УДК 517.919

М. М. Іванюк, канд. фіз.-мат. наук (Технол. ун-т „Поділля")

ІНТЕГРУВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ КОНТУРНОГО ІНТЕГРАЛА

For a system of q linear differential equations of n-th order with polynomial matrix coefficients, a fundamental family of formal solutions defined in a certain sector of a complex plane is constructed by using the Laplace contour integral. For large positive values of an independent variable, asymptotic representations of these solutions are obtained.

Для систем q лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з поліноміальними матрицями-коефіцієнтами за допомогою контурного інтеграла Лапласа будується фундаментальна сім'я формальних розв'язків, визначених в деякому секторі комплексної площини. Виведені асимптотичні зображення вказаних розв'язків для великих додатних значень незалежної змінної.

1. Побудова розв'язків за допомогою інтеграла Лапласа. Предметом дослідження цієї статті є лінійна однорідна система диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами [1], яка у векторій формі має вигляд

$$\mathcal{L}[w] \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} A_{js} z^s \frac{d^{n-j} w}{dz^{n-j}} = 0, \tag{1}$$

де

$$A_{js} = (a_{js_{ki}}),\ k, i = \overline{1, q}; \quad w = \operatorname{colon}(w_1, \ldots, w_q), \ \det A_{0m} \neq 0.$$

Розв'язки цієї системи, яку надалі будемо називати векторним рівнянням або просто рівнянням, будуватимемо за допомогою інтеграла Лапласа

$$w(z) = \int_l v(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta, \tag{2}$$

де $v(\zeta)$ — невідома вектор-функція ζ, l — деякий шлях інтегрування, що не залежить від z.

Як правило [2, 3], розв'язки вигляду (2) будуються формально, після чого проводиться обгрунтування правомірності виконання операцій, якщо в цьому виникає необхідність.

Отже, будемо шукати розв'язки рівняння (1), що зображаються в формі (2). Маємо

$$\mathcal{L}[w] \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} A_{js} z^s \frac{d^{n-j}}{dz^{n-j}} \left\{ \int_l v(\zeta) e^{z\zeta} d\zeta \right\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} A_{js} z^s \int_l v(\zeta) \zeta^{n-j} e^{z\zeta} d\zeta. \tag{3}$$

Використовуючи метод інтегрування частинами, знаходимо

$$z^s \int_l v(\zeta) \zeta^{n-j} e^{z\zeta} d\zeta = \left[e^{z\zeta} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} z^{s-k} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} \left(v(\zeta) \zeta^{n-j} \right) \right]_l +$$

$$+ (-1)^s \int_l e^{z\zeta} \frac{d^s}{d\zeta^s} \left(v(\zeta) \zeta^{n-j} \right) d\zeta, \tag{4}$$

де

$$\sum_{k=1}^{0} (-1)^{k-1} z^{-k} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} (v(\zeta)\zeta^{n-j}) = 0.$$

З урахуванням цього вираз (3) набуває вигляду

$$\mathcal{L}[w] \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} A_{js} \left[e^{z\zeta} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} z^{s-k} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} \left(v(\zeta)\zeta^{n-j} \right) \right]_l +$$

$$+ \int_l e^{z\zeta} \left[\sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s A_{js} \frac{d^s}{d\zeta^s} \left(v(\zeta)\zeta^{n-j} \right) \right] d\zeta. \tag{5}$$

