УДК 519. 21

А. В. Свіщук, С. Я. Гончарова (Міжнар. мат. центр НАН України, Київ)

СТІЙКІСТЬ НАПІВМАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ РИЗИКУ В СХЕМАХ УСЕРЕДНЕННЯ ТА ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Asymptotic stability with probability one of semi-Markov risk process in schemes of averaging and diffusion approximation is investigated.

Досліджується асимптотична стійкість з імовірністю 1 напівмарковських процесів ризику в схемах усереднення та дифузійної апроксимації.

Вступ. В даній роботі вивчається напівмарковський процес ризику (НПР) в схемі серій, що описує динаміку сумарних капіталів страхової компанії.

Доводяться теореми про асимптотичну стійкість з імовірністю 1, рівномірно по параметру серії, НПР в схемах усереднення та дифузійної апроксимації, за умов стійкості усередненого та дифузійного процесів ризику. При цьому використовуються мартингальні методи та стохастичні функції Ляпунова.

Стійкість марковських систем в схемах усереднення та дифузійної апроксимації вивчалась у роботах [2 – 4, 9], деяких напівмарковських систем — в [5, 7].

Апроксимації напівмарковських процесів ризику в схемі серій усередненими, дифузійними та нормально відхиленими процесами ризику, та ймовірність руйнації для останніх досліджувались у [6].

1. Означення напівмарковського процесу ризику в схемі серій. Нехай (Ω, F, P) — ймовірнісний простір, $(X, \mathfrak{X})$ — деякий вимірний простір, а $(x_n; \theta_n; n > 0)$ — процес марковського відновлення (ПМВ), $x_n \in X$, $\theta_n \in R_+ := [0, +\infty)$.

Напівмарковським процесом [1] називається процес $x(t)$, що будується за ПМВ таким чином:

$$x(t) := x_{\nu(t)}, \tag{1}$$

де $\nu(t) := \max \{n: \tau_n \le t\}$, $\tau_n := \sum_{k=1}^{n} \theta_k$. Покладемо $\gamma(t) := t - \tau_{\nu(t)}$.

Процесу $x(t)$ відповідає наступне напівмарковське ядро:

$$Q(x, A, t) := P(x, A) G_x(dt), \tag{2}$$

де $P(x, A) := P\{\omega: x_{n+1} \in A / x_n = x\}$, $G_x(t) := P\{\omega: \theta_{n+1} \le t / x_n = x\}$, $x \in X$, $A \in \mathfrak{X}$, $\forall t \in R_+$.

Нехай $a(x)$ — невід'ємна вимірна обмежена функція на X, а $\upsilon(z, x)$ — неперервна та обмежена функція по z та x, неспадна по z та невід'ємна, $z \in R$, $x \in X$, така, що $\upsilon(0, x) = 0$ $\forall x \in X$.

Означення 1. *Напівмарковським процесом ризику (НПР) в схемі серій називається розв'язок наступного рівняння* [6]:

$$z_\varepsilon(t) = z + \int_0^t \upsilon(z_\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^i))ds - \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^i)} a(x_k) := z + B_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(t), \tag{3}$$

де $\varepsilon > 0$ — *малий параметр,* $i = 1, 2$.

Функція $\upsilon(z, x)$ описує інтенсивність страхових внесків, а функція $a(x)$ — величину одноразових виплат страхової компанії своїм клієнтам. Залежність функцій $\upsilon(z, x)$ та $a(x)$ від x вказує на наявність впливу випадкових зовнішніх ефектів таких, як несподівані чи непередбачені новини.

Процес $x(s/\varepsilon^i)$, $i = 1;2$, описує серії по ε зовнішніх ефектів; процес $B_\varepsilon(t)$ — суму внесків до страхової компанії до моменту t; $A_\varepsilon(t)$ — сума виплат страхової компанії своїм клієнтам до моменту часу t; $\nu(t)$ — кількість страхових виплат на інтервалі $[0, t]$; τ_k — моменти виплат, z — початковий капітал компанії.

