УДК 519.21

В. Н. Радченко (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ОБЩИМ СЛУЧАЙНЫМ МЕРАМ

For random functions which are sums of random functional series, we determine an integral with respect to general random measure and prove limit theorems for this integral. We consider the solution of an integral equation with respect to unknown random measure.

Для випадкових функцій, що є сумами випадкових функціональних рядів, визначається інтеграл за загальною випадковою мірою. Для нього доводяться граничні теореми. Розглядається розв'язання інтегрального рівняння відносно невідомої випадкової міри.

Пусть X — некоторое множество, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра подмножеств из X, а (Ω, F, P) — вероятностное пространство. Будем называть случайной мерой μ набор случайных величин $\{\mu(A),\ A \in \mathcal{B}\}$ такой, что $\mu(A_n) \xrightarrow{P} 0$ для $A_n \downarrow \varnothing$, и для $A \bigcap B = \varnothing$ $\mu(A \bigcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ п. н. Множество A называется μ-пренебрежимым, если для любого $B \subset A$, $B \in \mathcal{B}$ $\mu(B) = 0$ п. н.

Для случайных величин ξ будем использовать квазинорму $\|\xi\| = \sup\{\delta : P\{|\xi| > \delta\} > \delta\}$. Очевидно, что $\|\xi + \eta\| \le \|\xi\| + \|\eta\|$ и $\xi_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \|\xi_n\| \to 0,\ n \to \infty$.

Для измеримых функций $f\colon X \to R$ и случайных мер μ стандартным образом через простые функции определяется $\int f\,d\mu$. Теорема 1 из [1] позволяет применить здесь построенную в гл. 7 [2] теорию интеграла по векторной мере, так что наше определение корректно. Далее будем рассматривать случайные функции f вида

$$f(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_k(x), \tag{1}$$

где ξ_k — случайные величины на (Ω, F, P), $f_k\colon X \to R$ — измеримые функции с $|f_k(x)| \le 1$. Ряд (1) для каждого x, кроме μ-пренебрежимого подмножества X, должен сходиться по вероятности безусловно.

Определение 1. *Для случайной функции f вида* (1), $A \in \mathcal{B}$ *положим*

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k\,d\mu, \tag{2}$$

если этот ряд сходится по вероятности безусловно для всех $A \in \mathcal{B}$.

Очевидно, что этот интеграл линеен по f и μ. Как функция от A, он является случайной мерой. Ведь из теоремы 7.3.7 [2] следует, что каждое слагаемое в правой части (2) есть случайная мера. Согласно аналогу теоремы Никодима 8.6 из [3], сходящийся ряд из слагаемых в (2) является случайной мерой.

Теорема 1. *Пусть ξ_k таковы, что для любой последовательности $A_k \in \mathcal{B}$ ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu(A_k) \tag{3}$$

сходится безусловно по вероятности. Тогда для любых f_k, $|f_k| \le 1$, $A \in \mathcal{B}$ *ряд* (2) *сходится безусловно по вероятности.*

Доказательство. Из определения интеграла в [2] следует, что каждый $\int f_k\,d\mu$ можно представить как предел интегралов от простых функций, не превышающих по модулю 1. Поэтому, рассматривая конечные суммы, имеем

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \int_A f_k\,d\mu \right\| \le$$

$$\le \sup_{\substack{|c_{ik}|\le 1 \\ A_{ik}\cap A_{jk}=\varnothing}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{l_k} c_{ik}\mu(A_{ik}) \right\| = \sup_{\substack{|c_{ik}|\le 1 \\ A_{ik}\cap A_{jk}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} c_{ik}\xi_k\mu(A_{ik}) \right\| \le$$

$$\le 8 \sup_{\substack{a_{ik}=\pm 1 \\ A_{ik}\cap A_{jk}=\varnothing}} \left\| \sum_{i,k} a_{ik}\xi_k\mu(A_{ik}) \right\|.$$

Здесь мы переставили слагаемые по i, k, а потом использовали неравенство из леммы 4.3 в) [4] для линейной комбинации случайных величин $\xi_k\mu(A_{ik})$. Для каждого k отделим слагаемые с $a_{ik}=1$ и с $a_{ik}=-1$. В результате получим сумму по k слагаемых вида $\xi_k(\mu(B_k)-\mu(C_k))$ для некоторых множеств B_k, C_k. Поэтому

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k \int_A f_k\,d\mu \right\| \le 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k\mu(A_k) \right\|. \tag{4}$$

Если бы ряд в (2) не сходился, то нашлись бы A_k, для которых не сходится ряд (3).