Інтеграл (2) задовольняє рівняння (1), якщо

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (-1)^s A_{js} \frac{d^s}{d\zeta^s} (v(\zeta)\zeta^{n-j}) = 0, \tag{6}$$

$$\left[e^{z\zeta} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} z^{s-k} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} \left(v(\zeta)\zeta^{n-j} \right) \right]_l = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Зауваживши, що

$$\frac{d^s}{d\zeta^s} (v(\zeta)\zeta^{n-j}) = \frac{d^s v}{d\zeta^s} \zeta^{n-j} + s(n-j) \frac{d^{s-1} v}{d\zeta^{s-1}} \zeta^{n-j-1} + \ldots$$

$$\ldots + \prod_{k=0}^{s-1} (n-j-k) v(\zeta) \zeta^{n-j-s},$$

перепишемо рівність (6) таким чином:

$$\sum_{s=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} (-1)^s A_{js} \left(\frac{d^s v}{d\zeta^s} \zeta^{n-j} + s(n-j) \frac{d^{s-1} v}{d\zeta^{s-1}} \zeta^{n-j-1} + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \prod_{k=0}^{s-1} (n-j-k) v(\zeta) \zeta^{n-j-s} \right) = 0. \tag{8}$$

Виконуючи в лівій частині групування і упорядковуючи доданки, записуємо рівняння для визначення невідомої вектор-функції $v(\zeta)$:

$$\sum_{k=0}^{n} A_{km} \zeta^{n-k} \frac{d^m v}{d\zeta^m} + \sum_{j=1}^{m} A_{m-j}(\zeta) \frac{d^{m-j} v}{d\zeta^{m-j}} = 0, \tag{9}$$

де матриці $A_{m-j}(\zeta)$ позначають поліноми степеня не вище n.

Побудуємо рівняння

$$\det \left(\sum_{k=0}^{n} A_{km} \zeta^{n-k} \right) = 0 \tag{10}$$

і перепишемо (9) у вигляді

$$\det \left(\sum_{k=0}^{n} A_{km} \zeta^{n-k} \right) I \frac{d^m v}{d\zeta^m} + \left(\sum_{k=0}^{n} A_{km} \zeta^{n-k} \right)^s \sum_{j=1}^{m} A_{m-j}(\zeta) \frac{d^{m-j} v}{d\zeta^{m-j}} = 0, \tag{11}$$

в якому I позначає одиничну матрицю розмірності $q \times q$, $\left(\sum_{k=0}^{n} A_{km} \zeta^{n-k}\right)^{s}$ позначає союзну матрицю по відношенню до $\sum_{k=0}^{n} A_{km} \zeta^{n-k}$. Нехай рівняння (10) має різні корені $\alpha_\mu, \mu = \overline{1, nq}$. Будемо говорити, що векторне рівняння (11) має регулярні особливі точки $\zeta = \alpha_\mu, \mu = \overline{1, nq}$. Легко помітити, що для кожної з цих точок характеристичне рівняння має корені $0, 1, 2, \ldots, m-2$ однакової кратності q. Припустимо, що серед q наступних коренів характеристичного рівняння, що відповідає точці α_μ, в наявності є відмінні від цілих додатних. Зафіксуємо один із них. Позначимо його через $p_\mu - 1$. Поставимо у відповідність кожній з особливих точок $\alpha_\mu, \mu = \overline{1, nq}$, розв'язок рівняння (9) вигляду

$$\hat{v}_\mu(\zeta) = (\zeta - \alpha_\mu)^{p_\mu - 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu k}(\zeta - \alpha_\mu)^k, \tag{12}$$

в якому ряд

$$\hat{\varphi}_\mu(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{\mu k}(\zeta - \alpha_\mu)^k \tag{13}$$

збігається в крузі $D_\mu = \{\zeta \,|\, |\zeta - \alpha_\mu| < R_\mu\}$. Припустимо, що $\hat{\varphi}_\mu(\zeta), \mu = \overline{1, nq}$, допускає аналітичне продовження вздовж променя $L_\mu, \mu = \overline{1, nq}$, який виходить із точки α_μ паралельно до дійсної осі площини ζ у від'ємному напрямку. Перебудовуючи ряд (13), продовжимо аналітично вздовж променя L_μ функцію $\hat{\varphi}_\mu(\zeta)$. Цим самим визначимо аналітичну функцію $\varphi_\mu(\zeta)$ — аналітичне продовження функції $\hat{\varphi}_\mu(\zeta)$ з області D_μ в область G_μ — об'єднання кругів, що послідовно перетинаються один з одним. Завдяки цьому аналітичному продовженню аналітично продовжується з області $D_\mu \setminus \alpha_\mu$ в область $G_\mu \setminus \alpha_\mu$ і розв'язок $\hat{v}_\mu(\zeta)$, що визначається формулою (12). Позначимо це аналітичне продовження через $v_\mu(\zeta)$. Таким чином,

