УДК 519.46

П. А. Шварцман (Одесса)

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛИДСКОГО О ЛОКАЛИЗАЦИИ СПЕКТРА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Products $C = AB$ of Hermitian operators in the n-dimensional unitary space are considered. Two equivalent localization theorems are proved in the case where one of the factors A and B is positive definite.

Розглядаються добутки $C = AB$ ермітових операторів у n-вимірному унітарному просторі. Доведено дві еквівалентні локалізаційні теореми у випадку, коли один із співмножників A чи B є додатно визначеним.

В 1950 г. В. Б. Лидский в [1] решил следующую задачу.

Пусть X — произвольный оператор *с вещественным спектром* в n-мерном унитарном пространстве. Каждому такому оператору ставится в соответствие вектор $s(X) = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, где $x_1 \geq \ldots \geq x_n$ — собственные числа X. Требуется локализовать множество $\mathbf{\Gamma} = \{s(AB)\}$, где A и B пробегают независимо друг от друга классы подобных между собой эрмитово положительных операторов с заданными спектрами:

$$s(A) = \operatorname{col}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad s(B) = \operatorname{col}(\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

В работе [1] установлено, что множество

$$\ln \mathbf{\Gamma} = \{\zeta : \zeta = \operatorname{col}(\ln\gamma_1, \ldots, \ln\gamma_n),\ \operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{\Gamma}\}$$

является подмножеством пересечения $\mathbf{K}$ двух выпуклых многогранников $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ с вершинами соответственно $\operatorname{col}(\ln\alpha_1 + \ln\beta_{k_1}, \ldots, \ln\alpha_n + \ln\beta_{k_n})$, $\operatorname{col}(\ln\beta_1 + \ln\alpha_{k_1}, \ldots, \ln\beta_n + \ln\alpha_{k_n})$, где $k_1, \ldots, k_n$ — всевозможные перестановки индексов $1, \ldots, n$. Постановка задачи локализации спектров в приведенной выше геометрической формулировке принадлежит И. М. Гельфанду [2]. Позже в [3] получены двойственные описания многогранников $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ в форме систем неравенств. Полные доказательства перечисленных результатов и доказательство эквивалентности описаний локализующего множества $\mathbf{K}$ содержатся в [4]. В работе [5] А. С. Маркус обобщил эти результаты на вполне непрерывные линейные операторы в гильбертовом пространстве. Работа [5] содержит обзор других обобщений результатов теоремы Лидского и более полный список публикаций.

В настоящей работе получена теорема локализации спектра произведения эрмитовых операторов с заданными спектрами сомножителей в той же постановке, но теперь предполагается, что только один оператор-сомножитель является эрмитово положительным, а второй может иметь произвольную сигнатуру $p-q$ (предполагается лишь его невырожденность: $p+q=n$). Метод, примененный в данной работе, является новым и достаточно универсальным. Он позволил получить ряд аналогичных результатов для сумм и произведений операторов в конечномерных пространствах с индефинитной метрикой [6], а также новые, более простые, доказательства известных теорем о локализации спектра суммы эрмитовых операторов [1, 7] и спектра произведения унитарных операторов [8, 9].

Особого внимания заслуживает лемма 4, открывающая путь к постановке и решению задач рассматриваемого типа для операторов, спектры которых не расположены целиком на вещественной оси или на единичной окружности (такие задачи до настоящего времени не ставились).

1. В настоящей работе рассматриваются операторы, действующие в n-мерном унитарном пространстве.

Обозначим через $\mathbf{H}_0$ множество неособенных эрмитовых операторов, через $\mathbf{H}^+$ — подмножество эрмитово положительных операторов, через $\mathbf{H}^{p,q}$ — подмножество эрмитовых операторов с заданной сигнатурой $p-q$ (в частности, $\mathbf{H}^{n,0} = \mathbf{H}^+$).