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Из (4) следует, что для случайной функции f, удовлетворяющей условию сходимости (3), и любого $A \in \mathcal{B}$ будет

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_A f_k\,d\mu \right\| \le 16 \sup_{A_k\in\mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\mu(A_k) \right\|. \tag{5}$$

***Замечание* 2.** Пусть в (3) существуют все математические ожидания $\mathrm{M}\xi_k^2$, и для некоторого числа c все $\mathrm{M}\,\mu^2(A) \le c$, $A \in \mathcal{B}$. Тогда для сходимости ряда (3) достаточно, чтобы сходился ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\mathrm{M}\xi_k^2}$.

Действительно, из определения квазинормы следует, что для любой ξ $\mathrm{M}|\xi| \ge \|\xi\|^2$. Далее, учитывая, что $\mathrm{M}|\xi_k\mu(A_k)| \le \sqrt{\mathrm{M}\xi_k^2\,\mathrm{M}\mu^2(A_k)}$, имеем

$$\left\| \sum_{k=m}^{n} \xi_k\mu(A_k) \right\| \le \sqrt{\mathrm{M}\left| \sum_{k=m}^{n} \xi_k\mu(A_k) \right|} \le \sqrt{\sum_{k=m}^{n} \mathrm{M}|\xi_k\mu(A_k)|} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=m}^{n} \sqrt{c\,\mathrm{M}\xi_k^2} \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Если бы ряд в (3) не сходился, мы получили бы противоречие.

Замечание **3.** Если есть $A \in \mathcal{B}$ с $\mu(A) \neq 0$ п. н., то из сходимости ряда (3) следует сходимость ряда (1) для каждого x.

Подставляя в (3) указанное A вместо некоторых A_k, мы получаем сходимость любого ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_{k_i}$, и остается использовать предложение 4.2 и теорему 4.2 гл. 5 [4].

Множество случайных величин $\{\mu(A),\ A \in \mathcal{B}\}$ ограничено по вероятности (согласно теореме работы [5]). Поэтому для любой μ существует последовательность ненулевых ξ_k такая, что ряд (3) обязательно сходится. Отметим, что из полученных результатов не следует, что два разных представления (1) одной и той же функции f дадут одно и то же значение интеграла. Фактически мы определяем интеграл для уже заданного ряда (1).

Неравенство (5) позволяет получать предельные теоремы для интегралов вида (2).

Теорема 2. *Пусть имеются случайные функции вида* $f^{(n)}(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{kn}(x)$. *Пусть для каждого* n *для любых* $A_k \in \mathcal{B}$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu(A_k)$ *сходится по вероятности безусловно. Чтобы для данных* ξ_{kn} *для любых* $|f_{kn}(x)| \leq 1$ *было* $\int_A f^{(n)}\, d\mu \xrightarrow{P} 0$, $n \to \infty$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\mu(A_k) \right\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из (5). Если же супремумы в (7) не сходятся к нулю, то для каждого n можно зафиксировать набор A_{kn}, с которым суммы рядов из (7) не сходятся к нулю при $n \to \infty$. Теперь положим $f_{kn}(x)$ равными индикаторам A_{kn}, и тогда $\int f^{(n)}\, d\mu$ не сходятся к нулю.

Теорема доказана.

Отметим, что при существовании вторых моментов у всех ξ_{kn} и $\mathrm{M}\,\mu^2(A) \leq c$ для сходимости интегралов в предыдущей теореме достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mathrm{M}\xi_{kn}^2} \to 0$, $n \to \infty$ (это можно доказать аналогично рассуждениям в замечании 2). Аналогично можно получать достаточные условия через вторые моменты и в последующих предельных теоремах.

Ниже $\mu_n - \mu$ обозначает случайную меру, на каждом $A \in \mathcal{B}$ равную $\mu_n(A) - \mu(A)$.

Теорема 3. *Пусть* μ *и* μ_n, $n \geq 1$, — *случайные меры,* f — *случайная функция вида* (1), *для которой ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\mu(A_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\mu_n(A_k)$ *сходятся по вероятности безусловно для любых* A_k, n. *Тогда если*

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\mu_n - \mu)(A_k) \right\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

то для любого $A \in \mathcal{B}$ $\int_A f\, d\mu_n \xrightarrow{P} \int_A f\, d\mu$, $n \to \infty$.