Процес доходу страхової компанії визначається співвідношенням

$$R_\varepsilon(t) := B_\varepsilon(t) - A_\varepsilon(t).$$

Відомо, що за умов усереднення [6] процес $z_\varepsilon(t)$ в (3) при $i = 1$ збігається слабко при $\varepsilon \to 0$ до *усередненого процесу ризику* $z_0(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dz_0(t)}{dt} = [\hat{\upsilon}(z_0(t)) - \hat{a}], \\ z_0(0) = z, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\hat{\upsilon}(z) := \int_X \pi(dx)\upsilon(z,x), \qquad \hat{a} := \int_X \rho(dx)a(x)/m,$$

$$\pi(dx) := \rho(dx)m_1(x)/m, \quad m_i(x) := \int_0^\infty t^i G_x(dx), \quad i = 1, 2, \tag{5}$$

$$m := \int_X \rho(dx)m_1(x),$$

$\rho(A)$ — стаціонарний розподіл ергодичного ланцюга Маркова $(x_n;\, n \geq 0)$.

Відомо також [6], що за умови балансу

$$\hat{\upsilon}(z) = \hat{a} \qquad \forall z \in R, \tag{6}$$

процес $z_\varepsilon(t)$ в (3) при $i = 2$ збігається слабко при $\varepsilon \to 0$ до *дифузійного процесу ризику* $z^0(t)$:

$$\begin{cases} dz^0(t) = a(z^0(t))\,dt + \beta(z^0(t))\,dw(t), \\ z^0(0) = z, \end{cases} \tag{7}$$

де $w(t)$ — стандартний процес Вінера,

$$\alpha(z) := \int_X \rho(dx)[(m_1(x)\upsilon(z,x) - Pa(x))(R_0 - I)m_1(x)\upsilon'_z(z,x) + $$
$$+ 2^{-1}m_2(x)\upsilon(z,x)\upsilon'_z(z,x)]/m, \tag{8}$$

$$\beta^2(z) := 2^{-1}\int_X \rho(dx)[(m_1(x)\upsilon(z,x) - Pa(x))(R_0 - I)(m_1(x)\upsilon(z,x) -$$
$$- P(x)) + m_1(x)\upsilon(z,x)Pa(x) + P^2a(x)/2 + m_2(x)\upsilon^2(z,x)/2]/m,$$

$Pa(x) := \int_X P(x,dy)a(y)$, R_0 — потенціал ланцюга Маркова $(x_n;\, n \geq 0)$.

Ми цікавимось умовами, за яких для достатньо малих значень параметра серії ε стійкість *усередненого процесу ризику* $z_0(t)$ в (4) та стійкість *дифузійного процесу ризику* $z^0(t)$ в (7) забезпечують стійкість початкового *напівмарковського процесу ризику* $z_\varepsilon(t)$ в (3) при $i = 1$ та $i = 2$ відповідно.

2. Стійкість НПР в схемі усереднення. За умов стійкості усередненого процесу ризику $z_0(t)$ в (4) встановимо асимптотичну рівномірну стійкість з імовірністю 1 НПР $z_\varepsilon(t)$ в (3) при $i = 1$ та усередненого процесу ризику $z_0(t)$ в (4).

Означення 2. *НПР* $z_\varepsilon(t)$ *в* (3) *є асимптотично рівномірно по* ε *стійким з імовірністю* 1, *якщо для* $\varepsilon > 0$ *існує* $\varepsilon_0 > 0$ *фіксоване таке, що якщо* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, *та для* $\Delta_1 > 0$ *і* $\Delta_2 > 0$ *існує* $\delta_1 > 0$ *таке, що* $|z| > \delta_1$, *то*

$$P_{z,x}\left\{|z_\varepsilon(t)| \le \Delta_2\, e^{-\hat{\beta} t};\, t \ge 0\right\} \ge 1 - \Delta_1, \tag{9}$$