Каждому оператору $X \in \mathbf{H}^{p,q}$ поставим в соответствие вектор $\mathbf{s}(X) = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1 \geq \ldots \geq x_p$ — положительные собственные числа X, $-x_{p+1} \leq \ldots \leq -x_n$ — отрицательные собственные числа X. Вектор $\mathbf{s}(X)$ однозначно определяется по оператору X. Обратно, любой вектор $x = \operatorname{col}(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ такой, что $x_1 \geq \ldots \geq x_p, x_{p+1} \geq \ldots \geq x_n$, может рассматриваться как $\mathbf{s}(X)$, где X пробегает множество подобных между собой эрмитовых операторов с заданной сигнатурой $p-q$: все такие операторы имеют одни и те же собственные числа $x_1, \ldots, x_p, -x_{p+1}, \ldots, -x_n$. Как известно [4, с. 281], произвольный оператор X вида $X = AB$, где $A \in \mathbf{H}^+$, $B \in \mathbf{H}^{p,q}$, имеет вещественный спектр, содержащий p положительных и q отрицательных элементов. Поэтому определение вектора $\mathbf{s}(X)$ можно распространить и на операторы такого вида.

Будем пользоваться обозначениями:

$$\overset{>}{\mathbb{R}}{}_n^+ = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n), x_1 \geq \ldots \geq x_n (> 0)\},$$

$$\overset{>}{\mathbb{R}}{}^{p,q} = \{x = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+ : x_1 \geq \ldots \geq x_p, x_{p+1} \geq \ldots \geq x_n\}.$$

В этих обозначениях цель настоящей работы формулируется следующим образом:

по заданной паре векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \overset{>}{\mathbb{R}}{}_n^+$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \overset{>}{\mathbb{R}}{}^{p,q}$ *локализовать множество*

$$\mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta) = \{\gamma = \operatorname{col}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : \gamma = \mathbf{s}(AB),$$

$$A \in \mathbf{H}^+,\ B \in \mathbf{H}^{p,q},\ \mathbf{s}(A) = \alpha,\ \mathbf{s}(B) = \beta\}.$$

Решение поставленной задачи содержится в двух следующих теоремах.

Теорема 1. *Множество* $\ln \mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta) = \{\operatorname{col}(\ln \gamma_1, \ldots, \ln \gamma_n) : \gamma \in \mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta)\}$ *является подмножеством выпуклой оболочки* $\mathbf{K}$ *векторов*

$$\operatorname{col}(\ln \beta_1 + \ln \alpha_{k_1}, \ldots, \ln \beta_n + \ln \alpha_{k_n}), \tag{1}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ *— всевозможные перестановки индексов* $1, \ldots, n$.

В случае положительно определенного оператора B ($p = n$, $q = 0$) сомножители A и B равноправны, и их можно поменять местами. В этом случае теорема 1 допускает усиленную формулировку.

Множество $\ln \mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta)$ *является подмножеством пересечения* $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2$ *двух многогранников*:

$$\mathbf{K}_1 = \operatorname{conv}\{\operatorname{col}(\ln \beta_1 + \ln \alpha_{k_1}, \ldots, \ln \beta_n + \ln \alpha_{k_n})\},$$

$$\mathbf{K}_2 = \operatorname{conv}\{\operatorname{col}(\ln \alpha_1 + \ln \beta_{k_1}, \ldots, \ln \alpha_n + \ln \beta_{k_n})\},$$

где $k_1, \ldots, k_n$ *— всевозможные перестановки индексов* $1, \ldots, n$.

Это — теорема Лидского [4, с. 559] (теорема 11).

Теорема 2. *При нумерации по правилу, указанному в определении вектора* $s(C)$, *собственные числа* γ_k, $-\gamma_l$, $k = 1, \ldots, p$, $l = p+1, \ldots, n$, *произведения* $C = AB$ *связаны с собственными числами* α_k, $-\alpha_l$, β_k, $-\beta_l$ *сомножителей* $A \in \mathbf{H}^+$, $B \in \mathbf{H}^{p,q}$ *следующими эквивалентными между собой системами соотношений*:

при любом $r = 1, \ldots, n-1$ *и любом наборе индексов* $(1 \le) j_1 < \ldots < j_r (\le n)$

$$\gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_r} \le \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_r} \alpha_1 \ldots \alpha_r, \quad \gamma_1 \ldots \gamma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1 \ldots \beta_n, \tag{2}$$

$$\gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_r} \ge \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_r} \alpha_n \ldots \alpha_{n-r+1}, \quad \gamma_1 \ldots \gamma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1 \ldots \beta_n. \tag{3}$$

Ниже, в п. 3, доказано, что три формы (1)–(3) локализации множества $\mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta)$ эквивалентны.

В случае положительной определенности оператора B, $p = n$, $q = 0$ сомножители A и B можно поменять местами. В этом случае справедливо следующее усиление теоремы 2.

