УДК 517.53

А. П. Голуб, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБОБЩЕННЫЕ МОМЕНТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ, БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ И АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ

By using the method of generalized moment representations and studying properties of biorthogonal polynomials, new invariance properties of Padé approximants are established.

На основі методу узагальнених моментних зображень та вивчення властивостей біортогональних поліномів встановлені деякі нові властивості інваріантності для апроксимацій Паде.

1. Аппроксимации Паде и обобщенные моментные представления. Одним из наиболее эффективных и распространенных аппаратов рациональной аппроксимации аналитических функций являются аппроксимации Паде. Их изучению и применениям посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [1]).

Определение 1 [1, с. 311]. *Пусть функция* $f(z)$ *в окрестности точки* $z = 0$ *разлагается в степенной ряд вида*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k. \tag{1}$$

Тогда рациональная функция

$$[M/N]_f(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \tag{2}$$

где $P_M(z)$ *и* $Q_N(z)$ — *алгебраическое многочлены степеней не выше* M *и* N *соответственно, называется аппроксимантой Паде функции* $f(z)$ *порядка* $[M/N]$, *если* $f(z) - [M/N]_f(z) = 0(z^{M+N+1})$ *при* $z \to 0$.

Как показал Якоби, построение аппроксимант Паде функций, заданных своими степенными разложениями вида (1), сводится к решению линейных линейных алгебраических уравнений, и, как следствие, аппроксиманты (2) могут быть представлены в виде отношения определителей [1, с. 18]. Но в большинстве ситуаций такой подход малоэффективен. В случае, когда функция $f(z)$ является марковской, т. е. представима интегралом

$$f(z) = \int_{\Delta} \frac{d\mu(t)}{1 - zt}, \tag{3}$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция, имеющая бесконечное число точек роста на отрезке действительной оси Δ, построение аппроксимант Паде функции $f(z)$ порядков $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, сводится к построению полиномов, ортогональных на Δ с весом $d\mu(t)$ [2, с. 34].

В 1981 г. В. К. Дзядыком [3] был предложен метод обобщенных моментных представлений, позволяющий строить и исследовать аппроксиманты Паде для функций более общих, чем (3).

Определение 2 [3]. *Обобщенным моментным представлением числовой последовательности* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *в банаховом пространстве* X *называется совокупность равенств*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{4}$$

где $x_k \in X$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in X^*$, $j = \overline{0, \infty}$, *а через* $\langle x, y \rangle$ *обозначено воздействие функционала* $y \in X^*$ *на элемент* $x \in X^*$.

Однако при построении аппроксимант Паде функций со степенными разложениями, имеющими представления вида (4), пришлось использовать не ортогональные многочлены, как в случае функций вида (3), а биортогональные полиномы, являющиеся гораздо более сложным и очень мало изученным объектом исследования. А именно, оказалось, что если $f(z)$ имеет разложение (1), а последовательность $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ — представление (4), то аппроксиманту Паде функции $f(z)$ порядка $[N-1/N]$ можно записать в виде

$$[N-1/N]_f(z) = \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)},$$

где

$$P_{N-1}(z) = \sum_{j=1}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} \sum_{k=0}^{j-1} s_k z^k,$$

$$Q_N(z) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j},$$

а коэффициенты $c_j^{(N)}$, $j = \overline{0,N}$, определяются из соотношений биортогональности для обобщенного полинома $Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$: $\langle x_k, Y_N \rangle = 0$, $k = \overline{0, N-1}$.

В связи с этим возникла необходимость изучения свойств биортогональных полиномов. Исследование этих вопросов проводится в работах [4 – 7]. Настоящая статья посвящена установлению некоторых новых свойств биортогональных полиномов и их приложению к изучению аппроксимаций Паде.