$$v_\mu(\zeta) = (\zeta - \alpha_\mu)^{p_\mu - 1} \varphi_\mu(\zeta). \tag{14}$$

Згідно з принципом перманентності ця аналітична в області $G_\mu \setminus \alpha_\mu$ вектор-функція буде задовольняти векторне рівняння (9).

Якщо в формулі (2) $v(\zeta)$ замінити вектор-функцією $v_\mu(\zeta)$ і за l взяти контур l_μ, для якого

$$\left[e^{z\zeta} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} z^{s-k} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} \left(v(\zeta)\zeta^{n-j}\right) \right]_{l_\mu} = 0, \tag{15}$$

$$s = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

то векторному рівнянню (1) можна поставити у відповідність сукупність розв'язків вигляду

$$w_\mu(\zeta) = \int_{l_\mu} (\zeta - \alpha_\mu)^{p_\mu - 1} e^{z\xi} \varphi_\mu(\zeta)\, d\zeta, \quad \mu = \overline{1, nq}. \tag{16}$$

Оскільки підінтегральні функції, що фігурують у формулах (16), мають, взагалі кажучи, точки розгалуження відповідно $\zeta = \alpha_1, \zeta = \alpha_2, \ldots, \zeta = \alpha_{n_q}$, то, щоб зробити їх однозначними, проведемо розрізи вздовж променів L_μ, $\mu = \overline{1, nq}$. Кожному з цих розрізів поставимо у відповідність контур l_μ, що виходить з ∞, йде вздовж нижнього берега L_μ, обходить коло $|\zeta - \alpha_\mu| = r_\mu < R_\mu$ за додатним напрямком і знову повертається в ∞ вздовж верхнього берега розрізу L_μ.

Переконаємось у тому, що вибраний таким чином контур l_μ задовольняє умову (15).

Будемо вважати надалі, що число $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ з умовою $\operatorname{Re} z > 0$ фіксоване. Нехай ζ змінюється вздовж верхнього берега розрізу L_μ. Очевидно, $\zeta = \operatorname{Re}\zeta + i \operatorname{Im}\alpha_\mu$. Знайдемо добуток

$$z\zeta = (\operatorname{Re} z \operatorname{Re}\zeta - \operatorname{Im} z \operatorname{Im}\alpha_\mu) + (\operatorname{Im} z \operatorname{Re}\zeta + \operatorname{Re} z \operatorname{Im}\alpha_\mu)\, i.$$

Звідси випливає, що при значному віддаленні вліво вздовж верхнього берега розрізу L_μ дійсна частина $\operatorname{Re}(z\zeta) \to -\infty$. І тому функція $|\exp(z\zeta)| \to 0$ при $\zeta \to \infty$ вздовж верхнього берега розрізу L_μ.

Дослідимо тепер поведінку вектор-функцій

$$\sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} z^{s-k} \frac{d^{k-1}}{d\zeta^{k-1}} (v_\mu(\zeta)\zeta^{n-j}), \quad s = 1, 2, \ldots, m, \ j = 0, 1, \ldots, n, \tag{17}$$

при $\zeta \to \infty$ вздовж верхнього берега розрізу L_μ. Як випливає з наведених вище міркувань, для аналітичної в області $G_\mu \backslash \alpha_\mu$ вектор-функції $v_\mu(\zeta)$ справедливий розклад

$$v_\mu(\zeta) = (\zeta - \alpha_\mu)^{p_\mu - 1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu k}(\zeta - \alpha_\mu)^k \tag{18}$$