Собственные числа произведения $C = AB$ *связаны с собственными числами сомножителей* $A, B \in \mathbf{H}^+$ *системами соотношений* (2), (3), *а также эквивалентными между собой системами соотношений*:

$$\gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_r} \le \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_r} \beta_1 \ldots \beta_r, \quad \gamma_1 \ldots \gamma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1 \ldots \beta_n,$$

$$\gamma_{j_1} \ldots \gamma_{j_r} \ge \alpha_{j_1} \ldots \alpha_{j_r} \beta_n \ldots \beta_{n-r+1}, \quad \gamma_1 \ldots \gamma_n = \alpha_1 \ldots \alpha_n \beta_1 \ldots \beta_n.$$

Эта теорема совпадает с теоремой 9 из [4, с. 554].

Замечание. В формулировке этой теоремы в [4] последние соотношения пропущены (видимо, по недосмотру). В действительности они там подразумеваются и вытекают из равноправия сомножителей.

2. Доказательство теоремы 1 разобьем на этапы, которые для удобства ссылок сформулируем в виде ряда вспомогательных предложений.

Пусть $\gamma_0 = \operatorname{col}(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0)$ — произвольный элемент множества $\mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta)$:

$$\gamma_0 = s(A_0 B_0), \quad s(A_0) = \alpha, \quad s(B_0) = \beta.$$

Положим $A_0 B_0 = C_0$ $(s(C_0) = \gamma_0)$. Первый сомножитель $A_0 \in \mathbf{H}^+$ можно единственным образом представить в виде $A_0 = \exp H$, где H — эрмитов оператор.

Заметим, что

$$s(H) = \ln \alpha, \tag{4}$$

где $\ln \alpha = (\ln \alpha_1, \ldots, \ln \alpha_n)$ (такие обозначения будем применять и к другим векторам, и к множествам векторов с положительными координатами). По закону инерции второй сомножитель $B_0 \in \mathbf{H}^{p,q}$ можно представить в виде $B_0 = GJG^*$, где G — некоторый обратимый оператор, $J = \operatorname{diag}(I_p, -I_q)$, I_p, I_q — тождественные операторы в $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$. Имеем $C_0 = (\exp H) GJG^*$. Ввиду того, что предметом исследования является не сам оператор C_0, а его спектр, можно вместо C_0 рассматривать подобный ему оператор $C = JP$, где $P = G^*(\exp H) G \in \mathbf{H}^+$.

Наряду с P и $C = JP$ введем в рассмотрение аналитические на [0, 1] оператор-функции $P(t) = G^*(\exp Ht) G$, $C(t) = JP(t)$, $0 \le t \le 1$. Заметим, что

$$C(0) = JG^*G, \quad s(C(0)) = s(GJG^*) = s(B_0) = \beta, \tag{5}$$

$$C(1) = C, \quad s(C(1)) = s(C) = s(C_0) = \gamma_0. \tag{6}$$

Лемма 1. *При каждом $t \in [0, 1]$ оператор $C(t)$ имеет вещественный спектр, состоящий из p положительных элементов $\{\gamma_k(t)\}_{k=1}^{p}$ и q отрицательных элементов $\{-\gamma_l(t)\}_{l=p+1}^{n}$, и полную J-ортонормированную систему собственных векторов $\xi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$:*

$$\begin{aligned} &\left(J\xi_{k'}(t), \xi_{k''}(t)\right) = \delta_{k'k''}, \quad k', k'' = 1, \ldots, p; \\ &\left(J\xi_{l'}(t), \xi_{l''}(t)\right) = -\delta_{l'l''}, \quad l', l'' = p+1, \ldots, n; \\ &(J\xi_k(t), \xi_l(t)) = 0, \quad k = 1, \ldots, p; \quad l = p+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7}$$

Система векторов

$$\eta_j(t) = \frac{\exp(H\,t/2)\,G\xi_j(t)}{\sqrt{\gamma_j(t)}} \tag{8}$$

ортонормирована при каждом $t \in [0, 1]$: $(\eta_j(t), \eta_k(t)) = \delta_{jk}$, $j, k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. При каждом $t \in [0, 1]$ оператор $C(t) = JP(t)$ представляет собой произведение J на эрмитово положительный оператор $P(t)$. Такие операторы описаны в [4, с. 281] (теорема 8); из доказательства следует, что оператор $JP(t)$ при каждом t подобен оператору $P^{1/2}(t)JP^{1/2}(t)$, конгруэнтному J. Отсюда и из закона инерции для эрмитовых форм вытекает, что $JP(t)$ имеет при всех t вещественный спектр и сигнатуру $p-q$. Там же доказано утверждение, относящееся к собственным векторам.