2. Обобщенные моментные представления и биортогональные полиномы. В дальнейшем будем предполагать, что для некоторой последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$, являющейся последовательностью коэффициентов степенного разложения аналитической функции $f(z)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k, \tag{5}$$

справедливо обобщенное моментное представление в некотором банаховом пространстве X:

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \; k, j = \overline{0, \infty}, \tag{6}$$

и при этом существует линейный непрерывный оператор $A: X \to X$ такой, что $Ax_k = x_{k+1}$, $k = \overline{0,\infty}$. Очевидно [8], что при этом $A^* y_j = y_{j+1}$, $j = \overline{0,\infty}$, и обобщенное моментное представление (6) эквивалентно представлению $s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle$, $k = \overline{0,\infty}$, а представление (5) можно переписать в виде $f(z) = \langle R_z(A) x_0, y_0 \rangle$, где $R_z(A) = (I - zA)^{-1}$ — резольвента оператора A.

Будем также предполагать, что возможна невырожденная биортогонализация систем $x_k = A^k x_0$, $k = \overline{0,\infty}$, и $y_j = A^{*j} y_0$, $j = \overline{0,\infty}$, т. е. для любых M, $N \in \mathbb{N}$ существуют полиномы $X_M = \sum_{k=0}^{M} c_k^{(M)} x_k$ и $Y_N = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j$ с отличными от нуля старшими коэффициентами такие, что

$$\langle X_M, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, M-1}, \quad \langle X_M, y_M \rangle \neq 0,$$

$$\langle x_k, Y_N \rangle = 0, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad \langle x_N, Y_N \rangle \neq 0.$$

Как легко видеть, такое предположение эквивалентно отличию от нуля ганкелевских определителей последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ [1, с. 18]. Нас будет интересовать вопрос биортогонализации систем $\tilde{x}_k = A^k\tilde{x}_0$, $k = \overline{0,\infty}$, и $y_j = A^{*j}y_0$, $j = \overline{0,\infty}$, где $\tilde{x}_0 \in X$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\prod_{m=1}^{M}(1-\beta_m A)\tilde{x}_0 = \sum_{m=0}^{M}\alpha_m A^m\tilde{x}_0 = x_0.$$

Прежде чем сформулировать соответствующий результат, введем ряд дополнительных обозначений:

$$\tilde{f}(z) := \sum_{k=0}^{\infty}\tilde{s}_k z^k = \langle R_z(A)x_0, y_0\rangle,$$

$$[N-1/N]_f(z) =: \frac{P_{N-1}(z)}{Q_N(z)}, \quad N = \overline{1,\infty};$$

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) =: \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)}, \quad N = \overline{1,\infty};$$

$$\varepsilon_N(z) := \frac{f(z)Q_N(z) - P_{N-1}(z)}{z^N}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{x}_0$ *является решением операторного уравнения*

$$\prod_{m=1}^{p}(1-\beta_m A)^{r_m}\tilde{x}_0 = x_0, \tag{7}$$

где числа β_m, $m = \overline{1,p}$, *все различны. Тогда для всех* $N \ge M = r_1 + r_2 + \ldots + r_p$ *нетривиальные обобщенные полиномы* $\tilde{Y}_N$ *по системе функционалов* $y_j = A^{*j}y_0$, $j = \overline{0,N}$, *имеющие свойства биортогональности*

$$\langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N\rangle = 0, \quad k = \overline{0,N-1},$$

где $\tilde{x}_k = A^k\tilde{x}_0$, $k = \overline{0,\infty}$, *выражаются через биортогональные полиномы* Y_m, $m = \overline{N-M,N}$, *имеющие свойства биортогональности*

$$\langle x_k, Y_m\rangle = 0, \ k = \overline{0,m-1},$$

по формулам

$$\tilde{Y}_N = \det\begin{Vmatrix} \varepsilon_{N-M}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_1) & \ldots & \varepsilon_N(\beta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_1-1)}(\beta_1) & \ldots & \varepsilon_N^{(r_1-1)}(\beta_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_{N-M}^{(r_p-1)}(\beta_p) & \varepsilon_{N-M+1}^{(r_p-1)}(\beta_p) & \ldots & \varepsilon_N^{(r_p-1)}(\beta_p) \\ Y_{N-M} & Y_{N-M+1} & \ldots & Y_N \end{Vmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $r_1 = r_2 = \ldots = r_p = 1$. Очевидно, для любого $N \ge M$ возможно разложение

$$\tilde{Y}_N = \sum_{i=0}^{N}\gamma_i^{(N)}Y_i. \tag{8}$$

Применим функционал (8) к x_k, $k = \overline{0, N-M-1}$. Получим

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i^{(N)} \langle x_k, Y_i \rangle, \quad k = \overline{0, N-M-1}. \tag{9}$$

