УДК 512.552.12

Б. В. Забавський, А. І. Гаталевич (Львів. ун-т)

ПРО МІНІМАЛЬНІ ПРОСТІ ІДЕАЛИ КОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ БЕЗУ

We study a spectrum of minimal prime ideals of the Bézout commutative rings. We apply the results obtained to the problem of diagonal reduction of matrices over the rings of this sort.

Вивчається спектр мінімальних простих ідеалів комутативних кілець Безу. Отримані результати застосовано до задачі діагональної редукції матриць над такими кільцями.

Комутативні кільця елементарних дільників, тобто кільця, над якими можлива діагональна редукція матриць, є кільцями Безу (кільцями скінченнопороджених головних ідеалів). Виникає питання: чи довільне комутативне кільце Безу є кільцем елементарних дільників?

В роботі [1] побудовано приклад комутативного кільця Безу, яке не є кільцем елементарних дільників. Це дозволило звузити розгляд даного питання до класу комутативних областей Безу. В [2, 3] показано, що комутативне кільце Безу буде кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли довільний скінченнозображуваний модуль над ним розкладається в пряму суму циклічних модулів. В роботах [2 – 8] поставлена проблема: чи кожна комутативна область Безу є кільцем елементарних дільників?

У даній статті досліджується вплив спектра комутативних кілець Безу на можливість діагональної редукції матриць. Одним із результатів є наступний: комутативне кільце Безу зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є кільцем елементарних дільників тоді і тільки тоді, коли всі фактор-кільця за простими ідеалами є кільцями елементарних дільників. Частину результатів статті отримано іншими способами А. Фаччіні, К. Фейсом в роботі [9], про що авторам вказав рецензент.

Всі кільця, які розглядаються в роботі, є комутативними з $(1 \neq 0)$. Скажемо, що дві матриці A і B над кільцем R є еквівалентними, якщо існують такі зворотні матриці P і Q над R, відповідних розмірів, що $B = PAQ$. Матриця A має діагональну редукцію, якщо A еквівалентна діагональній матриці $\operatorname{diag}(d_{ii})$, $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$, з властивістю, що d_{ii} є дільником $d_{i+1,\,i+1}$. (Під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі.) Якщо довільні 1×2 і 2×1 матриці над R мають діагональну редукцію, то кільце R називають кільцем Ерміта. Якщо над кільцем R довільна матриця має діагональну редукцію, то R називають кільцем елементарних дільників (скорочено R — к. е. д.).

Слід зауважити, що к. е. д. є кільцем Ерміта. В роботі [7] показано, що кільце Ерміта — кільце скінченнопороджених головних ідеалів. В цій статті під кільцем Безу розуміють кільце скінченнопороджених головних ідеалів. Кільце без ненульових нільпотентних елементів називають редукованим. Кільце R називається напівспадковим, якщо довільний скінченнопороджений ідеал R є проективним R-модулем. Кільце R називається ріккартовим (скорочено PP-кільцем), якщо анулятор довільного елемента R є головним ідеалом, який породжений ідемпотентом, або, що еквівалентно — в R всі головні ідеали є проективними. Очевидно, що у випадку кілець Безу напівспадкові кільця є PP-кільцями і навпаки. Кільце R називається регулярним, якщо для довільного $a \in R$ існує $x \in R$, що $axa = a$. Регулярне кільце є кільцем Безу, і також воно є к. е. д. [9]. Кільце R назвемо адекватним в нулі, якщо R — кільце Безу і для будь-яких $a, b \in R$ існують $r, s \in R$ такі, що $a = rs$, $rR + bR = R$, і для довільного неодиничного дільника s' елемента s ідеал $s'R + bR$ — властивий.

Адекватні кільця вивчались в роботах [7, 8, 10, 11]. Кільце називається кільцем Голді, якщо воно задовольняє умови максимальності дляануляторних ідеалів і прямих сум ідеалів. Локальне кільце Безу називається кільцем нормування [7].