$\forall x \in X$, $\forall z \in R_+$, $\hat{\beta} > 0$ — *константа та*

$$P_{z,x}\left\{\lim_{t\to+\infty}|z_\varepsilon(t)| = 0\right\} = 1. \tag{10}$$

Будемо вважати, що виконуються наступні умови:

1) ланцюг Маркова $(x_n;\, n \ge 0)$ — ергодичний із стаціонарним розподілом $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{X}$;

2) функція $G_x(t)$ в (2) — диференційовна по t і $g_x(t) := dG_x(t)/dt$ — неперервна та обмежена функція по x та t;

3) $\upsilon(z, x)$ — гладка функція по z та неперервна по x:

$$|\upsilon(z, x)| \le K(1 + |z|),$$

$$|\upsilon'_z(z, x)| \le K,$$

$$\upsilon(0, x) = 0 \quad \forall x \in X;$$

4) існує гладка додатно визначена функція $V(z)$ на R така, що $V(z) \to +\infty$, коли $z \to +\infty$, $V(z)$ — поліноміальна, та $V(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

5) $[\hat{\upsilon}(z) - \hat{a}]\, V'(z) \le -\beta V(z)$ для деякого $\beta > 0$, $\forall z \in R$, функції $\hat{\upsilon}(z)$ та $\hat{a}$ визначені в (5), $\hat{\upsilon}(z) \ne \hat{a}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* 1 – 5. *Тоді процес* $z_\varepsilon(t)$ *в* (3) *при* $i = 1$ *є асимптотично рівномірно по* ε *стійким з імовірністю* 1.

Доведення. Як відомо [5, 7], процес $(x(t), \gamma(t))$ на $X \times R_+$ є марковським з породжуючим оператором

$$\hat{Q} f(x, t) := \frac{d}{dt} f(x, t) + \lambda(x)[Pf(x, 0) - f(x, t)], \tag{11}$$

де

$$\lambda(x) := g_x(t)/\, \overline{G}_x(t), \quad \overline{G}_x(t) := 1 - G_x(t), \; f(x, t) \in C^1(X \times R_+).$$

Таким чином, з (3) та (11) отримуємо, що процес $(z_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t/\varepsilon))$ на $R \times X \times R_+$ є марковським з породжуючим оператором

$$L_\varepsilon f(z, x, t) = \frac{1}{\varepsilon}\hat{Q} f(z, x, t) + \upsilon(z, x)\frac{d}{dz} f(z, x, t) +$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}[P f(z - \varepsilon a(x), x, t) - f(z, x, t)], \tag{12}$$

$f(z, x, t) \in C^1(R \times X \times R_+)$, оператор P визначений в (8).

Розглянемо наступну сім'ю функцій:

$$V_\varepsilon(z, x, t) := V(z) + \varepsilon V_1(z, x, t), \tag{13}$$

де функція $V(z)$ визначена в умовах 4, 5, а функція $V_1(z, x, t)$ визначається розв'язком наступного рівняння [9]:

$$\hat{Q}\, V_1\,(z, x, t) \;+\; m_1(x)v(z, x)\frac{d}{dz}V(z) \;-\; Pa(x)\frac{d}{dz}V(z) \;-\; \hat{A}V(z) \;=\; 0, \tag{14}$$

де $\hat{A} := [\hat{v}(z) - \hat{a}]\dfrac{d}{dz}$.

Відмітимо, що рівняння (14) має розв'язок

$$V_1(z, x, t) \;=\; R_0\left[\,\hat{A}V + Pa(x)\frac{d}{dz}V - m_1(x)v(z, x)\frac{d}{dz}V\,\right], \tag{15}$$

оскільки $\prod\left(m_1(x)v(z, x)\dfrac{d}{dz} - Pa(x)\dfrac{d}{dz} - \hat{A}\right) = 0$, де $\prod$ — проектор оператора P, що відповідає $\rho(A)$, R_0 — потенціал.