Ввиду невырожденности биортогонализации $\langle x_i, Y_i \rangle \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому из (9) следует $\gamma_i^{(N)} = 0$, $i = \overline{0, N-M-1}$. Таким образом, (8) можно переписать в виде

$$\tilde{Y}_N = \sum_{i=N-M}^{N} \gamma_i^{(N)} Y_i. \tag{10}$$

Коэффициенты $\gamma_i^{(N)}$, $i = \overline{N-M, N}$, с точностью до постоянного множителя можно определить из условий ортогональности $\tilde{Y}_N$ к $\tilde{x}_k$, $k = \overline{0, M-1}$:

$$0 = \langle \tilde{x}_k, \tilde{Y}_N \rangle = \sum_{i=N-M}^{N} \gamma_i^{(N)} \langle \tilde{x}_k, Y_i \rangle, \quad k = \overline{0, M-1}. \tag{11}$$

Из (11) вытекает

$$\sum_{i=N-M}^{N} \gamma_i^{(N)} \left\langle \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} (1 - \beta_m A) \tilde{x}_0, Y_i \right\rangle = 0, \quad k = \overline{1, M}. \tag{12}$$

Рассмотрим алгебраические многочлены

$$b_k(x) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} (1 - \beta_m x).$$

Они линейно независимы. Действительно, предположим обратное:

$$0 \equiv \sum_{k=1}^{M} \xi_k b_k(x) = \sum_{k=1}^{M} \xi_k \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{M} (1 - \beta_m x). \tag{13}$$

Положим в (13) $x = 1/\beta_j$, $j = \overline{1, M}$. Получим $\xi_j = 0$, $j = \overline{1, M}$, что противоречит предположению. Отсюда вытекает, что условия (11) и (12) эквивалентны. С учетом (7) равенства (12) можно переписать в виде

$$\sum_{i=N-M}^{N} \gamma_i^{(N)} \langle (I - \beta_k A)^{-1} x_0, Y_i \rangle = 0, \quad k = \overline{1, M}. \tag{14}$$

Можно показать [8], что

$$\langle (I - \beta_k A)^{-1} x_0, Y_i \rangle = \frac{f(\beta_k) Q_i(\beta_k) - P_{i-1}(\beta_k)}{\beta_k^i} = \varepsilon_i(\beta_k), \tag{15}$$

где $i = \overline{N-M, N}$, $k = \overline{1, M}$. С учетом (10), (14) и (15) получим

$$\tilde{Y}_N = \det \begin{Vmatrix} \varepsilon_{N-M}(\beta_1) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_1) & \dots & \varepsilon_N(\beta_1) \\ \varepsilon_{N-M}(\beta_2) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_2) & \dots & \varepsilon_N(\beta_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{N-M}(\beta_M) & \varepsilon_{N-M+1}(\beta_M) & \dots & \varepsilon_N(\beta_M) \\ Y_{N-M} & Y_{N-M+1} & \dots & Y_N \end{Vmatrix}.$$

Чтобы доказать теорему в общем случае, т. е. при наличии кратных β_m, достаточно сначала заменить каждое число β_m, имеющее кратность r_m, на r_m различных чисел $\beta_m, \beta_m + h, \ldots, \beta_m + (r_m - 1)h$, а затем перейти к пределу при $h \to 0$.

3. Биортогональные полиномы и аппроксимации Паде. Свойства биортогональных полиномов, установленные в теореме 1, влекут за собой свойства инвариантности аппроксимаций Паде.

