$$

Обозначим левую часть этого равенства через E, а правую — через F.

Пусть

$$\bar{x}(t) = x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u)\, du,$$

$$\bar{y}(t) = y(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(u)\, du$$

и $X(t)$, $Y(t)$ — периодические интегралы от функций $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ соответственно. Тогда

$$E = \int_0^{2\pi} s_{2,k}^*(x, t)\, y'''(t)\, dt = \int_0^{2\pi} s_{2,k}^*(\bar{x}, t)\, Y^{(4)}(t)\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{2n} \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} \bar{x}_i^* \int_0^{2\pi} B_{2,h}(t - ih) Y^{(4)}(t)\, dt.$$

Кроме того,

$$\Delta^{2\nu} \bar{x}_i^* = \frac{1}{h} \Delta^{2\nu} (X_{i+0,5} - X_{i-0,5}) = \frac{1}{h} \Delta^{2\nu+1} X_i$$

и в силу (1)

$$\int_0^{2\pi} B_{2,h}(t - ih) Y^{(4)}(t)\, dt = \frac{1}{h^3} \Delta^3 Y_i'.$$

Поэтому

$$E = \frac{1}{h^4} \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \sum_{i=1}^{2n} \Delta^{2\nu+1} X_i \Delta^3 Y_i'.$$

Аналогично получаем

$$F = \frac{1}{h^4} \sum_{\nu=0}^{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \sum_{i=1}^{2n} \Delta^3 X_i' \Delta^{2\nu+1} Y_i.$$

В силу равенства (16)

$$\sum_{i=1}^{2n} \Delta^{2\nu+1} Y_i \Delta^3 X_i' = \sum_{i=1}^{2n} \Delta^3 Y_i \Delta^{2\nu+1} X_i',$$

и для завершения доказательства равенства (17) (а следовательно, и равенства

(8) при $r = 2$) остается заметить, что для любых функций $\varphi, \psi \in L_1^1$ и натуральных чисел m и l

$$\sum_{i=1}^{2n} \Delta^m \varphi_i' \Delta^l \psi_i = \sum_{i=1}^{2n} \Delta^m \varphi_i \Delta^l \psi_i'.$$

Для $r = 3$ равенства (8) устанавливаются аналогично.

Приведем еще одно следствие из теоремы.

Пусть

$$a_{m,n,r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_r(x,t) \cos mt\, dt, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_{m,n,r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} s_r(x,t) \sin mt\, dt, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

— коэффициенты Фурье интерполяционного сплайна $s_r(x,t)$.

Следствие 2. *Для любой функции x, конечной в точках ih, $i \in \mathbb{Z}$, и любых натуральных m и n справедливы равенства*

$$a_{m,n,2}(x) = \psi\left(\frac{mh}{2}\right) a^*_{m,n}(x), \tag{18}$$

$$b_{m,n,2}(x) = \psi\left(\frac{mh}{2}\right) b^*_{m,n}(x), \tag{19}$$

и

$$a_{m,n,3}(x) = \varphi\left(\frac{mh}{2}\right) a^*_{m,n}(x), \tag{20}$$

$$b_{m,n,3}(x) = \varphi\left(\frac{mh}{2}\right) b^*_{m,n}(x), \tag{21}$$

где

$$\varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 \frac{3}{2 + \cos 2t},$$

$$\psi(x) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \frac{4}{3 + \cos 2t},$$

и

$$a^*_{m,n} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{2n} x_i \cos imh, \tag{22}$$

$$b^*_{m,n} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{2n} x_i \sin imh. \tag{23}$$

Доказательство. Из равенства (6) при $r = 3$ следует, что для $x, y \in L_1^4$ выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} s_3(x,t) y^{(4)}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} s_3(y,t) x^{(4)}(t)\, dt.$$

Полагая в этом равенстве $y(t) = m^{-4} \cos mt$, получаем

$$a_{m,n,3}(x) = \frac{1}{\pi m^4} \int_0^{2\pi} s_3(\cos m(\cdot), t) x^{(4)}(t)\, dt.$$

Кроме того,

$$s_3(y,t) = s_{3,\infty}(y,t) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i B_{3,h}(t-ih),$$

где

$$\alpha_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^{\nu} \Delta^{2\nu} y_i.$$

Если $y(t) = \cos mt$, то

$$\Delta^{2\nu} y_i = [-2(1-\cos mh)]^{\nu} \cos imh. \tag{24}$$

Поэтому при $y(t) = \cos mt$

$$\alpha_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos imh \left(\frac{1-\cos mh}{3}\right)^{\nu} = \cos imh \,\frac{3}{2+\cos mh}.$$

