УДК 517.5

В. П. Моторный (Днепропетр. ун-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДРОБНОГО ПОРЯДКА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ. II

For functions which are fractional order integrals of bounded functions, we investigate their approximation by algebraic polynomials.

Досліджуються наближення алгебраїчними многочленами функцій, які є інтегралами дробового порядку від обмежених функцій.

1. Введение. Обозначим через W^r, r — любое положительное число, класс функций f, определяемых на отрезке $[-1, 1]$ равенством

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{1} (x-t)_+^{r-1} \phi(t)\,dt + P(x), \tag{1}$$

где $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера, $(x-t)_+^{r-1}$ — усеченная степень, функция $\phi(x)$ измерима и $|\phi(x)| \le 1$ почти всюду, а $P(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше $[r-1]$ ($[a]$ — целая часть a).

Известны следующие результаты о поточечном приближении функций из класса W^r алгебраическими многочленами.

Для $r = 1$ С. М. Никольский [1] построил линейный метод $L_n(f; x)$ приближения функций из класса W^1 такой, что

$$\left| f(x) - L_n(f; x) \right| \le \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + O\left(\frac{|x| \ln n}{n^2} \right), \tag{2}$$

и показал, что константу $\frac{\pi}{2}$ в неравенстве (2) уменьшить нельзя.

А. Ф. Тиман [2, с. 310–314] доказал, что для любого натурального числа $r > 1$ существует линейный метод $U_n(f; x)$ приближения класса W^r такой, что для любой функции $f \in W^r$ имеет место неравенство

$$\left| f(x) - U_n(f; x) \right| \le \frac{K_r}{n^r} \left[\left(\sqrt{1-x^2} \right)^r + o(1) \right]$$

и константу K_r (K_r — константа Фавара) на классе W^r уменьшить нельзя.

Таким образом, для каждого натурального числа r был указан линейный метод приближения, осуществляющий асимптотически наилучшеее приближение класса W^r алгебраическими многочленами в равномерной метрике и в то же время каждую функцию из класса W^r у концов отрезка $[-1, 1]$ приближающий существенно лучше. В работах Н. П. Корнейчука и А. И. Половины [3 – 5] было установлено, что аналогичный эффект, но уже реализуемый нелинейным методом, имеет место и для некоторых классов функций гладкости не выше двух. В работе А. А. Лигуна [6] для любого нечетного числа r построен линейный метод приближения $Q_{n,r}(f; x)$ такой, что для любой функции $f(x)$, имеющей производную порядка r, выполняется неравенство

$$\left| f(x) - Q_{n,r}(f; x) \right| \le \frac{K_r}{2} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^r \omega\left(f^{(r)}; \pi\sqrt{1-x^2}/n \right) + o\left(n^{-r} \omega\left(f^{(r)}; 1/n \right) \right),$$

где $\omega\left(f^{(r)}; t\right)$ — модуль непрерывности r-й производной функции $f(x)$.

В. Н. Темляков [7] усилил неравенство (2), убрав $\ln n$ в остаточном члене, отказавшись при этом от линейности оператора приближения. Для любого натурального $r \geq 2$ Р. М. Тригуб [8] установил следующий результат.

Для любой функции $f \in W^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $p_n(x)$, $n = r-1, r, \ldots$, удовлетворяющих неравенству

$$\left| f(x) - p_n(x) \right| \leq K_r \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} \right)^r + c_r \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r-1}}{n^{r+1}},$$

где константа c_r зависит от r.

В настоящей работе мы исследуем случай дробного r. Основной результат работы состоит в следующем.

Теорема 1. *Для любого дробного числа $r > 0$ и любой функции $f \in W^r$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$, $n \geq [r]$, такая, что*

$$\left| f(x) - P_n(x) \right| \leq \frac{K_r}{n^r} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^r + O\left(\frac{\ln n}{n^{r+1}} \left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)^{r-1} \right), \tag{3}$$

где

$$K_r = \frac{4 \sin \frac{r\pi}{2}}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^{r+1}}, \quad \textit{если } 0 < r < 1,$$

и

$$K_r = \frac{4}{\pi} \left| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left\{ (2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2} \right\}}{(2m+1)^{r+1}} \right|, \quad \textit{если } r > 1,$$

а $\gamma_r \in [0, \pi)$ является корнем уравнения

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left\{ (2m+1)\gamma_r - \frac{r\pi}{2} \right\}}{(2m+1)^r} = 0.$$

Постоянная, определяющая остаточный член в (3), *зависит только от r.*

Следует отметить, и этим в работе будем пользоваться, что $\frac{K_r}{n^r}$ — величина наилучшего приближения ядра

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt - \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r} \tag{4}$$

тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в интегральной метрике. Этот важный результат получен в работах В. К. Дзядыка [9, 10] (см. также работу [11], в которой были получены существенные обобщения).