в крузі $D_\mu \backslash \alpha_\mu = \{\zeta \,|\, |\zeta - \alpha_\mu| < R_\mu, \zeta \neq \alpha_\mu\}$. Якщо $|\zeta - \alpha_\mu| \geq R_\mu$, то формулою (18) користуватись не можна, і в цьому випадку ми будемо просто писати

$$v_\mu(\zeta) = (\zeta - \alpha_\mu)^{p_\mu - 1} \left(\sum_{k=0}^{\eta} a_{\mu k} (\zeta - \alpha_\mu)^k + R_{\eta+1}^{(\mu)}(\zeta) \right), \tag{19}$$

де залишок $R_{\eta+1}^{(\mu)}(\zeta)$ визначатимемо рівністю

$$R_{\eta+1}^{(\mu)}(\zeta) = \varphi_\mu(\zeta) - \sum_{k=0}^{\eta} a_{\mu k}(\zeta - \alpha_\mu)^k, \tag{20}$$

в якій аналітична вектор-фукнція $\varphi_\mu(\zeta)$ зображається послідовністю її елементів-рядів, кожний наступний з яких одержується з попереднього шляхом його перебудови на основі формули бінома Ньютона.

Якщо ζ змінюється в крузі $D_\mu = \{\zeta \,|\, |\zeta - \alpha_\mu| < R_\mu\}$, то, очевидно, для залишку $R_{\eta+1}^{(\mu)}(\zeta)$ справедлива оцінка

$$\| R_{\eta+1}^{(\mu)}(\zeta) \| < \left| \frac{\zeta - \alpha_\mu}{R_\mu} \right|^{\eta+1} \frac{M_\mu}{1-\theta}, \quad \theta = \frac{r_\mu}{R_\mu}, \ r_\mu < R_\mu. \tag{21}$$

Якщо ж ζ змінюється поза названим кругом, то $R_{\eta+1}^{(\mu)}(\zeta)$ оцінюємо таким чином:

$$\| R^{(\mu)}_{\eta+1}(\zeta) \| < \bigvee_{\sigma=1}^{\infty} \left\{ \| P^{(\sigma)}_{\mu\eta}(\zeta) \| + \left| \frac{\zeta - \alpha^{(\sigma)}_{\mu}}{R^{(\sigma)}_{\mu}} \right|^{\eta+1} \frac{M^{(\sigma)}_{\mu}}{1-\theta} \right\}, \quad \theta = \frac{r_\mu}{R_\mu} = \frac{r^{(\sigma)}_{\mu}}{R^{(\sigma)}_{\mu}}, \quad (22)$$

де $\vee$ — диз'юнкція, $P^{(\sigma)}_{\mu\eta}(\zeta)$ — різниця між η-тою частинною сумою елемента з номером σ аналітичної в G_μ вектор-функції $\varphi_\mu(\zeta)$ і η-тою частинною сумою її вихідного елемента, $\alpha^{(\sigma)}_{\mu}$ і $R^{(\sigma)}_{\mu}$ — відповідно центр і радіус круга збіжності елемента з номером σ.

З урахуванням наведеного вище ми можемо стверджувати, що вектор-функції із (17) можуть зростати при $\zeta \to \infty$ вздовж верхнього берега розрізу L_μ, однак не швидше, ніж $|\zeta|^N$, де $N > 0$ — як завгодно велике фіксоване число, що залежить від p_μ і вибору η. Згадуючи, що показникова функція зростає швидше будь-якої степеневої, маємо $|\zeta|^N / |\exp(z\zeta)| \to 0$ при $\zeta \to \infty$ вздовж верхнього берега розрізу L_μ. Очевидно, що останні викладки справедливі, якщо спрямуємо ζ до ∞ вздовж нижнього берега розрізу L_μ. Цим самим доведено, що на кінцях контура l_μ вирази з (15) дорівнюють нуль-вектору. Отже, контур l_μ задовольнятиме умову (15).