Із (12) – (14) отримуємо

$$L_\varepsilon V_\varepsilon \;=\; \hat{A}V \;+\; \varepsilon V\frac{d}{dz}V_1 \;+\; P[V_1(z - \varepsilon a(x), x, t) - V_1(z, x, t)] \;=\; \hat{A}V \;+\; \theta^\varepsilon. \tag{16}$$

Тут $\theta^\varepsilon := \varepsilon[(v(z, x) - Pa(x))\dfrac{d}{dz}V_1 + \dfrac{1}{2}Pa^2(x)\dfrac{d^2}{dz^2}V_1 + o(\varepsilon)/\varepsilon]$ (див. [9]).

Визначимо процес

$$m_\varepsilon(t) \;:=\; V_\varepsilon(z_\varepsilon(t), x\,(t/\varepsilon), \gamma\,(t/\varepsilon)) \;-\; V_\varepsilon(z, x, 0) \;-\; \int_0^t L_\varepsilon V_\varepsilon(z_\varepsilon(s), x(s/\varepsilon), \gamma(s/\varepsilon))\,ds. \tag{17}$$

Цей процес є неперервним справа інтегровним $F_{t/\varepsilon}$-мартингалом із середнім 0, що випливає з марковості процесу $(z_\varepsilon(t), x\,(t/\varepsilon), \gamma\,(t/\varepsilon))$ та (12), де $F_{t/\varepsilon} := \sigma\{x\,(s/\varepsilon), \gamma\,(s/\varepsilon);\ 0 \le s \le t\}$. Із зображень (13) та (17) маємо наступне співвідношення:

$$\begin{aligned} V(z_\varepsilon(t)) \;-\; V(z) \;-\; \int_0^t \hat{A}V(z_\varepsilon(s))\,ds \;&=\; m_\varepsilon(t) \;+\; \varepsilon V_1(z, x, 0) \;+ \\ +\; \varepsilon V_1(z_\varepsilon(t), x\,(t/\varepsilon), \gamma\,(t/\varepsilon)) \;&+\; \varepsilon\int_0^t v(z_\varepsilon(s), x(s/\varepsilon))\frac{d}{dz}V_1 ds \;+ \\ +\; \int_0^t\int_X P(x(s/\varepsilon), dy)[V_1(z_\varepsilon(s) + \varepsilon a(y), x, s) \;&-\; V_1(z_\varepsilon(s), x\,(s/\varepsilon), \gamma\,(s/\varepsilon))]\,ds. \end{aligned} \tag{18}$$

Відмітимо, що процес $z_\varepsilon(t)$ в (3) дійсно апроксимує усереднений процес ризику $z_0(t)$ в (4), що випливає з (18) при достатньо малих ε.

З рівності (16) отримуємо

$$\left(L_\varepsilon + \hat{\beta}\right)V_\varepsilon = \hat{\beta}V_\varepsilon + \hat{A}V \;+\; \varepsilon v(z, x)\frac{d}{dz}V_1 + P[V_1(z - \varepsilon a, x, t) \;-\; V_1(z, x, t)], \tag{19}$$

де $\hat{\beta} > 0$ — деяка константа.

З умов теореми та (14) випливає, що V_1 має властивості подібні до V по z. Тому існує ε_0 таке, що для $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$:

$$b_1V(z) \;\le\; V_\varepsilon \;\le\; b_2V(z), \tag{20}$$

де b_1, b_2 — деякі додатні константи.