Заключительная часть леммы непосредственно проверяется. Ввиду (7), (8) и того, что $P(t) = JC(t)$, имеем

$$\begin{aligned} (\eta_i(t), \eta_j(t)) &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_i(t)\,\gamma_j(t)}}\left(\exp(Ht/2)G\xi_i(t), \exp(Ht/2)G\xi_j(t)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_i(t)\,\gamma_j(t)}}\left(P(t)\xi_i(t), \xi_j(t)\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma_i(t)\,\gamma_j(t)}}\left(JC(t)\xi_i(t), \xi_j(t)\right) = \\ &= \left|\left(J\xi_i(t), \xi_j(t)\right)\right| = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Лемма 2. *Собственные числа $\gamma_k(t)$, $-\gamma_l(t)$, $k = 1, \ldots, p$, $l = p+1, \ldots, n$, оператора $C(t)$ и соответствующие нормированные собственные векторы $\xi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, рассматриваемые как функции аргумента $t \in [0, 1]$, можно определить и занумеровать так, чтобы для них оказались выполненными следующие предложения.*

1°. *Функции $\gamma_j(t)$ непрерывны на* $[0, 1]$.

2°. $\gamma_1(t) \geq \ldots \geq \gamma_p(t)$; $\gamma_{p+1}(t) \geq \ldots \geq \gamma_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$.

3°. *Если оператор B_0 не имеет кратных собственных чисел, то функции $\gamma_j(t)$ и вектор-функции $\xi_j(t)$ кусочно-аналитичны на* $[0, 1]$, $j = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Утверждение 1° справедливо для любой непрерывной оператор-функции. Утверждение 2° вытекает из 1° и того, что оно выполнено при $t = 0$. Переходя к заключительному утверждению леммы, заметим, что из аналитичности на [0, 1] оператор-функции $C(t)$ вытекает аналитичность на [0, 1] дискриминанта $\Delta(t)$ характеристического уравнения $\det(C(t) - \lambda I) = 0$. По этой причине дискриминант $\Delta(t)$ может быть либо тождественно равным нулю, либо иметь на [0, 1] не более конечного количества нулей. По предположению оператор $C(0) = B_0$ не имеет кратных собственных чисел $(\Delta(0) \neq$

$\neq 0$) и осуществляется вторая возможность. Таким образом, оператор $C(t)$ может иметь кратный спектр не более, чем на конечном множестве значений аргумента. Известно [10, с. 446], что собственные числа и нормированные собственные векторы аналитической оператор-функции аналитичны в окрестности любого значения аргумента, при котором собственные числа некратны.

***Следствие* 1.** *При каждом значении аргумента t вектор $\mathbf{s}(C(t))$ совпадает с $\operatorname{col}(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. В частности,*

$$\gamma_j(0) = \beta_j, \quad \gamma_j(1) = \gamma_j^0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Лемма 3. *Если оператор B_0 не имеет кратных собственных чисел, то величины $\ln \gamma_j^0$ допускают интегральное представление*

$$\ln \gamma_j^0 = \ln \beta_j + \int_0^1 \left(H\eta_j(t), \eta_j(t)\right) dt, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

где $\eta_j(t)$ — вектор-функции, кусочно-непрерывные на $[0, 1]$ и образующие при каждом $t \in [0, 1]$ ортонормированную систему.

***Доказательство*.** Из (7) вытекает, что $\gamma_j(t) = (P(t)\xi_j(t), \xi_j(t))$, $0 \leq t \leq 1$, $j = 1, \ldots, n$. При условиях леммы функции $\gamma_j(t)$, $\xi_j(t)$ кусочно-аналитичны на $[0, 1]$. Дифференцируя, получаем

$$\gamma_j'(t) = (P'(t)\xi_j(t), \xi_j(t)) + \left(\xi_j'(t), P(t)\xi_j(t)\right) + \left(P(t)\xi_j(t), \xi_j'(t)\right) =$$

$$= (P'(t)\xi_j(t), \xi_j(t)) + \gamma_j(t)\frac{d}{dt}\left(J\xi_j(t), \xi_j(t)\right) = (P'(t)\xi_j(t), \xi_j(t)) =$$

$$= (G^*H\exp(Ht)G\xi_j(t), \xi_j(t)) = \gamma_j(t)(H\eta_j(t), \eta_j(t)),$$

где $\eta_j(t)$ — векторы, ортонормированные при каждом $t \in [0, 1]$ в силу леммы 1. Таким образом, почти всюду на $[0, 1]$

$$\frac{d}{dt}\ln \gamma_j(t) = (H\eta_j(t), \eta_j(t)), \quad j = 1, \ldots, n, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

С учетом (9) последнее соотношение приводит к (10).