Доказательство. Учитывая (5), имеем

$$\left\| \int_A f\,d\mu_n - \int_A f\,d\mu \right\| = \left\| \int_A f\,d(\mu_n - \mu) \right\| \le 16 \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_n - \mu)(A_k) \right\|,$$

и из (8) следует данное утверждение.

Теорема 4. *Пусть* μ *и* μ_n, $n \ge 1$, *— случайные меры, и даны случайные функции вида* (1)

$$f_{(n)}(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{k0}(x), \quad f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_{k0}(x).$$

Пусть ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}\,\mu_n(A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\,\mu_n(A_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\,\mu(A_k)$$

сходятся по вероятности безусловно для любых $A_k \in \mathcal{B}$, n. *Пусть выполняются условия*

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{kn} - \xi_k)\mu_n(A_k) \right\| \to 0,$$
$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (\mu_n - \mu)(A_k) \right\| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Тогда для любого $A \in \mathcal{B}$ $\int_A f_{(n)}\,d\mu_n \xrightarrow{P} \int_A f\,d\mu$, $n \to \infty$.

Доказательство. Имеем

$$\int_A f_{(n)}\,d\mu_n - \int_A f\,d\mu = \int_A (f_{(n)} - f)\,d\mu_n + \int_A f\,d(\mu_n - \mu).$$

Каждый из двух интегралов в правой части оцениваем с помощью (5) и используем условие (9). (В оценке первого интеграла существенно, что случайные функции $f_{(n)}$ и f записываются через одни и те же f_{k0}.)

Теперь получаем достаточное условие дифференцируемости интеграла (2).

Теорема 5. *Пусть множества* $A_n \in \mathcal{B}$, $n \ge 1$, *случайная мера* μ *и случайная функция* f *вида* (1) *удовлетворяют условиям:*

1) $\mu(A_n) \ne 0$ *п. н.;*

2) *множество случайных величин* $\left\{ \dfrac{\mu(B)}{\mu(A_n)},\ B \subset A_n,\ n \ge 1 \right\}$ *ограничено по вероятности;*

3) *для любой последовательности* A_{n_k}, $k \ge 1$ *(составленной из множеств* A_n, *и, возможно, некоторые множества повторяются), любых* $B_k \subset A_{n_k}$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \dfrac{\mu(B_k)}{\mu(A_{n_k})}$ *сходится по вероятности безусловно;*

4) *для некоторых чисел* c_k, $k \ge 1$, $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in A_n} |f_k(x) - c_k| = 0$, $n \to \infty$, *и при этом ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$ *сходится по вероятности безусловно.*

Тогда $\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f\,d\mu \xrightarrow{P} \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k c_k$, $n\to\infty$.

Доказательство. Из условия 3 и теоремы 1 следует, что f интегрируема по μ на любом A_n. Рассмотрим для некоторого j

$$\frac{1}{\mu(A_n)}\int\limits_{A_n} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{j}\frac{\xi_k}{\mu(A_n)}\int\limits_{A_n} f_k\,d\mu + \sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{\xi_k}{\mu(A_n)}\int\limits_{A_n} f_k\,d\mu .$$

Согласно (5) (для интегралов по случайной мере $\mu(\cdot)/\mu(A_n)$) квазинорма второго слагаемого не превышает $16\sup\limits_{B_k\subset A_n}\left\|\sum_{k=j+1}^{\infty}\xi_k\frac{\mu(B_k)}{\mu(A_n)}\right\|$. Эти значения сходятся к нулю при $j\to\infty$ равномерно по n. (Иначе можно было бы выделить для сколь угодно больших j и разных n конечные суммы, не сходящиеся к нулю по вероятности, составить из них расходящийся ряд и получить противоречие с условием 3.)