Отметим также, что порядковая оценка для поточечного приближения функций, имеющих дробную производную, была получена в работе [12].

2. Вспомогательные определения и результаты. 1. Пусть $\rho \in (0, 1)$, $m = 0, 1, \ldots$ и $r = \rho + m$. Не теряя общности, будем считать, что $P(x) = 0$ в (1). При этом функцию $f(x)$, представимую равенством (1), будем записывать в виде $\phi_{m+\rho}(x)$. Очевидно, что $\phi'_{m+\rho}(x) = \phi_{m-1+\rho}(x)$. Обозначим через $S_m(x)$ функцию

$$\int_0^\pi \left[D_r(u-x)+(-1)^m D_r(u+x) \right] \sin^\rho u \phi(\cos u)\, du,$$

где $D_r(t)$ — ядро, определяемое равенством (4), а через $R_m(x)$ — разность $\phi_{m+\rho}(\cos x) - \sin^r x S_m(x)$. Тогда

$$\frac{d}{dx} R_m(x) = -\sin x R_{m-1}(x) - m \cos x \sin^{m-1} x S_m(x). \tag{5}$$

Одним из основных вспомогательных утверждений является следующая лемма, доказанная в работе [13].

Лемма 1. *Вторая разность функции $R_0(x)$ удовлетворяет неравенству*

$$\left| \Delta_h^2 R_0(x) \right| \le C \begin{cases} h^{1+r} \sin^{r-1} x, & \text{если } \sin x \ge h, \\ h^{2r}, & \text{если } \sin x < h, \end{cases} \tag{6}$$

где C — абсолютная константа.

***Замечание* 1.** Всюду в дальнейшем абсолютные константы будем обозначать символом C, а константы, зависящие от параметра r, через C_r, хотя в разных местах они могут иметь различные значения.

2. Докажем несколько элементарных неравенств.

Лемма 2. *Пусть $r \in (0, 1)$. Для любых $x, t \in (0, \pi)$ имеет место неравенство*

$$\left| \sin^r t - \sin^r x \right| < 2 \sin^{r-1} x \sin \frac{|x-t|}{2}. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что неравенство (7) является следствием неравенства

$$\left| \sin^r t - \sin^r x \right| < \sin^{r-1} x |\sin x - \sin t|. \tag{8}$$

Докажем неравенство (8). Пусть $0 < t < x \le \pi/2$. Тогда $\sin t < \sin x$ и $\sin^{r-1} x < < \sin^{r-1} t$. Поэтому

$$\sin^{r-1} x |\sin x - \sin t| = \sin^r x - \sin^{r-1} x \sin t > \sin^r x - \sin^r t > 0. \tag{9}$$

Если $0 < x < t \le \pi/2$, то $\sin x < \sin t$ и $\sin^{r-1} x > \sin^{r-1} t$. Следовательно,

$$\sin^{r-1} x \left| \sin x - \sin t \right| = \sin^{r-1} x \sin t - \sin^r x > \sin^r t - \sin^r x > 0 \tag{10}$$

Из неравенств (9), (10) следует (8) для указанных значений t и x. Пусть $x \in (0, \pi/2]$, $t \in (\pi/2, \pi)$ и $y = \pi - t$. Тогда $y \in (0, \pi/2)$ и

$$\left| \sin^r t - \sin^r x \right| = \left| \sin^r(\pi - y) - \sin^r x \right| <$$
$$< \sin^{r-1} x |\sin x - \sin y| = \sin^{r-1} x |\sin x - \sin t|.$$

Аналогично, если $t \in (0, \pi)$, а $x \in (\pi/2, \pi)$, то полагая $u = \pi - x$, получаем

$$\left| \sin^r t - \sin^r x \right| = \left| \sin^r t - \sin^r u \right| < \sin^{r-1} u |\sin u - \sin t| = \sin^{r-1} x |\sin x - \sin t|.$$

Лемма 2 доказана.

***Замечание* 2.** Левую часть (7), очевидно, можно оценить следующим образом:

$$\left| \sin^r t - \sin^r x \right| < 2^r \sin^r \frac{|x-t|}{2}. \tag{11}$$

Лемма 3. *Пусть $r \in (0, 1)$. Для любых $x, t \in (0, \pi)$ имеет место неравенство*

$$\sin^r t < \frac{2\pi}{3}\sin^{r-1} x \sin\frac{x+t}{2}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $\frac{x+t}{2} \in (\pi/6, 5\pi/6)$. Тогда $2\sin(t+x)/2 > 1 \geq \sin^r t$. Следовательно, неравенство (12) необходимо доказать для $\frac{x+t}{2} \in (0, \pi/6)$ и для $\frac{x+t}{2} \in (5\pi/6, \pi)$. Рассмотрим первый случай. Представим переменную t в виде $t = ax$. Поскольку $r \in (0, 1)$ и $\sin\frac{x+t}{2} > \frac{3}{2\pi}(x+t)$, то

$$\sin^r t < t^r = a^r x^r < (1+a)x^r =$$
$$= x^{r-1}(x+ax) = \frac{2\pi}{3}x^{r-1}\frac{3}{2\pi}(x+t) < \frac{2\pi}{3}\sin^{r-1} x \sin\frac{x+t}{2}.$$