Позначимо через $P(R)$ ніль-радикал кільця R, через $U(R)$ — групу одиниць R, через $\min R$ — множину всіх мінімальних простих ідеалів кільця R. Елемент кільця R, який не є дільником нуля, називається регулярним. Через $Q_{\text{Cl}}(R)$ позначимо класичне кільце дробів кільця R. Для довільного елемента x кільця R позначимо через $D(x) = \{P \in \min R \mid x \notin R\}$. Множини $D(x)$ є базою топології Заріського для $\min R$. Скажемо, що $\min R$ — компакт, якщо $\min R$ є компактом в цій топології. Ідеал I кільця R назвемо суттєвим, якщо I має ненульовий перетин з довільним ненульовим ідеалом кільця R. Для зручності посилань і повноти викладу відмітимо спочатку ряд відомих результатів.

Твердження 1 ([12], лема 1). *Якщо R — кільце Безу, то $Q_{\text{Cl}}(R)$ — кільце Безу.*

Твердження 2 ([13], твердження 1). *Якщо R — редуковане кільце, то $\bigcup_{P \in \min R} P$ — множина всіх дільників нуля R.*

Твердження 3 ([14], твердження 2.2). *Нехай R — кільце Безу, то наступні твердження еквівалентні:*

1) *$Q_{\text{Cl}}(R)$ — регулярне кільце;*

2) *а) $\min R$ — компакт; б) $\bigcup_{P \in \min R} P$ — всі дільники нуля R.*

Твердження 4 ([13], твердження 2.7 і 2.1). *Для редукованого кільця Безу наступні твердження еквівалентні:*

1) *$Q_{\text{Cl}}(R)$ — регулярне кільце;*

2) *$\min R$ — компакт;*

3) *R — напівспадкове;*

4) *R — PP-кільце;*

5) *довільний елемент R — добуток ідемпотента на регулярний елемент.*

Твердження 5 ([15], лема 7.2.5). *Якщо I — суттєвий ідеал редукованого кільця Голді, то I містить регулярний елемент.*

Твердження 6 ([13], твердження 1.6). *Якщо R — редуковане кільце зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів $P_1, \ldots, P_n$, то $Q_{\text{Cl}}(R) = R_{P_1} \oplus \ldots \oplus R_{P_n}$ — скінченна пряма сума полів.*

Твердження 7 ([13], твердження 3.7). *Нехай R — редуковане кільце таке, що $\min R$ — компакт. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

1) *довільний мінімальний простий ідеал R є несуттєвим;*

2) *$\min R$ — скінченна.*

На підставі тверджень 2, 5, 7 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Якщо R — редуковане кільце Голді, то $\min R$ — скінченна.*

Твердження 8. *Нехай R — кільце Безу зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів. Тоді $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$, де R_i — кільця Безу з єдиним мінімальним простим ідеалом.*

Доведення. Слід зауважити, що доведення даного твердження повністю повторює доведення теореми 2.2 з роботи [8].

Твердження 9. *Кільце Ерміта R є к. е. д. тоді і тільки тоді, коли $R/P(R)$ — к. е. д.*

Доведення. Оскільки гомоморфний образ к. е. д. є к. е. д., то необхідність очевидна. Достатньо лише розглянути випадок, коли $R/P(R)$ — к. е. д. Внаслідок твердження 6 з [10] для того щоб довести, що R є к. е. д., досить показати, що для довільних $a, b, c \in R$ таких, що $aR + bR + cR = R$, існують такі елементи $p, q \in R$, що $(ap + bq)R + cqR = R$. Оскільки $R/P(R)$ — к. е. д., то на основі твердження 6 з [10] для елементів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in R/P(R)$ існують такі елементи $\overline{p}, \overline{q}, \overline{u}, \overline{v} \in R/P(R)$, що $(\overline{a}\,\overline{p} + \overline{b}\,\overline{q})\overline{u} + \overline{c}\,\overline{q}\,\overline{u} = \overline{1}$ ($\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ —

гомоморфні образи елементів a, b, c при канонічному вкладенні R в $R/P(R)$). Звідси, очевидно, що існують елементи $p, q, u, v \in R$, $n \in P(R)$ такі, що $(ap+bq)u + cqv = 1+n$. Оскільки $1+n \in U(R)$, то $(ap+bq)R + cqR = R$, що і потрібно довести. Твердження доведено.