Первое слагаемое для данного j при $n\to\infty$ сходится по вероятности к $\sum_{k=1}^{j}\xi_k c_k$. Это следует из того, что для каждого k

$$\left\|\frac{1}{\mu(A_n)}\int\limits_{A_n} f_k\,d\mu - c_k\right\| = \left\|\int\limits_{A_n}(f_k-c_k)\,d\left(\frac{\mu}{\mu(A_n)}\right)\right\| \le 16\sup_{B\subset A_n}\left\|\varepsilon_{kn}\frac{\mu(B)}{\mu(A_n)}\right\|.$$

$\Big($Здесь мы обозначили $\varepsilon_{kn} = \sup\limits_{x\in A_n}|f_k(x)-c_k|$ и использовали неравенство из леммы 4 [6]. $\Big)$ Из условий 2 и 4 следует, что последнее выражение сходится к нулю. Учитывая сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k c_k$, получаем утверждение теоремы.

Пусть имеются две случайные функции вида (1)

$$f(x,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(\omega)f_k(x), \qquad g(x,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty}\eta_j(\omega)g_j(x). \tag{10}$$

Пусть для всех x, кроме μ-пренебрежимого множества, сходится безусловно по вероятности ряд

$$\sum_{k,j=1}^{\infty}\xi_k(\omega)\eta_j(\omega)f_k(x)g_j(x). \tag{11}$$

Тогда произведение fg также является случайной функцией вида (1) и она задается рядом (11).

Теорема 6. *Пусть даны две случайные функции* f *и* g *вида* (10), *удовлетворяющие условию сходимости* (11), *и случайная мера* μ. *Пусть для любых* $A_j,\ A_{kj}\in\mathcal{B}$ *ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\eta_j\mu(A_j), \qquad \sum_{k,j=1}^{\infty}\xi_k\eta_j\mu(A_{kj}) \tag{12}$$

сходятся безусловно по вероятности. Тогда для каждого $A\in\mathcal{B}$ *существует* $\int_A f\,d\left(\int g\,d\mu\right) = \int_A fg\,d\mu$.

Доказательство. Существование записанных интегралов от g и fg следует из условия (12) и теоремы 1. Обозначим

$$f_{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k, \quad g_{(n)} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j g_j,$$

$$\mu_g^{(n)}(A) = \int_A g_{(n)}\, d\mu, \quad \mu_g(A) = \int_A g\, d\mu.$$

Тогда

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} = \sum_{k,j=1}^{m} \xi_k \eta_j \int_A f_k g_j\, d\mu \xrightarrow{P}$$

$$\xrightarrow{P} \sum_{k,j=1}^{\infty} \xi_k \eta_j \int_A f_k g_j\, d\mu = \int_A f g\, d\mu, \quad n \to \infty.$$

Теперь достаточно показать, что

$$\int_A f_{(n)}\, d\mu_g^{(n)} \xrightarrow{P} \int_A f\, d\mu_g, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Для этого используем теорему 4. Имеем

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=n}^{m} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\| = \sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{\substack{n \le k \le m \\ 1 \le j \le n}} \xi_k \eta_j \int_X g_j I_{A_k}\, d\mu \right\| \le$$

$$\le 16 \sup_{A_{kj} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{\substack{n \le k \le m \\ 1 \le j \le n}} \xi_k \eta_j \mu(A_{kj}) \right\|.$$

Выбором достаточно больших n мы можем сделать последнее выражение сколь угодно малым равномерно по всем $m \ge n$ (иначе можно было бы составить расходящийся второй ряд из (12)). Также отсюда следует сходимость для любых A_k ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k)$ и $\sup\limits_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k \mu_g^{(n)}(A_k) \right\| \to 0, \; n \to \infty$. Значит, выполняется первое условие в (9). Второе условие в (9) в рассматриваемой ситуации приводит к проверке сходимости к нулю при $n \to \infty$

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{j=n}^{\infty} \eta_j \int_{A_k} g_j\, d\mu \right\| \le 16 \sup_{A_{kj} \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k \ge 1,\; j \ge n} \xi_k \eta_j \mu(A_{kj}) \right\|.$$

Сходимость записанных здесь рядов можно обосновать через конечные суммы, как это сделано выше. Так же, как и ранее, из сходимости в (12) выводим, что выбором достаточно большого n можно сделать сколь угодно малыми записанные супремумы. Тем самым проверены все условия теоремы 4, и теорема 6 доказана.

Далее мы рассмотрим решения уравнения

$$\mu(A) = \eta(A) + \int_A f\, d\mu, \quad A \in \mathcal{B}, \tag{14}$$

где μ — неизвестная случайная мера, η — известная случайная мера, f — известная случайная функция, задаваемая равенством (1). Равенство (14) должно выполняться п. н. для всех $A \in \mathcal{B}$.