Теорема 2. *Пусть для функции* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$ *существуют и невырождены аппроксиманты Паде порядков* $[N-1/N]$ *и* $[N-2/N-1]$, $N \geq 2$. *И пусть в некоторой точке* β

$$\varepsilon_{N-1}(\beta) = \frac{f(\beta)Q_{N-1}(\beta) - P_{N-2}(\beta)}{\beta^{N-1}} \neq 0.$$

Тогда для функции

$$\tilde{f}(z) = \frac{zf(z) - \beta f(\beta)}{z - \beta}$$

существует и невырождена аппроксиманта Паде порядка $[N-1/N]$. *При этом*

$$[N-1/N]_{\tilde{f}}(z) = \frac{\tilde{P}_{N-1}(z)}{\tilde{Q}_N(z)},$$

где

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\left[\beta f(\beta) Q_N(z) - zP_{N-1}(z)\right] -$$

$$- \frac{z\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left[\beta f(\beta) Q_{N-1}(z) - zP_{N-2}(z)\right],$$

$$\tilde{Q}_N(z) = \varepsilon_{N-1}(\beta) Q_N(z) - z\varepsilon_N(\beta) Q_{N-1}(z).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем полагать [9], что для последовательности $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ справедливо обобщенное моментное представление $s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle$, $k = \overline{0, \infty}$. Положим $\tilde{x}_0 = (I - \beta A)^{-1} x_0$. Отсюда

$$\tilde{s}_k = \langle A^k \tilde{x}_0, y_0 \rangle = \langle (I - \beta A)^{-1} x_0, A^{*k} y_0 \rangle = \langle R_\beta(A) x_0, y_k \rangle = \frac{f(\beta) - T_{k-1}(f; \beta)}{\beta^k},$$

где $T_k(f, z)$ — многочлены Тейлора функции $f(z)$ порядка k [8]. Далее,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{s}_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\beta) - T_{k-1}(f; \beta)}{\beta^k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k}^{\infty} s_j \beta^{j-k} z^k =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} s_j \sum_{k=0}^{j} \beta^{j-k} z^k = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \beta_j \sum_{k=0}^{j} (z/\beta)^k = \sum_{j=0}^{\infty} s_j \beta^j \frac{1 - (z/\beta)^{j+1}}{1 - z/\beta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} s_j \frac{\beta^{j+1} - z^{j+1}}{\beta - z} = \frac{zf(z) - \beta f(\beta)}{z - \beta}.$$

С учетом теоремы 1

$$\tilde{Y}_N = \varepsilon_{N-1}(\beta)Y_N - \varepsilon_N(\beta)Y_{N-1},$$

или

$$\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} y_j = \sum_{j=0}^{N-1} [\varepsilon_{N-1}(\beta)c_j^{(N)} - \varepsilon_N(\beta)c_j^{(N-1)}]y_j + \varepsilon_{N-1}(\beta)\, c_N^{(N)} y_N.$$

Отсюда имеем

$$\tilde{c}_j^{(N)} = \varepsilon_{N-1}(\beta)c_j^{(N)} - \varepsilon_N(\beta)c_j^{(N-1)}, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad \tilde{c}_N^{(N)} = \varepsilon_{N-1}(\beta)\, c_N^{(N)}.$$

Поэтому знаменатель аппроксиманты Паде функции $\tilde{f}(z)$ порядка $[N-1/N]$ равен

$$\tilde{Q}_N(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} = \sum_{j=0}^{N-1} [\varepsilon_{N-1}(\beta)c_j^{(N)} - \varepsilon_N(\beta)c_j^{(N-1)}]z^{N-j} + \varepsilon_{N-1}(\beta)\, c_N^{(N)} =$$

$$= \varepsilon_{N-1}(\beta)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j} - \varepsilon_N(\beta)\sum_{j=0}^{N-1} c_j^{(N-1)} z^{N-j} =$$

$$= \varepsilon_{N-1}(\beta)Q_N(z) - \varepsilon_N(\beta)zQ_{N-1}(z).$$

Для числителя получаем

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} z^{N-j} T_{j-1}[\tilde{f}; z]. \tag{16}$$