***Следствие* 2.** *Если оператор B_0 не имеет кратных собственных чисел, то вектор $\ln \gamma_0$ допускает интегральное представление*

$$\ln \gamma_0 = \ln \beta + \int_0^1 \operatorname{col}((H\eta_1(t), \eta_1(t)), \cdots, (H\eta_n(t), \eta_n(t)))\, dt, \tag{11}$$

где $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ — кусочно-непрерывные вектор-функции, образующие ортонормированную систему при каждом $t \in [0, 1]$.

Интегральное представление (11) сводит задачу локализации множества $\boldsymbol{\Gamma}(\alpha, \beta)$ к задаче локализации многомерного числового образа $h(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \operatorname{col}((H\eta_1(t), \eta_1(t)), \cdots, (H\eta_n(t), \eta_n(t)))$ эрмитова оператора H на множестве ортонормированных систем $\{\eta_j\}_{j=1}^n$. Следующее предложение дает решение этой задачи для произвольных нормальных операторов.

Лемма 4. *Пусть A — нормальный оператор со спектром $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ и $\mathbf{A}$ — множество значений вектора*

$$a(x_1, \ldots, x_n) = \operatorname{col}((Ax_1, x_1), \ldots, (Ax_n, x_n))$$

на всевозможных ортонормированных системах векторов $\{x_j\}_{j=1}^n$. Тогда:

1°. *Любой вектор* $a(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}$ *допускает представление*

$$a(x_1, \ldots, x_n) = Y(x_1, \ldots, x_n)\,\lambda, \tag{12}$$

где $Y(x_1, \ldots, x_n)$ — *некоторая двоякостохастическая матрица.*

2°. *Множество* $\mathbf{A}$ *является подмножеством выпуклой оболочки векторов* $\operatorname{col}\left(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}\right)$, *где* $j_1, \ldots, j_n$ — *всевозможные перестановки индексов* $1, \ldots, n$.

Доказательство. Нормальный оператор A унитарно эквивалентен своей диагональной форме Λ и, таким образом, $\mathbf{A}$ совпадает с множеством значений вектора $\lambda(y_1, \ldots, y_n) = \operatorname{col}((\Lambda y_1, y_1), \ldots, (\Lambda y_n, y_n))$ на всевозможных ортонормированных системах $\{y_j\}_{j=1}^n$. Полагая $y_j = \operatorname{col}\left(\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_n}\right)$, $j = 1, \ldots, n$, имеем

$$\lambda(y_1, \ldots, y_n) = Y\lambda, \tag{13}$$

где $Y = \left(\left|y_{j_k}\right|^2\right)_{j,k=1}^n$, $\lambda = \operatorname{col}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В силу ортонормированности системы $\{y_j\}_{j=1}^n$ матрица $\left(y_{j_k}\right)_{j,k=1}^n$ — унитарна, а Y — двоякостохастическая матрица.

Тем самым доказано утверждение 1°.

Утверждение 2° вытекает из теоремы Биркгофа (см., например, [4, с. 556], лемма 9), согласно которой множество двоякостохастических матриц представляет собой выпуклую оболочку множества $\mathbf{U}$ матриц-перестановок. Из нее следует, что матрица Y допускает представление

$$Y = \sum_{i=1}^{n!} \tau_i U_i, \quad U_i \in \mathbf{U}, \quad \tau_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n!} \tau_i = 1. \tag{14}$$

Подстановка (14) в (13) дает $\lambda(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n!} \tau_i U_i \lambda$. Векторы $U_i\lambda$ — векторы, получаемые из λ всевозможными перестановками координат.

Замечание. Приведенная формулировка леммы 4 описывает свойство многомерной числовой области оператора, что представляет самостоятельный интерес. Ниже будем пользоваться более общим утверждением, вытекающим из доказательства п. 2° этой леммы.