Случай $\frac{x+t}{2} \in (5\pi/6, \pi)$ аналогичен. Положим $\pi - t = a(\pi - x)$. Тогда $\sin^r t = \sin^r(\pi - t) < (\pi - t)^r = a^r(\pi - x)^r$, $\sin^{r-1} x = \sin^{r-1}(\pi - x) > (\pi - x)^{r-1}$ и $\sin\frac{x+t}{2} = \sin\left(\pi - \frac{x+t}{2}\right) \geq \frac{3}{2\pi}(a+1)(\pi - x)$. Поэтому

$$\sin^r t < a^r(\pi - x)^r < (1+a)(\pi - x)^r = (\pi - x)^{r-1}(1+a)(\pi - x) <$$
$$< \frac{2\pi}{3}\sin^{r-1} x \frac{3}{2\pi}(a+1)(\pi - x) < \frac{2\pi}{3}\sin^{r-1} x \sin\frac{x+t}{2}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть* $r \in (0, 1)$. *Для любых* $x, t \in (0, \pi)$ *имеет место неравенство*

$$\sin^r t < 2\sin^r\frac{x+t}{2}. \tag{13}$$

Доказательство. Если $\frac{x+t}{2} \in (\pi/6, 5\pi/6)$, то $2\sin(t+x)/2 > 1 \geq \sin^r t$. Пусть $\frac{x+t}{2} \in (0, \pi/6)$. Тогда

$$\sin t < 2\sin t/2 < 2\sin\frac{x+t}{2}. \tag{14}$$

Если $\frac{x+t}{2} \in (5\pi/6, \pi)$, то

$$\sin t = \sin(\pi - t) < 2\sin\frac{\pi - t}{2} < 2\sin\frac{(\pi - t) + (\pi - x)}{2} = 2\sin\frac{t+x}{2}. \tag{15}$$

Из неравенств (14) и (15) следует (13). Лемма 4 доказана.

3. В этом пункте приведем некоторые факты, связанные с интерполяцией и приближением функций тригонометрическими полиномами полуцелого порядка.

Тригонометрическим полиномом $T_{n-1/2}(t)$ полуцелого порядка $n - 1/2$ называется сумма вида [14, с. 4]

$$\sum_{k=0}^{n-1} [a_k \cos(k+1/2)t + b_k \sin(k+1/2)t],$$

где a_k, b_k — произвольные числа.

Полиномы $T_{n-1/2}(t)$ удовлетворяют условию

$$T_{n-1/2}(t+2\pi) = -T_{n-1/2}(t). \tag{16}$$

Естественно, интерполировать и приближать полиномами полуцелого порядка следует функции $f(x)$, заданные на всей действительной оси и удовлетворяющие условию (16). Такие функции будем называть антипериодическими, а число 2π — антипериодом.

Пусть $t_0, t_1, \ldots, t_{2n-1}$ и $y_0, y_2, \ldots, y_{2n-1}$ — две группы чисел, причем числа первой группы удовлетворяют условию $0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_{2n-1} < 2\pi$. Существует [14, с. 4 и 73] единственный интерполяционный полином $T_{n-1/2}(t)$ порядка $n - 1/2$, удовлетворяющий условиям

$$T_{n-1/2}(t_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

В качестве узлов интерполяции возьмем равноотстоящие точки $t_i = \dfrac{\pi i}{n}$, $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$, а в качестве чисел y_i — значение произвольной функции $f(t)$ в этих точках. Тогда полином полуцелого порядка $n - 1/2$, интерполирующий функцию $f(t)$ по равноотстоящим узлам, имеет вид [14, с. 6]

$$L_{n-1/2}(f, t) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} f(t_k) \frac{\sin n(t-t_k)}{\sin\dfrac{t-t_k}{2}}.$$

Интерполяционные полиномы $L_{n-1/2}(f, t)$ полуцелого порядка имеют большинство свойств обычных тригонометрических интерполяционных полиномов по равноотстоящим точкам $t_i = \dfrac{2\pi i}{2n+1}$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$. Так, например, главные члены в оценках констант Лебега и функций Лебега совпадают. Нам же необходим результат о приближении абсолютно непрерывной антипериодической функции $f(t)$ интерполяционными полиномами $T_{n-1/2}(t)$ полуцелого порядка в пространстве L_1.