Теорема 1. *Кільце Безу зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є к. е. д. тоді і тільки тоді, коли для довільного простого ідеалу фактор-кільце по ньому є к. е. д.*

Доведення. Оскільки гомоморфний образ к. е. д. є к. е. д., то нам досить довести достатність. За твердженням 8 $R/P(R) = R/P_1 \oplus \ldots \oplus R/P_n$ є прямою сумою к. е. д. і, отже, $R/P(R)$ є к. е. д. Внаслідок теореми 2.2 з [8] R — кільце Ерміта. Звідси на основі твердження 9 R — к. е. д. Теорему доведено.

Розглянемо кільця Безу R такі, що кільця дробів $Q_{\text{Cl}}(R)$ містять лише скінченне число мінімальних простих ідеалів. Прикладом можуть бути кільця, фактор-кільця яких за ніль-радикалом є кільцями Голді.

Теорема 2. *Нехай R — кільце Безу, яке має класичне кільце дробів $Q_{\text{Cl}}(R)$ зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів. Тоді $R = R_1 \oplus R_2 \oplus \ldots \oplus R_n$, де $R_1, \ldots, R_n$ — кільця Безу з єдиним мінімальним простим ідеалом.*

Доведення. Внаслідок твердження 8 маємо $Q_{\text{Cl}}(R) = e_1 Q_{\text{Cl}}(R) \oplus \ldots \oplus e_n Q_{\text{Cl}}(R)$, де $e_1 Q_{\text{Cl}}(R), \ldots, e_n Q_{\text{Cl}}(R)$ — кільця Безу з єдиним мінімальним простим ідеалом. Нехай $S = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_n R$. Оскільки R — дистрибутивне кільце, то всі ідемпотенти кільця $Q_{\text{Cl}}(R)$ лежать в R ([16], лема 1.10). Звідси отримуємо, що $S = R$. Очевидно, що якщо P — мінімальний простий ідеал в $e_i Q_{\text{Cl}}(R)$, то $P \cap R$ — мінімальний простий ідеал в R, який міститься в $e_i R$, тобто кільце $e_i R$ містить єдиний мінімальний простий ідеал. Теорему доведено.

Легко помітити, що кільце $e_i R$ (див. теорему 2) є кільцем Ерміта [8], і як очевидний наслідок теореми 2 отримуємо такий результат.

Наслідок 2. *Нехай R — кільце Безу таке, що $R/P(R)$ — кільце Голді, тоді R — кільце Ерміта.*

Теорема 3. *Нехай R — кільце Безу, в якому довільний мінімальний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі і класичне кільце дробів якого є кільцем зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів. Тоді R — кільце Ерміта, яке є скінченною прямою сумою кілець нормування.*

Доведення. Внаслідок теореми 2 $R = e_1 R \oplus \ldots \oplus e_n R$, де $e_i R$ містить єдиний мінімальний простий ідеал, який є, очевидно, ідеалом в R. Звідси $e_i R$ — локальне кільце Безу, а отже, і кільце нормування, яке є, очевидно, кільцем Ерміта.

На підставі теореми 3 і ([8], твердження 4.1, 4.2, 4.5) завершуємо доведення теореми.

Теорема 4. *Нехай R — кільце Безу, в якому довільний (мінімальний) простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі і класичне кільце дробів якого є кільцем зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів. Тоді R — к. е. д.*

Нехай R — кільце Безу, фактор-кільце якого $R/P(R)$ — кільце Голді. Тоді за наслідком 1 R — кільце Ерміта. Крім цього, очевидно, що $Q_{\text{Cl}}(R/P(R))$ є кільцем Безу зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів. Припустимо, що довільний простий ідеал R міститься в єдиному максимальному ідеалі. На підставі теореми 4 $R/P(R)$ — к. е. д., а на основі твердження 2 R — к. е. д. Отже, справедливий наступний результат.