З властивостей функцій $v(z, x)$ та V_1 також випливає, що існує додатна константа b_3 така, що

$$\left| \upsilon(z, x) \frac{d}{dz} V_1 \right| \leq b_3. \tag{21}$$

З обмеженості функції $a(x)$, властивостей V_1 випливає існування додатної константи b_4 такої, що

$$P\left[V_1(z - \varepsilon a, x, t) - V_1(z, x, t)\right] \leq b_4. \tag{22}$$

Беручи до уваги (19) – (22), маємо

$$\left(L_\varepsilon + \hat{\beta}\right) V_\varepsilon \leq (\hat{\beta} b_2 + \hat{A} + \varepsilon_0 b_3 + \varepsilon_0 b_4) V(z). \tag{23}$$

Виберемо константу $\hat{\beta}$ таким чином:

$$\hat{\beta} b_2 + \varepsilon_0(b_3 + b_4) < \beta, \tag{24}$$

де константа β визначена в умові 5.

Тоді з умови 5 та (23), (24) матимемо

$$\left(L_\varepsilon + \hat{\beta}\right) V_\varepsilon \leq 0. \tag{25}$$

Перепишемо співвідношення (17) з функцією $e^{\hat{\beta} t} V_\varepsilon$:

$$e^{\hat{\beta} t} V_\varepsilon(z_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t/\varepsilon)) = V_\varepsilon(z, x, 0) +$$

$$+ \int_0^t e^{\hat{\beta} s} \left(L_\varepsilon + \hat{\beta}\right) V_\varepsilon(z_\varepsilon(s), x(s/\varepsilon), \gamma(s/\varepsilon)) ds + m_\varepsilon(t). \tag{26}$$

Використовуючи нерівності (20) та (25), отримуємо

$$0 \leq b_1 e^{\hat{\beta} t} V_\varepsilon(z_\varepsilon(t)) \leq e^{\hat{\beta} t} V_\varepsilon(z_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), \gamma(t/\varepsilon)) \leq b_2 V(z) + m_\varepsilon(t). \tag{27}$$

Таким чином, $b_2 V(z) + m_\varepsilon(t)$ є невід'ємним $F_{t/\varepsilon}$-мартингалом. Застосовуючи нерівність Колмогорова – Дуба з (27) для $\tilde{\Delta}_2 > 0$ маємо

$$P_{z,x}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} e^{\hat{\beta} t} b_1 V(z_\varepsilon(t)) > \tilde{\Delta}_2 \right\} \leq P_{z,x}\left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} (b_2 V(z) + m_\varepsilon(t)) > \tilde{\Delta}_2 \right\} \leq \frac{b_2 V(z)}{\tilde{\Delta}_2}. \tag{28}$$

Беручи до уваги умову 4, отримуємо, що існують константи $l_1 > 0$ та $l_2 > 0$ та цілі числа n_1, n_2 такі, що

$$l_1 |z|^{n_1} \leq V(z) \leq l_2 |z|^{n_2}. \tag{29}$$

Тому маємо наступне включення:

$$\left\{ l_1 |z_\varepsilon(t)|^{n_1} \leq e^{-\hat{\beta} t} \frac{\tilde{\Delta}_2}{b_1};\ t \geq 0 \right\} \supset \left\{ V(z_\varepsilon(t)) \leq e^{-\hat{\beta} t} \frac{\tilde{\Delta}_2}{b_1};\ t \geq 0 \right\}.$$

Звідси та з (28) маємо нерівність

$$P_{z,x}\left\{ |z_\varepsilon(t)| \leq e^{-\check{\beta} t} \left(\frac{\tilde{\Delta}_2}{l_1, b_1} \right)^{1/n_1};\ t \geq 0 \right\} \geq 1 - \frac{b_1 b_2 V(z)}{\tilde{\Delta}_2}, \tag{30}$$

де $\check{\beta} := \hat{\beta} / n_1$.

Нехай тепер задано $\Delta_1 > 0$ та $\Delta_2 > 0$. Виберемо $\tilde{\Delta}_2$ таке, щоб виконувалась нерівність

$$P_{z,x}\left\{|z_\varepsilon(t)| \le e^{-\breve{\beta}t}\Delta_2;\ t \ge 0\right\} \ge 1 - \frac{b_1 b_2 V(z)}{\tilde{\Delta}_2}. \quad (31)$$

Таким чином, $\tilde{\Delta}_2 := \Delta_2^{n_1} b_1 l_1$.