Теорема 7. *Пусть для каждого n для всех x, кроме η-пренебрежимого множества, сходится безусловно по вероятности ряд*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_n \geq 1} \xi_{k_1} \ldots \xi_{k_n} f_{k_1}(x) \ldots f_{k_n}(x). \tag{15}$$

Пусть для любых $A_{i_1 \ldots i_n} \in \mathcal{B}$ сходится безусловно по вероятности ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{k \geq 1 \\ i_1,\ldots,i_n \geq 1}} \xi_k \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \eta(A_{k i_1 \ldots i_n}) \tag{16}$$

(в сумме для каждого k перебираются все различные упорядоченные наборы натуральных чисел $i_1, \ldots, i_n$, где в каждом наборе i_k не обязательно все различны). Тогда случайная мера

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_A f^n \, d\eta \tag{17}$$

определена и является решением уравнения (14).

Доказательство. В (15) ряд сходится к f^n, и f^n является случайной функцией вида (1). Условие (16) уже сходимостью набора слагаемых с фиксированным n обеспечивает интегрируемость f^n. Поэтому в правой части (17) каждое слагаемое определено. Также из (5) имеем

$$\left\| \sum_{n=p}^{q} \int_A f^n \, d\eta \right\| \leq 16 \sup_{A_{\ldots}} \left\| \sum_{n=p}^{q} \sum_{i_1,\ldots,i_n} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_n} \eta(A_{i_1 \ldots i_n}) \right\|.$$

Отсюда видно, что если бы ряд (17) для какого-то A не сходился, то можно было бы построить расходящийся ряд (16). Значит, (17) сходится по вероятности, и согласно аналогу теоремы Никодима 8.6 из [3] его сумма является случайной мерой.

Теперь покажем, что (17) является решением. Из теоремы 6 и условия (16) следует $\int_A f \, d\left(\int f^n \, d\eta\right) = \int_A f^{n+1} d\eta$. Поэтому

$$\int_A f \, d\left(\sum_{n=0}^{q} \int f^n \, d\eta\right) = \sum_{n=1}^{q+1} \int_A f^n \, d\eta.$$

При $q \to \infty$ последнее выражение сходится к $\mu(A) - \eta(A)$. Покажем, что левая часть при этом сходится к $\int_A f \, d\mu$. Используем теорему 3. Условие (8) в данной ситуации приводит к рассмотрению

$$\sup_{A_k \in \mathcal{B}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sum_{j \geq n} \int_{A_k} f^j \, d\eta \right\| \leq$$

$$\leq 16 \sup_{A_{\ldots}} \left\| \sum_{j \geq n, k, i_1, \ldots, i_j} \xi_k \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_j} \eta(A_{k i_1 \ldots i_j}) \right\|.$$

Сходимость записанных рядов следует из (16). И если бы последний супремум не сходился к нулю при $n \to \infty$, то мы могли бы построить расходящийся ряд

(16). Выполняется (8), что и доказывает теорему.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия теоремы* 7. *Тогда нет решений уравнения* (14), *отличных от* (17), *среди всех мер* μ, *удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\forall n, \quad A \in \mathcal{B} \quad \int_A f^n \, d\Big(\int f\, d\mu\Big) = \int_A f^{n+1} \, d\eta,$$

$$\forall A \in \mathcal{B} \quad \int_A f^n \, d\mu \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\mu(A) = \eta(A) + \int_A f\, d\mu = \eta(A) + \int_A f\, d\Big(\eta + \int f\, d\mu\Big) =$$

$$= \eta(A) + \int_A f\, d\eta + \int_A f^2\, d\mu = \ldots = \sum_{k=0}^{n} \int_A f^k\, d\eta + \int_A f^{n+1}\, d\mu.$$

Здесь при $n \to \infty$ сумма сходится к (17) (по условиям теоремы 7), последнее слагаемое сходится к нулю, откуда и следует утверждение теоремы.