Лемма 5. *Если $f(t)$ — абсолютно непрерывная антипериодическая функция, то*

$$\left\| f - L_{n-1/2}(f) \right\|_1 \le \frac{2\ln n}{\pi n} \hat{E}_{n-1/2}(f')_1 + C\frac{\hat{E}_{n-1/2}(f')_1}{n}, \tag{17}$$

где $\hat{E}_{n-1/2}(f)_1$ — наилучшее приближение функции $f(t)$ тригонометрическими полиномами полуцелого порядка $n - 1/2$ в пространстве L_1, т. е.

$$\hat{E}_{n-1/2}(f)_1 = \inf_{T_{n-1/2}} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - T_{n-1/2}(t) \right| dt,$$

C — некоторая константа.

Лемма 5 доказывается точно так же, как и теорема 3 в работе [15].

Пусть $\tilde{E}_n(f)_1$ — наилучшее приближение 2π-периодической функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n. Поскольку антипериодическая функция $f(t)$ имеет период 4π, то функция $f(2t)$ является 2π-периодической и очевидно, что

$$\hat{E}_{n-1/2}(f)_1 = \tilde{E}_{2n-1}(f(2t))_1. \tag{18}$$

Обозначим через $MW^r H_1^\alpha$, $r = 0, 1, \ldots, \alpha \in (0, 1]$, класс антипериодических функций, r-я производная которых удовлетворяет условию

$$\int_0^{2\pi} \left| f^{(r)}(t+h) - f^{(r)}(t) \right| dt \le Mh^{\alpha}.$$

Тогда из неравенства (17) и равенства (18) следует оценка

$$\left\| f - L_{n-1/2}(f) \right\|_1 \le M \frac{C_r \ln n}{n^{r+\alpha}}, \tag{19}$$

где C_r — некоторая постоянная, зависящая от r.

3. План доказательства. Индуцированную функцию $f(\cos x) = \phi_{\rho+m}(\cos x)$ представим в виде

$$f(\cos x) = \sin^m x S_m(x) + R_m(x)$$

и аппроксимируем каждое слагаемое четным тригонометрическим полиномом. Функцию $\sin^m x S_m(x)$ будем приближать тригонометрическим полиномом $\sin^m x Q_n^m(x)$, где

$$Q_n^m(x) = \int_0^{\pi} \left[P_n(u-x) + (-1)^m P_n(u+x) \right] \sin^{\rho} u \phi(\cos u)\, du,$$

а $P_n(x) = P_n^r(x)$ — тригонометрический полином степени не выше $n-1$ наилучшего L_1-приближения ядра $D_r(x)$, т. е.

$$\left\| D_r - P_n^r \right\|_1 = \frac{K_r}{n^r}. \tag{20}$$

Лемма 6. *Для любого $r = m + \rho$ и $x \in (0, \pi)$ имеет место неравенство*

$$\left| S_m(x) - Q_n^m(x) \right| \le \frac{K_r \sin^{\rho} x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{\rho - 1}, \tag{21}$$

где C — некоторая константа.

Из неравенства (21) следует оценка приближения функции $\sin^m x S_m(x)$ в каждой точке интервала $(0, \pi)$:

$$\left| \sin^m x S_m(x) - \sin^m x Q_n^m(x) \right| \le \frac{K_r \sin^r x}{n^r} + \frac{C \ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{r-1}. \tag{22}$$

Используя равенство (5), по индукции докажем следующее утверждение.

Лемма 7. *Для любого $r > 0$ существует последовательность $T_n^m(x)$ четных тригонометрических полиномов степени не выше n таких, что*

$$\left| R_m(x) - T_n^m(x) \right| \le C_r \frac{\ln n}{n^{r+1}} (\sin x + 1/n)^{r-1}, \quad x \in (0, \pi), \tag{23}$$

где константа C_r зависит от r.

Для $m = 0$ утверждение леммы 7 следует из разностных свойств функции $R_0(x)$, указанных в лемме 1. Действительно, в этом случае в качестве многочленов $T_n^0(x)$ можно взять многочлены Джексона [16, с. 114], построенные для функции $R_0(x)$. Справедливость утверждения леммы 7 на $(k+1)$-м шаге осуществим с помощью леммы 8.

Лемма 8. *Пусть $g(x)$ — четная 2π-периодическая функция, производная которой удовлетворяет неравенству*

$$\left| g'(x) \right| \le l_n (\sin x + 1/n)^k, \quad x \in (0, \pi), \tag{24}$$

где l_n и k — некоторые положительные константы. Тогда существует три-

гонометрический многочлен $P_n(x)$ *степени не выше* $2ns$ (*целое число* s *выбрано так, что* $2s-k-1>1$) *такой, что*

$$\left|g(x)-P_n(x)\right| \le \frac{l_n C_k}{n}\sin(x+1/n)^k, \quad x\in(0,\pi), \tag{25}$$

где константа C_k *зависит от* k.

Из неравенств (22), (23) будет следовать оценка сверху для поточечного приближения функции $f(x)$.