Виберемо далі $\delta_1 > 0$ так, щоб $|z| < \delta_1$ і $V(z) < \tilde{\Delta}_2 \Delta_1 / b_2$, тоді $\delta_1 := := \left(\frac{\tilde{\Delta}_2 \Delta_1}{b_2 l_2}\right)^{1/n_2}$ (див. (29)). Звідси та з (31) остаточно отримуємо

$$P_{z,x}\left\{|z_\varepsilon(t)| \le e^{-\breve{\beta}t}\Delta_2;\ t \ge 0\right\} \ge 1 - \Delta_1.$$

Звідси випливає справедливість (9).

Щоб довести (10), відмітимо, що

$$\left\{\lim_{t\to\infty}|z_\varepsilon(t)| = 0\right\} = \left\{\lim_{t\to\infty} V(z_\varepsilon(t)) = 0\right\} \supset \left\{\sup_{t\ge 0} e^{\hat{\beta}t} b_1 V(z_\varepsilon(t)) \le D\right\}, \quad (32)$$

де D — довільна додатна константа, і

$$P_{z,x}\left\{\lim_{t\to+\infty}|z_\varepsilon(t)| = 0\right\} \ge P_{z,x}\left\{\sup_{t\ge 0} e^{\hat{\beta}t} b_1 V(z_\varepsilon(t)) \le D\right\} \ge 1 - \frac{b_2 V(z)}{D}.$$

Звідси отримуємо

$$P_{z,x}\left\{\lim_{t\to+\infty}|z_\varepsilon(t)| = 0\right\} = 1,$$

коли $D \to +\infty$, що доводить (10) і теорему 1.

3. Стійкість НПР в дифузійній апроксимації. За умов стійкості дифузійного процесу ризику $z^0(t)$ в (7) встановлюється асимптотична рівномірна по ε стійкість з імовірністю 1 НПР $z_\varepsilon(t)$ в (4) при $i = 2$.

Таким чином, нехай маємо НПР $z_\varepsilon(t)$ в (3) при $i = 2$ та дифузійний процес ризику $z^0(t)$ в (7) з коефіцієнтами зносу $\alpha(z)$ та дифузії $\beta(z)$ в (8).

Нехай виконуються наступні умови:

6) похідні від $v(z, x)$ по z ростуть не швидше, ніж степені $|z|$, коли $|z| \to +\infty$ рівномірно по $x \in X$;

7) для функції $V(z)$ в умові 4 виконується наступна нерівність:

$$\alpha(z)V_z'(z) + \frac{1}{2}\beta^2(z)V_{zz}''(z) \le -\gamma V(z) \quad \forall\gamma > 0,\ z \in R, \quad (33)$$

де $\alpha(z)$ та $\beta(z)$ визначені в (8).

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* 1 – 4, 6, 7 *та умови балансу* (6), *то процес* $z_\varepsilon(t)$ *в* (3) *при* $i = 2$ — *асимптотично рівномірно по* ε *стійкий з імовірністю* 1.

Доведення. З доведення теореми 1 випливає, що процес $(z_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), \gamma(t/\varepsilon^2))$ — марковський процес на $R \times X \times R_+$ з твірним оператором

$$L^\varepsilon f(z, x, t) = \frac{1}{\varepsilon^2}\hat{Q}f(z, x, t) + \frac{1}{\varepsilon}v(z, x)\frac{d}{dz}f(z, x, t) + $$
$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}[Pf(z - \varepsilon a(x), x, t) - f(z, x, t)], \quad (34)$$

де оператор $\hat{Q}$ визначений в (11), $f \in C^1(R \times X \times R_+)$.