Таким чином, формулами (16) зображається сім'я з nq розв'язків системи (1), визначених для всіх z, що знаходяться в секторі

$$S = \left\{ z \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg z < \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right\}, \quad (23)$$

де ε — довільне фіксоване додатне число.

Приклад. В результаті заміни (2) від системи

$$z w' = \begin{Vmatrix} 1+3z & -2z \\ 4z & 1-3z \end{Vmatrix} w = 0$$

ми перейдемо до системи

$$\begin{Vmatrix} \zeta-3 & 2 \\ -4 & \zeta+3 \end{Vmatrix} v' + \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} v = 0,$$

що має особливі точки $\zeta_1 = 1$ і $\zeta_2 = -1$. Характеристичне рівняння як у випадку першої, так і у випадку другої особливої точки має корінь $\rho = -2$. Першій із них відповідає розв'язок

$$v_1 = (\zeta-1)^{-2} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

а другій — розв'язок

$$v_2 = (\zeta+1)^{-2} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

На основі теорії лишків за формулами (16) знаходимо

$$w_1(z) = \int_{l_1} e^{z\xi} (\zeta-1)^{-2} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} d\zeta = 2\pi i z e^{z} \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix},$$

$$w_2(z) = \int_{l_2} e^{z\xi} (\zeta+1)^{-2} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} d\zeta = 2\pi i z e^{-z} \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Цей приклад наводить на думку про те, що формулами (16) фактично зображається фундаментальна сім'я розв'язків системи (1) в області S.

Одержавши інтегральне зображення розв'язків системи (1), справедливих в S, ми зробили лише перший крок на шляху з'ясування їх властивостей в S. Природно виникає задача про вивчення інтегралів (16) на всьому секторі і особливо при значеннях $z \to \infty$ вздовж променя $\arg z = 0$. Як випливає з наведеного вище прикладу, ці задачі в деяких випадках можуть бути розв'язані шляхом безпосереднього обчислення інтегралів вигляду (16). В загальній же постановці вказані задачі і, зокрема, остання з них розв'язуються шляхом побудови асимптотичних рядів, що відповідають $w_\mu(z)$.

2. Асимптотичне зображення розв'язків. Наша мета — одержати асимптотичний розклад $w_\mu(z)$ для $z \to \infty$ вздовж променя $\arg z = 0$ в припущенні, що числа $p_\mu, \mu = \overline{1, nq}$, не являються цілими. Як і раніше, всі міркування побудуємо на фіксованому довільним чином інтегралі $w_\mu(z)$ із (16).

Введемо замість ζ нову змінну інтегрування t за формулою $t = \zeta - \alpha_\mu$. При цій заміні розріз L_μ площини ζ переходить у розріз L_μ^* площини t вздовж від'ємної дійсної півосі, контур l_μ відображається на контур l_μ^*, що виходить з $-\infty$, йде вздовж нижнього берега розрізу L_μ^*, обходить коло $|t| = r_\mu < R_\mu$ за додатним напрямком і знову повертається в $-\infty$. Інтеграл $w_\mu(z)$ із (16) набуває вигляду

$$w_\mu(z) = \int_{l_\mu^*} t^{p_\mu - 1} \varphi_\mu(t) e^{z(t+\alpha_\mu)} dt. \tag{24}$$

Користуючись формулою (19), записуємо інтеграл (24) у вигляді

$$w_\mu(z) = e^{\alpha_\mu z} \sum_{k=0}^{\eta} a_{\mu k} \int_{l_\mu^*} e^{zt} t^{p_\mu + k - 1} dt + e^{\alpha_\mu z} \int_{l_\mu^*} e^{zt} t^{p_\mu - 1} R_{\eta+1}^{(\mu)}(t) dt. \tag{25}$$