Произвольный вектор v *вида*

$$v = Su, \tag{15}$$

где S — *двоякостохастическая матрица,* $u = \operatorname{col}(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$, *принадлежит выпуклой оболочке векторов, полученных из* u *всевозможными перестановками координат:*

$$v \in \operatorname{conv}\{\operatorname{col}(u_{k_1}, \ldots, u_{k_n})\}, \tag{16}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — *перестановки индексов* $1, \ldots, n$.

***Доказательство теоремы* 1.** Предположим сначала, что оператор B_0 не имеет кратных собственных чисел. Тогда для вектора $\gamma_0 = \mathbf{s}(C_0)$ справедливо представление (11), в котором векторы $\eta_1(t), \ldots, \eta_n(t)$ образуют ортонормированную систему при каждом $t \in [0, 1]$. Мы можем применить к подынтегральной функции в (11) лемму 4, п. 1°. С учетом (4) получим представление

$$\ln\gamma_0 = \ln\beta + \int_0^1 Y(\eta_1(t), \cdots, \eta_n(t))\,dt\,\ln\alpha, \tag{17}$$

в котором подынтегральная матрица-функция является двоякостохастической при каждом $t \in [0, 1]$. Из определения двоякостохастической матрицы непосредственно следует, что и интеграл S в правой части (17) — двоякостохастическая матрица.

Теперь (17) можно переписать в виде

$$\ln \gamma_0 = \ln \beta + S \ln \alpha, \qquad S \text{— двоякостохастическая.} \tag{18}$$

Второе слагаемое в правой части этого соотношения имеет вид (15), и в силу (16), (18)

$$\ln \gamma_0 = \ln \beta + \operatorname{conv}\{\operatorname{col}(\ln \alpha_{k_1}, \ldots, \ln \alpha_{k_n})\},$$

где $k_1, \ldots, k_n$— всевозможные перестановки индексов $1, \ldots, n$.

Иными словами, вектор $\ln \gamma_0$ допускает представление

$$\ln \gamma_0 = \ln \beta + \sum_{i=1}^{n!} \tau_i \ln \alpha^{(i)} = \sum_{i=1}^{n!} \tau_i \left(\ln \beta + \ln \alpha^{(i)}\right), \qquad \tau_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n!} \tau_i = 1, \tag{19}$$

где $\alpha^{(i)}$ — всевозможные векторы, полученные из α перестановкой координат (i — номер перестановки).

Из (19) следует, что $\ln \gamma_0$ принадлежит выпуклой оболочке $\mathbf{K}$ векторов (1). Вследствие произвольности вектора $\gamma_0 \in \mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta)$ получаем, что $\ln \mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta) \subset \subset \mathbf{K}$.

В силу замкнутости $\mathbf{K}$ последнее утверждение остается в силе в общем случае (без предположения об отсутствии у B_0 кратных собственных чисел).

3. Теорема 1 характеризует выпуклый многогранник $\mathbf{K}$, локализующий множество $\ln \mathbf{\Gamma}(\alpha, \beta)$, как выпуклую оболочку своих вершин (1). Специфический вид вершин (1) позволяет в явном виде охарактеризовать $\mathbf{K}$ двойственным образом как пересечение полупространств и установить тем самым систему неравенств, связывающих собственные числа произведения AB с собственными числами сомножителей. Основой такого двойственного подхода являются понятия и свойства векторной мажоранты и миноранты (см., например, [5, с. 96, 97]).

Вектор $a = \operatorname{col}(a_1, \ldots, a_n)$ называется *мажорантой* вектора $b = \operatorname{col}(b_1, \ldots \ldots, b_n)$ (пишут $b \prec a$), если $b_{j_1} + \ldots + b_{j_r} \leq \max(a_{k_1} + \ldots + a_{k_r})$ при любых наборах индексов $r = 1, \ldots, n-1$, $(1 \leq) j_1 < \ldots < j_r (\leq n)$, $(1 \leq) k_1 < \ldots < k_r (\leq n)$ и если, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k. \tag{20}$$

Аналогично, вектор a называется *минорантой* вектора b (пишут $b \succ a$), если $b_{j_1} + \ldots + b_{j_r} \geq \min(a_{k_1} + \ldots + a_{k_r})$ (индексы r, $j_1, \ldots, j_r$, $k_1, \ldots, k_r$ пробегают те же значения, что и выше) и если, кроме того, имеет место (20).