4. Доказательство основных утверждений. Доказательство леммы 6 разобьем на две части. Покажем сначала, что

$$\left|S_m(t)-Q_n^m(t)\right| \le \frac{K_r\sin^\rho t}{n^r}+\frac{C\ln n}{n^{r+1}}\sin^{\rho-1}t. \tag{26}$$

Рассмотрим отклонение многочленов $Q_n^m(t)$ от $S_m(t)$ в каждой точке интервала $(0,\pi)$:

$$\left|S_m(t)-Q_n^m(t)\right| \le \left|\int_0^\pi \left[D_r(u-t)-P_n(u-t)+(-1)^m(D_r(u+t)-P_n(u+t))\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sin^\rho u\,\varphi(\cos u)\,du\right| \le$$

$$\le \int_0^\pi |D_r(u-t)-P_n(u-t)|\sin^\rho u\,du+\int_0^\pi |D_r(u+t)-P_n(u+t)|\sin^\rho u\,du := I_1+I_2.$$

Использовав неравенство (7) и точную оценку (20) [9, 10] величины наилучшего приближения ядра $D_r(u)$ в L_1 тригонометрическими полиномами $P_n(u)$, оценим интеграл

$$I_1 \le \sin^\rho t\int_0^\pi |D_r(u-t)-P_n(u-t)|\,du+$$

$$+2\sin^{\rho-1}t\int_0^\pi |D_r(u-t)-P_n(u-t)|\sin\frac{|u-t|}{2}\,du \le$$

$$\le \frac{K_r\sin^\rho t}{n^r}+2\sin^{\rho-1}t\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)\sin\frac{u}{2}-P_n(u)\sin\frac{u}{2}\right|du. \tag{27}$$

Многочлен $P_n(u)\sin\frac{u}{2}$ полуцелого порядка $n-1/2$ интерполирует функцию $D_r(u)\sin\frac{u}{2}$ в $2n$ равноотстоящих точках $\frac{\gamma_r}{n}+\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,\ldots,2n-1$, где $\gamma_r = 0$, если $r\in(0,1]$, а для $r>1$ числа γ_r определены при формулировке теоремы 1. Поскольку $D_r(u)\sin\frac{u}{2}$ принадлежит классу $MW^{m+1}H_1^\rho$, то в силу неравенства (19) имеем

$$\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)\sin\frac{u}{2}-P_n(u)\sin\frac{u}{2}\right|du \le \frac{C\ln n}{n^{r+1}}. \tag{28}$$

Из неравенств (27) и (28) получаем

$$I_1 \le \frac{K_r\sin^\rho t}{n^r}+\frac{C_r\ln n}{n^{r+1}}\sin^{\rho-1}t, \quad t\in(0,\pi). \tag{29}$$

Чтобы получить оценку интеграла I_2, применим неравенство (12):

$$I_2 < \frac{2\pi}{3}\sin^{\rho-1}t\int_0^{\pi}\left|D_r(u+t)-P_n(u+t)\right|\sin\frac{u+t}{2}du \le$$

$$\le \frac{2\pi}{3}\sin^{\rho-1}t\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)\sin\frac{u}{2}-P_n(u)\sin\frac{u}{2}\right|du \le \frac{C\ln n}{n^{r+1}}\sin^{\rho-1}t. \tag{30}$$

Из соотношений (29), (30) следует неравенство (26). А теперь докажем, что

$$\left|S_m(t)-Q_n^m(t)\right| \le \frac{K_r\sin^{\rho}t}{n^r}+\frac{C_r\ln n}{n^{r+\rho}}, \qquad t\in(0,\pi). \tag{31}$$

Как и в первом случае, начнем с неравенства

$$\left|S_m(t)-Q_n^m(t)\right| \le I_1+I_2.$$

Интеграл I_1 оценим, используя неравенство (11):

$$I_1 \le \sin^{\rho}t\int_0^{\pi}\left|D_r(u-t)-P_n(u-t)\right|du + 2^{\rho}\int_0^{\pi}\left|D_r(u-t)-P_n(u-t)\right|\sin^{\rho}\frac{|u-t|}{2}du \le$$

$$\le \frac{K_r\sin^{\rho}t}{n^r}+2^{\rho}\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)-P_n(u)\right|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du \le$$

$$\le \frac{K_r\sin^{\rho}t}{n^r}+2^{\rho}\left\{\int\limits_{u:\,\sin u/2\le 1/n}\left|D_r(u)-P_n(u)\right|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{u:\,\sin u/2>1/n}\left|D_r(u)-P_n(u)\right|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du\right\} \le \frac{K_r\sin^{\rho}t}{n^r}+\frac{2^{\rho}K_r}{n^{r+\rho}}+$$

$$+2^{\rho}n^{1-\rho}\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)-P_n(u)\right|\sin\frac{u}{2}du \le \frac{K_r\sin^{\rho}t}{n^r}+\frac{C\ln n}{n^{r+\rho}}, \qquad t\in(0,\pi). \tag{32}$$

Чтобы оценить интеграл I_2, применим неравенство (13):

$$I_2 < 2\int_0^{\pi}\left|D_r(u+t)-P_n(u+t)\right|\sin^{\rho}\frac{u+t}{2}du \le 2\int_0^{2\pi}\left|D_r(u)-P_n(u)\right|\sin^{\rho}\frac{u}{2}du \le \frac{C\ln n}{n^{r+\rho}}. \tag{33}$$

Из неравенств (32), (33) следует (31), а из неравенств (26) и (31) следует (20). Лемма 6 доказана.