Теперь изучим устойчивость решений (17) уравнения (14). Рассмотрим набор уравнений с функциями

$$\mu_n(A) = \eta_n(A) + \int_A f_{(n)}\, d\mu_n, \quad n \ge 1, \quad \mu(A) = \eta(A) + \int_A f\, d\mu,$$
$$f_{(n)}(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{kn}(\omega) f_{k0}(x), \quad f(x, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(\omega) f_{k0}(x). \tag{18}$$

Теорема 9. *Пусть в* (18) *существуют все* $M\eta_n^2(A)$, $M\eta^2(A)$, $M(\xi_{i_1 n}\ldots\xi_{i_k n})^2$, $M(\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})^2$. *Пусть для всех* $f_{(n)}$ *и* η_n, *для* f *и* η *выполняются условия теоремы* 7. *Пусть также*

1) $\sup\limits_{A, n} \{M\eta_n^2(A), M\eta^2(A)\} < \infty$;

2) $\sup\limits_{A} M((\eta_n - \eta)(A))^2 \to 0, \ n \to \infty$;

3) $\sum_{k \ge 1,\, i_1, \ldots, i_k \ge 1} \sqrt{M(\xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})^2} < \infty$;

4) $\sum_{k \ge 1,\, i_1, \ldots, i_k \ge 1} \sqrt{M(\xi_{i_1 n}\ldots\xi_{i_k n} - \xi_{i_1}\ldots\xi_{i_k})^2} \to 0, \ n \to \infty$.

Тогда для любого $A \in \mathcal{B}$ *при* $n \to \infty$

$$\mu_n(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f_{(n)}^k\, d\eta_n \xrightarrow{P} \mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_A f^k\, d\eta,$$

Доказательство. Учитывая (5), имеем

$$\|\mu_n(A) - \mu(A)\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\left\| \int_A (f_{(n)}^k - f^k)\, d\eta_n \right\| + \left\| \int_A f^k\, d(\eta_n - \eta) \right\| \right) \le$$

$$\leq 16 \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{A_{\ldots}} \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_k} (\xi_{i_1 n} \ldots \xi_{i_k n} - \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}) \eta_n (A_{i_1 \ldots i_k}) \right\| +$$

$$+ \sup_A \|(\eta_n - \eta)(A)\| + 16 \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{A_{\ldots}} \left\| \sum_{i_1,\ldots,i_k} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k} (\eta_n - \eta)(A_{i_1 \ldots i_k}) \right\|.$$

Далее оцениваем записанные квазинормы рядов через математические ожидания, как это было сделано в (6), и учитываем условие 2. Теперь получаем, что для доказательства нам достаточно показать сходимость к нулю выражения

$$\sum_{k \geq 1, i_1,\ldots,i_k} \left(\sqrt{\mathrm{M}(\xi_{i_1 n} \ldots \xi_{i_k n} - \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k})^2} \sup_{A_{\ldots}} \sqrt{\mathrm{M}\eta_n^2 (A_{i_1 \ldots i_k})} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\mathrm{M}(\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k})^2} \sup_{A_{\ldots}} \sqrt{\mathrm{M}((\eta_n - \eta)(A_{i_1 \ldots i_k}))^2} \right).$$

Из условий $1-4$ следует требуемая сходимость.

Также можно находить решение уравнения

$$f = g + h \int_X f \, d\mu \tag{19}$$

относительно неизвестной случайной функции f. Здесь g, h — известные случайные функции вида (1), μ — известная случайная мера. Равенство (19) должно выполняться п. н. для всех x, кроме μ-пренебрежимого множества.

Если h и g интегрируемы по μ, $P\left\{\int_X h\,d\mu = 1\right\} = 0$, то

$$f = g + h \frac{\int_X g\,d\mu}{1 - \int_X h\,d\mu}$$

будет решением уравнения (19). В этом легко убедиться непосредственной подстановкой. Функция f будет иметь вид (1) и интегрируема по μ как линейная комбинация двух таких функций.

1. *Радченко В. М.* Про інтеграли по випадкових мірах, σ-адитивних з ймовірністю 1 // Вісн. Київ. ун-ту. Математика і механіка. – 1989. – Вип. 31. – С. 111–114.
2. *Turpin P.* Convexités dans les espaces vectorielles topologiques généraux // Diss. Math. – 1976. – **131**. – 220 p.
3. *Drewnowski L.* Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III // Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys. – 1972. – **20**, № 6. – P. 439–445.
4. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
5. *Drewnowski L.* Boundness of vector measures with values in the spaces L_0 of Bochner measurables functions // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – **91**, № 4. – P. 581–588.
6. *Радченко В. Н.* Равномерная интегрируемость и теорема Лебега для сходимости по L_0-значным мерам // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 6. – С. 857–860.

Получено 20.06.97