Замечание. Общепринятые обозначения $\prec$ и $\succ$ для мажоранты и миноранты (на наш взгляд, крайне неудачные) могут ввести читателя в заблуждение. Следует четко понимать, что соотношения $\prec$, $\succ$ *не являются соотношениями порядка*. Так, из $x \prec y$ не следует $y \succ x$ (это видно на примере $x = \operatorname{col}(6, 3)$, $y = \operatorname{col}(7, 2)$; из $x \prec y$, $y \prec x$ не следует $x = y$ (это видно на том же примере); из $x - y \prec \alpha$ не следует $x \prec \alpha + y$ (пример: $x = \operatorname{col}(8, 5)$, $y = \operatorname{col}(7, 2)$, $\alpha = \operatorname{col}(0, 4)$).

Следующие два предложения описывают некоторые свойства соотношений

$x \prec a$, $x \succ a$, $x - b \prec a$, $x - b \succ a$ в случае, когда $a = \mathrm{col}\,(a_1, \ldots, a_n)$, $b = \mathrm{col}\,(b_1, \ldots, b_n)$ — фиксированные векторы, а x пробегает одно из множеств:

$$\mathbf{L}_a = \{x\colon x \succ a\}, \quad \mathbf{K}_{a,b} = \{x\colon x - b \succ a\},$$
$$\mathbf{L}^a = \{x\colon x \prec a\}, \quad \mathbf{K}^{a,b} = \{x\colon x - b \prec a\}. \tag{21}$$

В соответствии с содержанием понятий мажоранты и миноранты множества (21) определяются системами линейных неравенств и, следовательно, представляют собой замкнутые выпуклые многогранные области: каждая из областей здесь определена как пересечение конечного множества полупространств. Ниже, в лемме 5 и следствии 3 те же области определяются в двойственных терминах (как выпуклые оболочки своих вершин; из этих результатов, между прочим, вытекает ограниченность этих областей).

Лемма 5. *Множества* $\mathbf{L}^a$, $\mathbf{L}_a$ *совпадают: каждое из них представляет собой замкнутую выпуклую оболочку* $\mathbf{L}(a)$ *векторов, полученных из* a *всевозможными перестановками координат:*

$$\mathbf{L}_a = \mathbf{L}^a = \mathbf{L}(a) = \mathrm{conv}\,\{\mathrm{col}\,(a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})\}, \tag{22}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — *всевозможные перестановки индексов* $1, \ldots, n$.

Доказательство соотношения $\mathbf{L}^a = \mathbf{L}(a)$ содержится, например, в [5, с. 96] (теорема 1.1). Равенство $\mathbf{L}_a = \mathbf{L}(a)$ доказывается аналогично.

***Следствие* 3.** *Множества* $\mathbf{K}_{a,b}$, $\mathbf{K}^{a,b}$ *совпадают между собой и с множеством*

$$\mathbf{K}(a, b) = \mathrm{conv}\,\{\mathrm{col}\,(b_1 + a_{k_1}, \ldots, b_n + a_{k_n})\}, \tag{23}$$

где $k_1, \ldots, k_n$ — *всевозможные перестановки индексов* $1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент множества $\mathbf{K}_{a,b}$. По определению это означает, что $x - b \succ a$, и, в силу леммы 5, $x - b \in \mathbf{L}_a = \mathbf{L}(a) = \mathrm{conv}\,\{\mathrm{col}\,(a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})\}$. Таким образом, вектор x допускает представление

$$x = b + \sum_{i=1}^{n!} \tau_i\, \mathrm{col}\,(a_{k_1}, \ldots, a_{k_n}) = \sum_{i=1}^{n!} \tau_i\, (b + \mathrm{col}\,(a_{k_1}, \ldots, a_{k_n})) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n!} \tau_i\, \mathrm{col}\,(b_1 + a_{k_1}, \ldots, b_n + a_{k_n}), \tag{24}$$

где i — номера перестановок $(k_1, \ldots, k_n)$ индексов $1, \ldots, n$; $\tau_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n!} \tau_i = 1$.

В силу принятых обозначений соотношение (24) означает, что $x \in \mathbf{K}(a, b)$, откуда следует, что $\mathbf{K}_{a,b} \subset \mathbf{K}(a, b)$. Включение $\mathbf{K}_{a,b} \subset \mathbf{K}(a, b)$ доказывается путем проведения всех рассуждений в обратном порядке. Значит, $\mathbf{K}_{a,b} = \mathbf{K}(a, b)$. Соотношение $\mathbf{K}^{a,b} = \mathbf{K}(a, b)$ доказывается аналогично.