Имеем

$$T_{j-1}[\tilde{f}; z] = \sum_{p=0}^{j-1} \tilde{s}_p z^p = \sum_{p=0}^{j-1} f_p(\beta) z^p = \sum_{p=0}^{j-1} \frac{f(\beta) - T_{p-1}(f; \beta)}{\beta^p} z^p =$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} \sum_{k=p}^{\infty} s_k \beta^{k-p} z^p = \sum_{p=0}^{j-1} \left[\sum_{k=p}^{j-1} s_p \beta^{k-p} + \sum_{k=j}^{\infty} s_p \beta^{k-p} \right] z^p =$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} s_k \beta^k \sum_{p=0}^{k} \left(\frac{z}{\beta}\right)^p + \sum_{k=j}^{\infty} s_k \beta^k \sum_{p=0}^{j-1} \left(\frac{z}{\beta}\right)^p =$$

$$= \sum_{k=0}^{j-1} s_k \beta^k \frac{1 - \left(\frac{z}{\beta}\right)^{k+1}}{1 - \frac{z}{\beta}} + \sum_{k=j}^{\infty} s_k \beta^k \frac{1 - \left(\frac{z}{\beta}\right)^{j}}{1 - \frac{z}{\beta}} =$$

$$= \frac{1}{\beta - z} \sum_{k=0}^{j-1} s_k (\beta^{k+1} - z^{k+1}) + \frac{1}{\beta - z} \sum_{k=j}^{\infty} s_k \beta^{k-j+1} (\beta^j - z^j) =$$

$$= \frac{1}{\beta - z} \{\beta T_{j-1}[f; \beta] - z T_{j-1}[f; z]\} + \frac{1}{\beta - z} \sum_{k=j}^{\infty} s_k (\beta^{k+1} - \beta^{k-j+1} z^j) =$$

$$= \frac{1}{\beta - z} \{\beta T_{j-1}[f; \beta] - z T_{j-1}[f; z]\} +$$

$$+ \frac{\beta}{\beta - z} \left[1 - \left(\frac{z}{\beta}\right)^j\right] \{f(\beta) - z T_{j-1}[f; \beta]\} =$$

$$= \frac{1}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta) - \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^j f(\beta) + \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^j T_{j-1}[f;\beta] - zT_{j-1}[f;z]\right\}. \quad (17)$$

Подставив (17) в (16), получим

$$\tilde{P}_{N-1}(z) = \varepsilon_{N-1}(\beta)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} z^{N-j}\frac{1}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta) - \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^j f(\beta) + \right.$$

$$\left. + \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^j T_{j-1}[f;\beta] - zT_{j-1}[f;z]\right\} -$$

$$- \varepsilon_N(\beta)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N-1)} z^{N-j}\frac{1}{\beta - z}\left[\beta f(\beta) - \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^j f(\beta) + \right.$$

$$\left. + \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^j T_{j-1}(\beta) - zT_{j-1}(z)\right] = \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\left\{\beta f(\beta)\,Q_N(z) - zP_{N-1}(z) - \right.$$

$$\left. - \beta\left(\frac{z}{\beta}\right)^N \varepsilon_N(\beta)\,\beta^N\right\} - \frac{\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\left\{z\beta f(\beta)\,Q_{N-1}(z) - z^2 P_{N-2}(z) - \right.$$

$$\left. - \beta^2\left(\frac{z}{\beta}\right)^N \varepsilon_{N-1}(\beta)\,\beta^{N-1}\right\} = \frac{\varepsilon_{N-1}(\beta)}{\beta - z}\{\beta f(\beta)\,Q_N(z) - zP_{N-1}(z)\} -$$

$$- \frac{\varepsilon_N(\beta)}{\beta - z}\{z\beta f(\beta)\,Q_{N-1}(z) - z^2 P_{N-2}(z)\}.$$

Таким образом, теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим функцию $f(z) = (\exp z - 1)/z = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/(k+1)!$. Для последовательности $s_k = 1/(k+1)!$, $k = \overline{0,\infty}$, справедливо обобщенное моментное представление

$$s_{k+j} = \frac{1}{(k+j+1)!} = \int_0^1 \frac{t^k}{k!}\frac{(1-t)^j}{j!}\,dt, \quad k, j = \overline{0,\infty},$$