В силу (1)

$$\int_0^{2\pi} x^{(4)}(t) B_{3,h}(t-ih)\, dt = \frac{1}{h^3} \Delta^4 x_i.$$

Следовательно,

$$a_{m,n,3}(x) = \frac{3}{\pi h^3 m^4 (2+\cos mh)} \sum_{i=1}^{2n} \Delta^4 x_i \cos imh.$$

Отсюда и из (16) с учетом (24) получаем

$$a_{m,n,3}(x) = \frac{3}{\pi h^3 m^4 (2+\cos mh)} \sum_{i=1}^{2n} x_i \Delta^4(\cos imh) =$$

$$= \frac{3(2(1-\cos mh))^2}{\pi h^3 m^4 (2+\cos mh)} \sum_{i=1}^{2n} x_i \cos imh = \varphi\left(\frac{mh}{2}\right) a^*_{m,n}(x).$$

Для функций $x \in L_1^4$ равенство (20) доказано. Общий случай получается предельным переходом.

Равенства (18) – (19) и (21) устанавливаются аналогично.

***Замечание* 1.** Подобным путем из (7) и (8) можно вывести соотношения, аналогичные равенствам для сплайнов $s_{r,k}(x,t)$ и $s^*_{r,k}(x,t)$, при этом изменяются лишь функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Так, для сплайнов $s_{2,1}(x,t)$

$$\psi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^3 \frac{5-\cos 2t}{4},$$

а для сплайнов $s_{3,1}(x,t)$ —

$$\varphi(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 \frac{4-\cos 2t}{3}.$$

Пусть

$$E(y)_p = \inf\{\|y-\lambda\|_p \,|\, \lambda\} \;\; \text{и} \;\; p': \; \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Положим

$$W_p^{r,*} = \{x(t) \,|\, x \in L_p^r, \; E(x)_p \le 1\}.$$

Из равенств (7) и соотношения двойственности

$$\sup\left\{ \int_0^{2\pi} x(t)\,y(t)\,dt \;\middle|\; y \in L_p, \; \|y\|_p \le 1, \; y \perp 1 \right\} = E(x)_{p'}$$

следует

$$\sup\{E(x - s_{r,k}(x,\cdot))_p \,|\, x \in W_q^{r+1}\} = \sup\{E(y - s_{r,k}(y,\cdot))_{q'} \,|\, y \in W_{p'}^{r+1}\}. \tag{25}$$

В работе [1, с. 322] доказано, что

$$\sup\{\|x - s_{3,1}(x,\cdot)\|_\infty \,|\, x \in W_\infty^4\} = \frac{35}{1152} h^4. \tag{26}$$

Отсюда следует

$$\sup\{E(x - s_{3,1}(x,\cdot)_\infty \,|\, x \in W_\infty^4\} \le \frac{35}{1152} h^4.$$

Из равенства (25) при $p = q = 1$ получаем

$$\sup\{E(x - s_{3,1}(x,\cdot))_1 \,|\, x \in W_1^4\} \le \frac{35}{1152} h^4.$$

Аналогично, из равенства (8) и того факта, что для любой интегрируемой функции $x(t)$ выполняется условие $s_{r,k}^*(x,t) \perp 1$, и из соотношения двойственности

$$\sup\left\{ \int_0^{2\pi} x(t)\,y(t)\,dt \;\middle|\; y \in L_p, \; E(y)_p \le 1 \right\} = \left\| x - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\,dt \right\|_{p'}$$

следует, что для всех r и k, при которых верно равенство (8), справедливо соотношение

$$\sup\{\|x - s_{r,k}^*(x,\cdot)\|_p \,|\, x \in W_q^{r+1,*}\} =$$

$$= \sup\{\|y - s_{r,k}^*(y,\cdot)\|_{q'} \,|\, y \in W_{p'}^{r+1,*}\}.$$

1. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Лигун А. А.* О приближении дифференцируемых периодических функций локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 691 – 693.
3. *Кармазина В. В., Лигун А. А., Приставка А. Ф.* Восстановление функций плотности распределения и их производных с помощью кубических гистосплайнов. – Днепродзержинск, 1989. – 38 с. – Деп. в УкрНИИНТИ, № 2561-Ук 89.
4. *Лигун А. А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 507 – 514.
5. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А.* Об оценке погрешности сплайн-интерполяции в интегральной метрике // Там же. – 1981. – **33**, № 3. – С. 391 – 394.

Получено 04.12.92