Введемо замість t нову змінну інтегрування τ за формулою $zt = -\tau = e^{-\pi i}\tau$ і позначимо образ контура l_μ^* через l_μ^{**}. Тоді інтеграл під знаком суми правої частини (25) набуває вигляду

$$\int_{l_\mu^*} e^{zt} t^{p_\mu + k - 1} dt = e^{-\pi p_\mu i} (-1)^k z^{-p_\mu - k} \int_{l_\mu^{**}} e^{-\tau} \tau^{p_\mu + k - 1} d\tau. \tag{26}$$

Оскільки $zt = -\tau = e^{-\pi i}\tau$, де $\operatorname{Re} z > 0, \arg z = 0$, то $\tau = zt e^{\pi i}$ і $|\tau| = |z| r_\mu$. Тобто при вказаній заміні розріз L_μ^* площини t переходить у розріз L_μ^{**} площини τ вздовж додатної дійсної півосі, коло $|\tau| = r_\mu$ відображається на коло $|\tau| = |z| r_\mu$, нижній берег розрізу L_μ^* площини t, де $\arg t = -\pi$, переходить на верхній берег розрізу L_μ^{**} площини τ, верхній берег розрізу L_μ^*, де $\arg t = \pi$, переходить на нижній берег розрізу L_μ^{**}. Очевидно, на верхньому березі розрізу L_μ^{**} слід вважати $\arg \tau = 0$, а на нижньому — $\arg \tau = 2\pi$.

Виразимо інтеграл (26) через Γ-функцію:

$$\int_{l_\mu^*} e^{zt} t^{p_\mu + k - 1} dt = e^{-\pi p_\mu i} (-1)^k z^{-p_\mu - k} \left(e^{(p_\mu + k) 2\pi i} - 1\right) \Gamma(p_\mu + k).$$

Тоді формула (25) набуває вигляду

$$w_\mu(z) = e^{\alpha_\mu z} z^{-p_\mu}(e^{2\pi p_\mu i}-1)e^{-\pi p_\mu i}\sum_{k=0}^{\eta}(-1)^k a_{\mu k}\Gamma(p_\mu+k)z^{-k} +$$

$$+ e^{\alpha_\mu z}\int_{l_\mu^*} e^{zt}t^{p_\mu-1}R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\,dt, \tag{27}$$

яку перепишемо таким чином:

$$e^{-\alpha_\mu z}z^{p_\mu}w_\mu(z) = (e^{\pi p_\mu i}-e^{-\pi p_\mu i})\sum_{k=0}^{\eta}(-1)^k a_{\mu k}\Gamma(p_\mu+k)z^{-k} +$$

$$+ z^{p_\mu}\int_{l_\mu^*} e^{zt}t^{p_\mu-1}R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\,dt. \tag{28}$$

Покажемо, що ряд

$$(e^{\pi p_\mu i}-e^{-\pi p_\mu i})\sum_{k=0}^{\eta}(-1)^k a_{\mu k}\Gamma(p_\mu+k)z^{-k} \tag{29}$$

являється асимптотичним зображенням вектор-функції $\exp(-\alpha_\mu z + p_\mu \ln z)\times$ $\times\, w_\mu(z)$ на промені $\arg z = 0$. Щоб переконатись у цьому, покажемо, що добуток z^η на залишковий член формули (28) прямує до нуль-вектора при $z\to\infty$ вздовж променя $\arg z = 0$, тобто

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\ \arg z = 0}}\left\{z^{\eta+p_\mu}\int_{l_\mu^*} e^{zt}t^{p_\mu-1}R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\,dt\right\} = 0. \tag{30}$$

Нагадаємо, що шлях інтегрування скаладається з променя $(-\infty, -r_\mu]$, кола $|\tau| = r_\mu$ і променя $[-r_\mu, -\infty)$. Покажемо спочатку, що вираз

$$z^{\eta+p_\mu}\int_{-\infty}^{-r_\mu} e^{zt}t^{p_\mu-1}R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\,dt \tag{31}$$

буде прямувати до нуль-вектора при $z\to\infty$ вздовж променя $\arg z = 0$. Теж саме буде, очевидно, мати місце і для інтеграла вздовж променя $[-r_\mu, -\infty)$ після обходу точки $t = 0$, оскільки в результаті цього обходу може з'явитися лише множник $\exp(2\pi i(p_\mu - 1))$.