или

$$s_k = \langle A^k x_0, y_0\rangle, \quad k, j = \overline{0,\infty},$$

где $X = X^* = L_2[0,1]$, оператор A определяется соотношением

$$(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau,$$

а начальные элементы (функции) x_0 и y_0 тождественно равны 1. Возьмем теперь $\tilde{x}_0(t) = \cos\alpha t$, $\alpha \in (0, \pi/2]$. Легко видеть, что

$$(A\tilde{x}_0)(t) = \int_0^t \cos\alpha\tau\,d\tau = \frac{\sin\alpha t}{\alpha},$$

$$(A^2\tilde{x}_0)(t) = \int_0^t \frac{\sin\alpha\tau}{\alpha}\,d\tau = \frac{1 - \cos\alpha t}{\alpha^2},$$

откуда $[(I+\alpha^2A^2)\tilde{x}_0](t) = 1 = x_0(t)$, что дает возможность применить ранее изложенные рассуждения. Более того, система функций $\{\tilde{x}_k(t)\}_{k=0}^{N}$ при каждом $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $\alpha \in (0, \pi/2]$ будет чебышевской на $[0, 1]$ [10, с. 13]. Действительно, то, что эта система будет чебышевской при $N \le 2$, очевидно, а при $N > 2$ вытекает из того, что система функций $\{\tilde{x}_k(t)\}_{k=0}^{N-2} \cup \{\tilde{x}_k(t)\}_{k=0}^{1}$ является чебышевской. Запишем определитель Вронского

$$W_N = \det \begin{Vmatrix} 1 & t & \ldots & t^{N-2}/(N-2)! & \cos\alpha t & \alpha^{-1}\sin\alpha t \\ 0 & 1 & \ldots & t^{N-3}/(N-3)! & -\alpha\sin\alpha t & \cos\alpha t \\ \hdashline 0 & 0 & \ldots & 1 & (\cos\alpha t)^{(N-2)} & (\cos\alpha t)^{(N-3)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (\cos\alpha t)^{(N-1)} & (\cos\alpha t)^{(N-2)} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (\cos\alpha t)^{(N)} & (\cos\alpha t)^{(N-1)} \end{Vmatrix} =$$

$$= \det \begin{Vmatrix} \alpha^{N-1}\cos\left[\alpha t + \dfrac{(N-1)\pi}{2}\right] & \alpha^{N-2}\sin\left[\alpha t + \dfrac{(N-1)\pi}{2}\right] \\ \alpha^{N}\cos\left[\alpha t + \dfrac{N\pi}{2}\right] & \alpha^{N-1}\sin\left[\alpha t + \dfrac{N\pi}{2}\right] \end{Vmatrix} =$$

$$= \alpha^{4N-4} \neq 0 \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Поскольку система функций $\{y_k(t)\}_{k=0}^{N}$ также при всех $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ является чебышевской, то к данной ситуации применимы результаты, приведенные в [8], благодаря чему можно сделать вывод о существовании, невырожденности и равномерной сходимости на компактах комплексной плоскости аппроксимант Паде порядков $[N-1/N]$, $N \in \mathbb{N}$, функции

$$\tilde{f}(z) = \langle R_z(A)\,\tilde{x}_0, y_0\rangle = \int_0^1 \cos\alpha t\, e^{z(1-t)}dt = \frac{ze^z + \alpha\sin\alpha - z\cos\alpha}{z^2 + \alpha^2}.$$

1. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Р.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
3. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 6. – С. 8 – 12.
4. *Iserles A., Nørsett S. P.* Bi-orthogonal polynomials // Lect. Notes Math. – 1985. – **1171**. – P. 92 – 100.
5. *Iserles A., Nørsett S. P.* On the theory of bi-orthogonal polynomials // Math. and Comput. – 1986. – № 1. – 42 p.
6. *Голуб А. П.* Некоторые свойства биортогональных полиномов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1384 – 1388.
7. *Голуб А. П.* Некоторые свойства биортогональных полиномов и их приложения к аппроксимации Паде // Там же. – 1994. – **46**, № 8. – С. 977 – 984.
8. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с: – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.25).
9. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3 – 15. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
10. *Карлин С., Стадден В.* Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике. – М.: Наука, 1976. – 568 с.

Получено 30.06.93