Введемо наступну сім'ю функцій:

$$V^{\varepsilon}(z,x,t) = V(z) + \varepsilon V_1(z,x,t) + \varepsilon^2 V_2(z,x,t), \tag{35}$$

де $V(z)$ визначена в умові 4, $V \in \mathrm{Dom}\,(L)$,

$$\hat{L} := \alpha(z)\frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\beta^2(z)\frac{d^2}{dz^2}, \tag{36}$$

а функції V_1 та V_2 визначаються з наступних рівнянь:

$$\begin{gathered}\hat{Q}V_1(z,x,t) + m_1(x)v(z,x)\frac{d}{dz}V(z) - Pa(x)\frac{d}{dz}V(z) = 0,\\ \hat{Q}V_2(z,x,t) + m_1(x)v(z,x)\frac{d}{dz}V_1(z,x,t) - Pa(x)\frac{d}{dz}V_1(z,x,t) +\\ + [Pa^2(x)/2]V(z) - \hat{L}V(z) = 0,\end{gathered} \tag{37}$$

де оператор $\hat{L}$ визначений в (36).

З рівнянь (37) та виразів (34) – (36) випливає

$$\begin{gathered}L^{\varepsilon}V^{\varepsilon} = \hat{L}V + \varepsilon v(z,x)\frac{d}{dz}V_2 + P[V_2(z-\varepsilon a(x),x,t) -\\ - V_2(z,x,t)] = \hat{L}V + \theta_{\varepsilon}, \qquad \theta_{\varepsilon}\underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 \quad (\text{див. [9]})\end{gathered} \tag{38}$$

та процес

$$\begin{gathered}m^{\varepsilon}(t) := V^{\varepsilon}(z_{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2), \gamma(t/\varepsilon^2)) - V^{\varepsilon}(z,x,0) -\\ - \int_0^t L^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(z_{\varepsilon}(s), x(s/\varepsilon^2), \gamma(s/\varepsilon^2))\,ds,\end{gathered} \tag{39}$$

є неперервним справа інтегровним $F_{t/\varepsilon}$-мартингалом із середнім 0.

Із зображень (35) та (39) отримуємо наступне співвідношення:

$$\begin{gathered}V(z_{\varepsilon}(t)) - V(z) - \int_0^t \hat{L}V(z_{\varepsilon}(s))\,ds = m^{\varepsilon}(t) + \varepsilon V_1(z,x,0) +\\ + \varepsilon^2 V_2(z,x,0) - \varepsilon V_1(z_{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2), \gamma(t/\varepsilon^2)) - \varepsilon^2 V_2(z_{\varepsilon}(t), x(t/\varepsilon^2), \gamma(t/\varepsilon^2)) +\\ + \int_0^t \Big\{\varepsilon v(z_{\varepsilon}(s), x(s/\varepsilon^2))\frac{d}{dz}V_2 + P[V_2(z_{\varepsilon}(s) - \varepsilon a(x(s/\varepsilon^2)), x(s/\varepsilon^2), \gamma(s/\varepsilon^2)) -\\ - V_2(z_{\varepsilon}(s), x(s/\varepsilon^2), \gamma(s/\varepsilon^2))]\Big\}\,ds.\end{gathered} \tag{40}$$

Звідси видно, що процес $z_{\varepsilon}(t)$ в (3) при $i=2$ апроксимує дифузійний процес ризику $z^0(t)$ в (7) з оператором $\hat{L}$ в (36).

З рівності (38) матимемо

$$(L_{\varepsilon} + \hat{\gamma})V^{\varepsilon} = \hat{\gamma}V^{\varepsilon} + \hat{L}V + \varepsilon v(z,x)\frac{d}{dz}V_2(z) + P[V_2(z - \varepsilon a(x), x, t) - V_2], \tag{41}$$

де $\hat{\gamma} > 0$ — деяка константа.