Знайдемо оцінку виразу (31). З оцінок (21), (22) випливає, що можна вказати настільки велике додатне число N, для якого

$$\| R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\| < M_\mu^* |t|^N, \tag{32}$$

де $|t| \ge r_\mu$, M_μ^* — деяке фіксоване додате число. Нехай ε — деяке як завгодно мале додатне число. Тоді, беручи до уваги (32), можемо записати

$$\| t^{p_\mu-1}R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\| < M_\mu^{**}e^{-\varepsilon t}, \quad \operatorname{Re} t\in(-\infty, -r_\mu], \quad \operatorname{Im} t = 0, \tag{33}$$

де M_μ^{**} — деяка додатна стала величина. Отже, для виразу (31) маємо оцінку:

$$\left\| t^{\eta+p_\mu} \int\limits_{-\infty}^{-r_\mu} e^{zt} t^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(t)\,dt \right\| < |z^{\eta+p_\mu}| \int\limits_{-\infty}^{-r_\mu} M^{**}_\mu e^{(z-\varepsilon)t}\,dt,$$

де $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z = 0$. Тобто

$$\left\| t^{\eta+p_\mu} \int\limits_{-\infty}^{-r_\mu} e^{zt} t^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(t)\,dt \right\| < \frac{\left|z^{\eta+p_\mu}\right|}{z-\varepsilon} M^{**}_\mu e^{-r_\mu(z-\varepsilon)}.$$

Звідси випливає, що вираз (31) дійсно прямує до нуль-вектора при $z \to \infty$ вздовж променя $\arg z = 0$. Залишається тепер показати, що прямує до нуль-вектора і вираз

$$z^{\eta+p_\mu} \int\limits_c e^{zt} t^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(t)\,dt, \tag{34}$$

де c -- коло $|t| = r_\mu$. Виконаємо заміну $t = -\tau/z$. Тоді

$$z^{\eta+p_\mu} \int\limits_c e^{zt} t^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(t)\,dt = (-1)^{p_\mu} z^n \int\limits_{c_1} e^{-\tau} \tau^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(-\tau/z)\,d\tau, \tag{35}$$

де c_1 — коло $|\tau| = r_\mu |z|$, $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z = 0$. За теоремою Коші коло c_1 можна замінити на коло c_2 фіксованого радіуса $r'_\mu < r_\mu$, що не залежить від z, і на прямолінійні відрізки, що знаходяться на нижньому і верхньому берегах розрізу L^{**}_μ. Відрізки йтимуть від точки $r_\mu |z|$ до точки r'_μ, а після обходу $\tau = 0$ — від точки r'_μ до точки $r_\mu |z|$. З урахуванням цих зауважень запишемо вираз (34) у вигляді

$$z^{\eta+p_\mu} \int\limits_c e^{zt} t^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(t)\,dt = (-1)^{p_\mu} z^n \int\limits_{c_2} e^{-\tau} \tau^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(-\tau/z)\,d\tau + I^{(\mu)}_{\eta+1}, \tag{36}$$

де $I^{(\mu)}_{\eta+1}$ позначає суму інтегралів на вказаних відрізках. Для оцінки $R^{(\mu)}_{\eta+1}(-\tau/z)$ скористаємось нерівністю (21), в якій покладемо $\zeta - \alpha_\mu = t = -\tau/z$. Маємо

$$\| R^{(\mu)}_{\eta+1}(-\tau/z) \| < \frac{M_\mu |\tau|^{\eta+1}}{R_\mu^{\eta+1}(1-\theta)} \frac{1}{|z|^{\eta+1}}, \tag{37}$$