***Доказательство леммы* 8.** Положим $t_i=\dfrac{\pi i}{n}$, $i=0,1,\ldots,n$, $L_i=g\left(\dfrac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)$, где $g(t)$ — четная 2π-периодическая функция. С помощью чисел L_i определим кусочно-постоянную четную 2π-периодическую функцию

$$F_n(g;t) = \begin{cases} L_i, & \text{если } t\in\left(t_i,t_{i+1}\right],\ i=1,2,\ldots,n-1,\\ L_0, & \text{если } t\in\left[t_0,t_1\right].\end{cases}$$

Так же, как в работе [17], функцию $F_n(g;t)$ представим в виде

$$F_n(g;t) = \sum_{i=1}^{n}\Delta L_i\Xi_{t_i}(t), \tag{34}$$

где $\Xi_{t_i}(t)$ — четная 2π-периодическая функция, для $i=1,2,\ldots,n-1$ определенная на отрезке $[0,\pi]$ равенством

$$\Xi_{t_i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \le t_i, \\ 0, & \text{если } t > t_i, \end{cases}$$

и $\Xi_{t_n}(t) = 1$, а

$$\Delta L_i = \begin{cases} L_{i-1} - L_i, & \text{если } i = 1, 2, \ldots, n-1, \\ L_{n-1}, & \text{если } i = n. \end{cases}$$

Для $t \in (t_i, t_{i+1}]$ в силу условия (24) получим

$$|g(t) - F_n(g; t)| \le \frac{Cl_n}{n}(\sin t + 1/n)^k \tag{35}$$

и

$$\left| L_{i-1} - L_i \right| \le \frac{Cl_n}{n}(\sin t_i + 1/n)^k. \tag{36}$$

Пусть $T_N(t_i; t)$ — четный тригонометрический многочлен [18] степени не выше $N \le 2sn$ такой, что

$$\left| \Xi_{t_i}(t) - T_N(t_i; t) \right| \le C_s \left(1 + n|t_i - t|\right)^{-2s+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{37}$$

где целое число s выбрано так, что $2s - k > 2$. Считая $T_N(t_n; t) = 1$, полагаем

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i T_N(t_i; t)$$

и, использовав неравенства (36), (37), рассмотрим отклонение многочлена $P_n(t)$ от функции $F_n(g; t)$ в каждой точке отрезка $[0, \pi]$:

$$|F_n(g; t) - P_n(t)| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} \Delta L_i \left(\Xi_{t_i}(t) - T_N(t_i; t)\right) \right| \le \frac{C_s l_n}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin^k t_i}{(1 + n|t_i - t|)^{2s-1}}. \tag{38}$$

Пусть $t \in (t_j, t_{j+1}]$. Тогда $\sin t_i < \sin t$, если $i = 1, 2, \ldots, j$ или $i = n - j$, $n - j + 1, \ldots, n-1$, и $\sin t_i \le \sin t + |t_i - t|$, если $i = j+1, \ldots, n-j-1$. В соответствии с этим сумму, стоящую в правой части неравенства (38), разобьем на две и оценим каждую из них:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\sin^k t_i}{(1 + n|t_i - t|)^{2s-1}} \le \sum_{i:\, \sin t_i < \sin t} \frac{\sin^k t}{(1 + n|t_i - t|)^{2s-1}} +$$

$$+ \sum_{i:\, \sin t_i \ge \sin t} \frac{\sin^k t_i}{(1 + n|t_i - t|)^{2s-1}} := \sum_1 + \sum_2,$$

$$\sum_1 \le \sin^k t \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{\left(1 + n|t_i - t_j|\right)^{2s-1}} + \sum_{i=n-j}^{n} \frac{1}{\left(1 + n|t_i - t_{j+1}|\right)^{2s-1}} \right) =$$

$$= \sin^k t \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{(1 + \pi|i - j|)^{2s-1}} + \sum_{i=n-j}^{n} \frac{1}{(1 + \pi|i - j - 1|)^{2s-1}} \right) = C \sin^k t, \tag{39}$$

$$\sum_2 \le \sum_{i=j+1}^{n-j-1} \frac{(\sin t + |t_i - t|)^k}{\left(1 + n|t_i - t|\right)^{2s-1}} \le 2^k \sin^k t \sum_{i=j+1}^{n-j-1} \frac{1}{(1 + \pi|i - j - 1|)^{2s-1}} +$$