Теорема 5. *Кільце Безу, в якому довільний простий ідеал міститься в єдиному максимальному ідеалі і фактор-кільце якого за ніль-радикалом є кільцем Голді, є к. е. д.*

Розглянемо тепер випадок адекватних кілець.

Теорема 6 ([8], теорема 4.1). *Довільний простий ідеал адекватного в нулі кільця міститься в єдиному максимальному ідеалі.*

Доведення. Нехай P — простий ідеал R. Якщо P — максимальний ідеал, то все доведено. Нехай існують максимальні ідеали M_1, M_2 такі, що $P \subset M_1 \cap \cap M_2$. Але ж $M_1 + M_2 = R$, тому $m_1 + m_2 = 1$, де $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$. Оскільки R — адекватне в нулі, тоді для довільного $a \in P$ (зокрема, можливий випадок $a = 0$) $a = rs$, де $rR + m_1R = R$, і для довільного неодиничного дільника s' елемента s ідеал $s'R + m_1R$ — властивий. Далі $s \in P$, тому що P — простий ідеал і $P \subset M_1$. Нехай $dR = sR + m_2R$. Оскільки $P \subset M_2$, то d — неодиничний дільник елемента s. Але $dR + m_1R \supset m_2R + m_1R = R$, що суперечить вибору елемента a. Отримана суперечність доводить теорему.

Теорема 7. *Кільце Безу з єдиним мінімальним простим ідеалом є адекватним в нулі тоді і тільки тоді, коли воно є кільцем нормування.*

Дана теорема є очевидним наслідком теореми 6.

Теорема 8. *Кільце Безу R зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів є адекватним в нулі тоді і тільки тоді, коли R — скінченна пряма сума кілець нормування.*

Доведення. Нехай $P_1, \ldots, P_n$ — всі мінімальні прості ідеали R. Тоді внаслідок твердження 8 $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, де R_i — кільця Безу з єдиним мінімальним простим ідеалом. Оскільки R — адекватне в нулі, то тоді за теоремами 6, 7 кільця R_i — кільця нормування. Для доведення достатності слід показати, що якщо $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n$, де R_i — кільця нормування, то R — адекватне в нулі кільце. Очевидно, що кільце нормування є адекватним в нулі кільцем. Для доведення теореми нам досить показати, що скінченна пряма сума адекватних в нулі кілець є адекватним в нулі кільцем. Нехай $a = (a_i)$, $b = (b_i) \in R$. Виберемо r_i і s_i в кожному R_i. Тоді згідно з адекватністю цих кілець $r = (r_i)$, $s = (s_i)$ і, очевидно, що $a = rs$ і $rR + bR = R$. Нехай $s' = (s_i')$ є неодиничним дільником s. Для кожного i таке s_i' не є одиницею R_i і ми маємо $s_i'R_i + b_iR \neq R_i$. Звідси $s'R + bR \neq R$, що доводить адекватність в нулі кільця R.

Теорема 9. *Кільце Ерміта, класичне кільце дробів якого є кільцем Буля, є к. е. д.*

Доведення. Нехай R — кільце Ерміта таке, що $Q_{\mathrm{Cl}}(R)$ — кільце Буля. На підставі твердження 9 можемо вважати, що R — кільце без нільпотентних елементів. Нехай P — довільний мінімальний простий ідеал кільця R. Тоді для довільного $a \in P$ елемент $a/1 \in Q_{\mathrm{Cl}}(R)$ є ідемпотентом, а значить, таким є і елемент a. Отже, ми показали, що довільний елемент будь-якого мінімального простого ідеалу кільця R є ідемпотентом.