З умов теореми 2 випливає, що існують такі додатні константи c_1 і c_2, що для всіх ε, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$,

$$c_1 V(z) \le V^{\varepsilon}(z,x,t) \le c_2 V(z). \tag{42}$$

З (41) та (42) випливає

$$(L^\varepsilon + \hat{\gamma})V^\varepsilon \le (\hat{\gamma}c_2 + \hat{L} + \varepsilon_0(c_3 + c_4))V(z), \tag{43}$$

де додатні константи c_3 та c_4 визначаються обмеженістю функцій $a(x)$, $v(z, x)$ та V_2.

Виберемо тепер $\hat{\gamma}$ таке, що

$$c_2\hat{\gamma} + \varepsilon_0(c_3 + c_4) \le \gamma,$$

де γ визначається в (33). Тоді з (43) отримаємо

$$(L^\varepsilon + \hat{\gamma})V^\varepsilon \le 0. \tag{44}$$

У виразі (39) візьмемо функцію $e^{\hat{\gamma}t}V^\varepsilon$ замість V^ε, отримаємо

$$e^{\hat{\gamma}t}V^\varepsilon(z_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), \gamma(t/\varepsilon^2)) =$$

$$= V^\varepsilon(z, x, 0) + \int_0^t e^{\hat{\gamma}s}(L^\varepsilon + \hat{\gamma})V^\varepsilon(z_\varepsilon(s), x(s/\varepsilon^2), \gamma(s/\varepsilon^2))ds + m^\varepsilon(t). \tag{45}$$

Беручи до уваги нерівності (42) та (44), маємо

$$0 \le c_1 e^{\hat{\gamma}t}V(z_\varepsilon(t)) \le e^{\hat{\gamma}t}V^\varepsilon(z_\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2), \gamma(t/\varepsilon^2)) \le c_2V(z) + m^\varepsilon(t). \tag{46}$$

З нерівності Колмогорова – Дуба та (46) випливає наступна оцінка, аналогічна (28):

$$P_{z,x}\left\{\sup_{t\ge 0} c_1 e^{\hat{\gamma}t}V(z_\varepsilon(t)) \ge \tilde{\eta}_2\right\} \le \frac{c_2V(z)}{\tilde{\eta}_2} \quad \forall\tilde{\eta}_2 > 0.$$

Подальше доведення теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1, оцінкам (29) – (31), із заміною b_i на c_i, $i = 1, 2$, $\tilde{\Delta}_i$ на $\tilde{\eta}_i$, $i = 1, 2$.

Теорему 2 повністю доведено.

1. *Королюк В. С., Свіщук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 256 с.
2. *Королюк В. С.* Устойчивость автономных динамических систем с быстрыми марковскими переменными // Укр. мат. журн. – 1991. – **33**, № 12. – С. 1176 – 1181.
3. *Королюк В. С.* Усереднення та стійкість динамічних систем із швидкими випадковими перемиканнями. – Барселона, 1995. – 14 с. – (Препринт / Ун-т Барселони; №19/1995).
4. *Скороход А. В.* Динамические системы с быстрыми случайными возмущениями // Укр. мат. журн. – 1991. – **33**, № 1. – С. 3 – 21.
5. *Свіщук А. В.* Стійкість напівмарковських еволюційних стохастичних систем в схемах усереднення та дифузійної апроксимації // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1996. – 20 с.
6. *Свіщук А. В.* Апроксимації та ймовірності руйнації для напівмарковських процесів ризику. – Київ, 1996. – 20 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; №96. 20).
7. *Koroljuk V. S., Swishchuk A. V.* Evolution of systems in random media. – USA: CRC Press. Fl., 1995. – 320 p.
8. *Koroljuk V. S.* Averaging and stability of dynamical systems with rapid Markov switchings. – (Preprint / Univ. Umea, Sweden; S – 90187).
9. *Korolyuk V. S.* Stability of stochastic systems in diffusion approximation scheme // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 36 – 47.

Одержано 22.06.98