$$+\frac{2^k}{n^k}\sum_{i=j+1}^{n-j-1}\frac{\left(n|t_i-t|\right)^k}{\left(1+n|t_i-t|\right)^{2s-1}} \le C_k\sin^k t+\frac{2^k}{n^k}\sum_{i=j+1}^{n-j-1}\frac{1}{\left(1+\pi|i-j-1|\right)^{2s-k-1}} \le$$

$$\le C_k\sin^k t+\frac{C_k}{n^k} = C_k\left(\sin t+1/n\right)^k. \tag{40}$$

Из оценок (35) и (38) – (40) следует неравенство (25). Лемма 8 доказана.

***Доказательство леммы* 7.** Как уже отмечалось, из леммы 1 следует справедливость леммы 7 для $m=0$. Пусть утверждение леммы 7 имеет место для индекса $m=k$, т. е. существует тригонометрический многочлен степени не выше n такой, что

$$\left|R_k(x)-T_n^k(x)\right| \le \frac{C_k\ln n}{n^{k+\rho+1}}(\sin x+1/n)^{k+\rho-1}.$$

Следовательно,

$$\sin x\left|R_k(x)-T_n^k(x)\right| \le \frac{C_k\ln n}{n^{k+\rho+1}}(\sin x+1/n)^{k+\rho}. \tag{41}$$

Пусть Q_n^{k+1} — тригонометрический многочлен, удовлетворяющий неравенству (21) для $m=k+1$:

$$\left|S_{k+1}(x)-Q_n^{k+1}(x)\right| \le \frac{K_{\rho+k+1}\sin^\rho x}{n^{k+\rho+1}}+\frac{C\ln n}{n^{\rho+k+2}}(\sin x+1/n)^{\rho-1}. \tag{42}$$

Определим четный тригонометрический многочлен $U_n(x)$ так, чтобы

$$U_n'(x) = \sin x\, T_n^k(x) + (k+1)\cos x\sin^k x\, Q_n^{k+1}(x).$$

Тогда, используя равенство (5), получаем

$$\frac{d}{dx}\Big(R_{k+1}+U_n(x)\Big) = -\sin x\Big(R_k(x)-T_n^k(x)\Big) - (k+1)\cos x\sin^k x\Big(S_{k+1}(x)-Q_n^{k+1}(x)\Big).$$

Из неравенств (41), (42) следует оценка

$$\left|\frac{d}{dx}\Big(R_{k+1}+U_n(x)\Big)\right| \le \frac{C_k\ln n}{n^{\rho+k+1}}(\sin x+1/n)^{k+\rho}.$$

Таким образом, для функции $g(x)=R_{k+1}+U_n(x)$ выполняется условие (24) леммы 8 при условии, что $l_n = C_k n^{-k-\rho-1}\ln n$. Следовательно, существует тригонометрический полином $P_n(x)$ степени не выше $2ns$ такой, что

$$\left|R_{k+1}(x)+U_n(x)-P_n(x)\right| \le \frac{C_k\ln n}{n^{\rho+k+2}}(\sin x+1/n)^{k+\rho}. \tag{43}$$

Учитывая зависимость от n правой части неравенства (43) (может быть увеличив при этом константу C_k), можно считать, что степень полинома $U_n(x)-P_n(x)$ не выше n. Лемма 7 доказана.

5. О точности константы в главном члене неравенства (3). Покажем, что константу K_r в неравенстве (3) уменьшить нельзя. Введем класс $W^r_{(-\infty,\infty)}$ функций $f(x)$, представимых в виде

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-\infty}^{x}(x-t)^{r-1}\phi(t)\,dt, \qquad -\infty < x < \infty,$$

где $r>0$, $\phi(t)$ измерима и почти всюду не превышает 1.

Очевидно, что функции из класса W^r можно рассматривать как следы функций из класса $W^r_{(-\infty,\infty)}$: для этого необходимо функции $\phi(t)$ в представлении (1) доопределить нулем для $|t| > 1$. Кроме того, класс $W^r_{(-\infty,\infty)}$ содержит [19, с. 266] класс $\tilde{W}^r$ 2π-периодических функций, имеющих ограниченную почти всюду единицей производную $\phi(t)$ порядка r с нулевым средним значением. Любую функцию $f \in \tilde{W}^r$ можно представить в виде

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_r(x-t)\phi(t)\,dt.$$

Обозначая через $\tilde{E}_n(f)_C$ наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше $n-1$ в равномерной метрике, приведем равенство, полученное В. К. Дзядыком [9, 10] для дробного r:

$$\tilde{E}_n\left(\tilde{W}^r\right)_C := \sup_{f\in\tilde{W}^r} \tilde{E}_n(f)_C = \frac{K_r}{n^r}, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{44}$$