Для доведення теореми нам достатньо показати, що матриця $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$ має діагональну редукцію ([7], теореми 3.5, 5.1). Розглянемо спочатку випадок, коли елемент a не є ідемпотентом. Тоді для довільного ідемпотента $e \in R$ елементи $a(1-e)$, ae є ідемпотентами. Звідси

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-e & -e \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1-e) & -ae \\ x & y \end{pmatrix},$$

де $(a(1-e))^2 = a(1-e)$, $(ae)^2 = ae$. Позначимо $a(1-e) = \varphi$, $ae = f$ і покладемо $d = \varphi + f - \varphi f$, $\varphi_1 = 1 - f + \varphi f$. Отримаємо

$$\begin{pmatrix} \varphi & f \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -f \\ 1-\varphi & \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix},$$

де $d^2 = d$, причому $dR + \alpha R + \beta R = R$. Покладемо $r = 1 - d + d\beta$, $s = d + \beta - d\beta$. Отримаємо $\beta = rs$, $d = ds$. Тоді

$$\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + r\alpha & r\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = B.$$

Очевидно, що $(d + r\alpha)R + r\beta R = R$. Оскільки R — кільце Ерміта, отримуємо, що матриця B, а значить, і матриця A мають діагональну редукцію. Якщо елемент a є ідемпотентом, то внаслідок наведених аналогічних міркувань отримаємо доведення теореми.

Теорема 10. *Нехай R — редуковане кільце Безу, яке є кільцем Голді. Тоді довільний мінімальний простий ідеал R є головним і породжується ідемпотентом.*

Доведення. Внаслідок обмежень, які накладені на R, класичне кільце дробів $Q_{\mathrm{Cl}}(R)$ є артіновим регулярним кільцем зі скінченним числом мінімальних простих ідеалів. Нехай P — мінімальний простий ідеал кільця R. Розглянемо ідеал $P_Q = \{p/s \mid p \in P\}$. Очевидно, що P_Q — простий ідеал кільця $Q_{\mathrm{Cl}}(R)$. Тоді існує ідемпотент $e \in Q_{\mathrm{Cl}}(R)$ такий, що $P_Q = e\,Q_{\mathrm{Cl}}(R)$. Оскільки R — дистрибутивне кільце, то $e \in R$ ([16], лема 1.10). Для довільного $p \in P$ отримуємо $p = er$, де r — регулярний елемент. Звідси $ep = eer = er = p$ і $P \subset eR$, а оскільки $e \in P$, то $eR \subset P$. Отже, $P = eR$. Теорему доведено.

1. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 366–394.
2. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – М.: Мир, 1975. – 422 с.
3. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули, категории: В 2-х т. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 688 с.
4. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Mich. Math. J. – 1955/56. – **3**. – P. 159–163.
5. *Shores T.* Bezout rings and their modules // Ring Theory Proc. Oklf. Conf. – New York: Acad. press, 1974. – P. 63–73.
6. *Warfield R. B.* Decomposability of finitely presented modules // Proc. Amer. Math. Soc. – 1970. – 25. – P. 467–472.
7. *Kaplansky J.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
8. *Larsen M., Lewis W., Shores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Ibid. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
9. *Faccini A., Faith C.* *FP*-injective quotient rings and elementary divisor rings // Commut. Ring Theory Proc. II Int. Conf. – 1996. – **185**. – P. 293–302.
10. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 362–365.
11. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**. – P. 225–236.
12. *Beauregard R.* Infinite primes and unique factorization in a principal right ideal domain // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **141**. – P. 245–253.
13. *Matlis E.* The minimal prime spectrum of a reduced ring // Ill. J. Math. – 1983. – **27**. – P. 353–391.
14. *Hutson H. L.* On zero-dimensional rings of quotients and the geometry of minimal primes // J. Algebra. – 1988. – **112**. – P. 1–14.
15. *Херстейн И.* Некоммутативные кольца. – М.: Мир, 1972. – 190 с.
16. *Туганбаев А. А.* Кольца с дистрибутивной структурой идеалов // Абелевы группы и модули. – Томск: Томск. ун-т, 1985. – 5. – С. 88–103.

Одержано 24.09.96,
після доопрацювання — 21.04.99