де $\theta = r_\mu / R_\mu \in (0, 1)$. Нехай p_μ — дійсне число. Користуючись нерівністю (37), оцінимо вираз (34), зображений у вигляді (36):

$$\left\| (-1)^{p_\mu} z^\eta \int\limits_{c_2} e^{-\tau} \tau^{p_\mu-1} R^{(\mu)}_{\eta+1}(-\tau/z)\,d\tau + I^{(\mu)}_{\eta+1} \right\| <$$

$$< \frac{1}{|z|} \frac{M_\mu}{R_\mu^{\eta+1}(1-\theta)} \int\limits_{c_2} |\tau|^{\eta+p_\mu} |e^{-\tau}|\,ds + \left\| I^{(\mu)}_{\eta+1} \right\|,$$

де ds — диференціал дуги контура. В результаті інтегрування по колу c_2 маємо вираз, що не залежить від z. Тому множник, що стоїть при $1/|z|$, буде залишатись обмеженим при необмеженому зростанні z. Запишемо оцінку норми $\left\| I_{\eta+1}^{(\mu)} \right\|$:

$$\left\| I_{\eta+1}^{(\mu)} \right\| < \frac{1}{|z|} \frac{M_\mu}{R_\mu^{\eta+1}(1-\theta)} \left(\int\limits_{r'_\mu}^{r_\mu |z|} |\tau|^{\eta+p_\mu} \left| e^{-\tau} \right| |d\tau| + \int\limits_{r_\mu |z|}^{r'_\mu} |\tau|^{\eta+p_\mu} \left| e^{-\tau} \right| |d\tau| \right). \tag{38}$$

При необмеженому зростанні z інтеграли правої части (38) будуть прямувати до скінченних границь, що забезпечується наявністю під знаком інтеграла множника $|e^{-\tau}|$. Таким чином,

$$\left(z^{\eta+p_\mu} \int\limits_c e^{zt} t^{p_\mu - 1} R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\, dt \right) < \frac{M_\mu^1}{|z|},$$

де M_μ^1 не залежить від z. Звідси випливає

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ \operatorname{Re} z > 0,\, \operatorname{Im} z = 0}} z^{\eta+p_\mu} \int\limits_c e^{zt} t^{p_\mu - 1} R_{\eta+1}^{(\mu)}(t)\, dt = 0,$$

що й завершує обгрунтування асимптотичного зображення вектор-функції $\exp(-\alpha_\mu z + p_\mu \ln z)\, w_\mu(z)$ на промені $\arg z = 0$:

$$e^{-\alpha_\mu z} z^{p_\mu} w_\mu(z) \sim \left(e^{\pi p_\mu i} - e^{-\pi p_\mu i} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{\mu k} \Gamma(p_\mu + k) z^{-k},$$

де вектори $a_{\mu k}$ — коефіцієнти ряду (13).

На закінчення відзначимо, що у випадку комплексного p_μ $(p_\mu = p'_\mu + i p''_\mu)$ нам потрібно лише скористатись звичайною оцінкою комплексного степеня, а саме:

$$\tau^{p_\mu} = \exp\left\{ \left(p'_\mu + i p''_\mu \right) \ln \tau \right\} = \exp\left\{ \left(p'_\mu + i p''_\mu \right) (\ln|\tau| + i \arg \tau) \right\}.$$

Звідси

$$|\tau^{p_\mu}| = |\tau|^{p'_\mu} e^{-p''_\mu \arg \tau}.$$

1. *Иванюк Н. Н.* Об исследовании решений линейной системы дифференциальных уравнений n-го порядка вблизи особых точек: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Хмельницкий, 1989. – 132 с.
2. *Гаврилов Н. И.* Методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1962. – 314 с.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

Одержано 12.04.93