Через $E_n(f; a, b)_C$ будем обозначать наилучшее приближение на отрезке $[a, b]$ функции f алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$ в равномерной метрике, через $A_n(f)_C$ — наилучшее приближение на $(-\infty, \infty)$ функции $f \in W^r_{(-\infty,\infty)}$ целыми функциями конечной степени, меньшей либо равной n, в равномерной метрике. Пусть

$$C_{r,n} = \sup_{f\in W^r(-\infty,\infty)} n^r E_n(f; -1, 1)_C.$$

Любую функцию $f \in W^r_{(-\infty,\infty)}$ для $x \in [-1, 1]$ можно представить в виде $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-1}^{x} (x-t)^{r-1}\phi(t)\,dt, \qquad -1 \le x \le 1,$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_{-\infty}^{-1} (x-t)^{r-1}\phi(t)\,dt, \qquad -1 \le x \le 1.$$

Очевидно, что $f_1(x) \in W^r$, и нетрудно показать, что $E_n(f_2; -1, 1)_C \le \dfrac{d_r}{n^{2r}}$, где константа d_r не зависит от f. Поэтому

$$C_{r,n} = \sup_{f\in W^r} n^r E_n(f; -1, 1)_C$$

и в силу неравенства (3)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, C_{r,n} \le K_r. \tag{45}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $W^r_{(-\infty,\infty)}$, $f_n(x) = f\left(\dfrac{n}{\sigma+1}t\right)$, $\sigma > 0$. Учитывая, что производная дробного порядка функции $f(at)$, $a > 0$, не превышает почти всюду числа a^r, в силу определения чисел $C_{r,n}$, получаем

$$E_n(f; -n/(\sigma+1), n/(\sigma+1))_C = E_n(f_n; -1, 1)_C \le \left(\frac{n}{1+\sigma}\right)^r \frac{C_{r,n}}{n^r} = \frac{C_{r,n}}{(1+\sigma)^r}.$$

Поскольку [20, с. 390 – 395]

$$A_1(f) = \lim_{\sigma \to 0} \lim_{n \to \infty} E_n\bigl(f; -n/(\sigma+1), n/(\sigma+1)\bigr)_C,$$

то $A_1(f) \le \underline{\lim}_{n \to \infty} C_{r,n}$ и, следовательно,

$$\sup_{f \in W^r_{(-\infty,\infty)}} A_1(f)_C \le \underline{\lim}_{n \to \infty} C_{r,n} \le \underline{\lim}_{n \to \infty} \sup_{f \in W^r} n^r E_n(f_n; -1, 1)_C. \tag{46}$$

Учитывая включение $\tilde{W}^r \subset W^r_{(-\infty,\infty)}$, из равенства (44) получаем [20, с. 374]

$$\sup_{f \in W^r_{(-\infty,\infty)}} A_1(f)_C \ge K_r. \tag{47}$$

Из соотношений (45) – (47), следует равенство

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{f \in W^r} n^r E_n(f; -1, 1)_C = K_r.$$

1. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**. – С. 295 – 322.
2. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
3. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами на отрезке // Докл. АН СССР. – 1966. – **166**, № 2. – С. 281 – 283.
4. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1971. – **9**, № 4. – С. 441 – 447.
5. *Корнейчук Н. П., Половина А. И.* О приближении непрерывных функций алгебраическими многочленами // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 328 – 340.
6. *Лигун А. А.* О наилучшем приближении дифференцируемых функций алгебраическими многочленами // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 4. – С. 53 – 60.
7. *Темляков В. Н.* Приближение функций из класса W^1_∞ алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 4. – С. 597 – 602.
8. *Тригуб Р. М.* Прямые теоремы о приближении алгебраическими полиномами гладких функций на отрезке // Там же. – 1993. – **54**, № 6. – С. 113 – 121.
9. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-производную $(0 < s < 1)$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**. – С. 135 – 162.
10. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1959. – **23**. – С. 933 – 950.
11. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
12. *Шалашова Л. Я.* Аппроксимационная теорема А. Ф. Тимана для функций, имеющих непрерывную производную дробного порядка // Докл. АН СССР. – 1969. – **188**, № 6. – С. 1248 – 1249.
13. *Моторный В. П.* Приближение интегралов дробного порядка алгебраическими многочленами. I // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 603 – 613.
14. *Турецкий А. Х.* Теория интерполирования в задачах. – Минск: Вышейш. шк., 1977. – 256 с.
15. *Моторный В. П.* Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1 // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 781 – 786.
16. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.
17. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **38**, № 4. – С. 874 – 899.
18. *Брудный Ю. А.* Обобщение одной теоремы А. Ф. Тимана // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 6. – С. 1237 – 1240.
19. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
20. *Бернштейн Н. С.* Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – Т. 2. – 627 с.

Получено 21.10.97