Сравнение определения (23) множества $\mathbf{K}(a, b)$ и определения множества $\mathbf{K}$, фигурирующего в теореме 1, показывает, что

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(\ln\alpha, \ln\beta). \tag{25}$$

Из следствия 3 вытекает далее

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\ln\alpha, \ln\beta} = \{x\colon x - \ln\beta \prec \ln\alpha\} \tag{26}$$

и

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\ln\alpha, \ln\beta} = \{x\colon x - \ln\beta \succ \ln\alpha\}. \tag{27}$$

Соотношение (25) описывает выпуклый многогранник $\mathbf{K}$ как выпуклую оболочку своих вершин. Каждое из соотношений (26), (27) дает его описание в двойственных терминах, в форме пересечения полупространств.

***Доказательство теоремы* 2.** Перепишем формулировку теоремы 1, заменяя в ней множество $\mathbf{K}$ равным ему множеством $\mathbf{K}^{\ln\alpha, \ln\beta}$. Получим следующее утверждение.

Множество $\ln\boldsymbol{\Gamma}(\alpha, \beta) = \{\operatorname{col}(\ln\gamma_1, \ldots, \ln\gamma_n)\colon \gamma \in \boldsymbol{\Gamma}(\alpha, \beta)\}$ *является подмножеством множества* $\mathbf{K}^{\ln\alpha, \ln\beta}$.

В силу (26) это утверждение означает, что любой вектор $\ln\gamma = \operatorname{col}(\ln\gamma_1, \ldots$ $\ldots, \ln\gamma_n) \in \ln\boldsymbol{\Gamma}(\alpha, \beta)$ принадлежит множеству $\mathbf{K}^{\ln\alpha, \ln\beta}$, определенному системой неравенств $x - \ln\beta \prec \ln\alpha$. Имеем

$$\ln\gamma - \ln\beta \prec \ln\alpha. \tag{28}$$

Более подробная запись соотношения (28) в соответствии с определением векторной мажоранты приводит к следующему утверждению.

Произвольный вектор $\ln\gamma \in \ln\boldsymbol{\Gamma}(\alpha, \beta)$ *удовлетворяет системе неравенств*

$$\sum_{k=1}^{r} \ln\gamma_{j_k} - \sum_{k=1}^{r} \ln\beta_{j_k} \le \sum_{k=1}^{r} \ln\alpha_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\gamma_k - \sum_{k=1}^{n} \ln\beta_k = \sum_{k=1}^{n} \ln\alpha_k, \tag{29}$$

$$r = 1, \ldots, n-1; \quad (1 \le) j_1 < \ldots < j_r (\le n).$$

После очевидных преобразований соотношения (29) превращаются в соотношения (2). Соотношения (3) получаются аналогично (после замены в формулировке теоремы 1 множества $\mathbf{K}$ равным ему множеством $\mathbf{K}_{\ln\alpha, \ln\beta}$.

Очевидно, что все приведенные рассуждения обратимы, что позволяет вывести теорему 1 из теоремы 2.

Автор выражает благодарность Г. В. Радзиевскому за полезные обсуждения рукописи, способствовавшие значительному улучшению изложения.

1. *Лидский В. Б.* О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц // Докл. АН СССР. – 1950. – **75**, № 6. – С. 769–773.
2. *Березин Ф. А., Гельфанд И. М.* Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 311–351.
3. *Amir-Moez A.* Extreme properties of eigenvalues of Hermitian transformations and singular values of the sum and product of linear transformations // Duke Math. J. – 1956. – **23**. – P. 463–476.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
5. *Маркус А. С.* Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, № 4(118). – С. 93–123.
6. *Шварцман П. А.* О локализации спектров суммы и произведения матриц некоторых классов // Алгебра и анализ. – 1998. – № 1. – С. 202–248.
7. *Wielandt H.* An extremum property of sums of eigenvalues // Proc. Amer. Math. Soc. – 1955. – **6**, № 1. – P. 106–110.
8. *Нудельман А. А., Шварцман П. А.* О спектре произведения унитарных матриц // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 6(84). – С. 111–117.
9. *Шварцман П. А.* Неравенства для собственных чисел J-эрмитовых и J-унитарных операторов. II // Мат. исслед. – 1970. – **1**. – С. 176–184.
10. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 527 с.

Получено 24.04.97,
после доработки — 19.01.98