УДК 517. 512

С. Б. Вакарчук, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т геотехн. механики НАН Украины, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. II

For entire transcendental functions $f(z)$ of order $\rho = 0$, in the metric of the space $E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$, the behavior of the best approximations by polynomials $\mathcal{E}_n(f)_{E'_p}$ of degree $\leq n$ is studied. In particular, the relation of the logarithmic order ρ_L and the type σ_L of the function $f(z)$ to $\mathcal{E}_n(f)_{E'_p}$ is established.

Для цілих трансцендентних функцій $f(z)$, що мають порядок $\rho = 0$, у метриці простору $E'_p(\Omega)$, $p \geq 1$, розглянуто питання поведінки найкращих наближень $\mathcal{E}_n(f)_{E'_p}$ поліномами степеня $\leq n$. Зокрема, встановлені співвідношення, що зв'язують логарифмічний порядок ρ_L і тип σ_L функції $f(z)$ з $\mathcal{E}_n(f)_{E'_p}$.

Настоящая статья является продолжением работы [16], поэтому в ней сохранены основные обозначения, а нумерация пунктов, утверждений, формул и списка литературы продолжена.

7. Для целых функций $f(z)$, имеющих порядок роста $\rho = \lambda(2) = 0$, целесообразно использовать дополнительные характеристики — логарифмический порядок ρ_L и логарифмический тип σ_L, позволяющие производить деление функций на классы по их росту [17].

Пусть Ω — конечная односвязная область со спрямляемой границей γ. Используя [3, 17], нетрудно показать справедливость формулы

$$\rho_L = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln\ln \tilde{M}(r,f)_\Omega}{\ln\ln r}. \tag{38}$$

Если $1 < \rho_L < \infty$, то в силу тех же соображений логарифмический тип функций $f(z)$ определяется выражением

$$\sigma_L = \limsup_{r\to\infty} \frac{\ln \tilde{M}(r,f)_\Omega}{(\ln r)^{\rho_L}}. \tag{39}$$

Установим связи между величинами ρ_L и σ_L, с одной стороны, и коэффициентами разложения целой функции в ряд по полиномам Фабера в области Ω, — с другой.

Лемма 5. *Пусть Ω — конечная односвязная область со спрямляемой границей γ. Для того чтобы аналитическая на множестве Ω и представимая рядом Фабера* (15) *функция $f(z)$ была целой логарифмического порядка $\rho_L \in [1,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left\{n^{-1}\ln 1/|a_n|\right\}} = \rho_L - 1. \tag{40}$$

Если $\rho_L \in (1,\infty)$, то условие

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(\rho_L-1)^{\rho_L-1}}{\rho_L^{\rho_L}} \frac{n^{\rho_L}}{[\ln 1/|a_n|]^{\rho_L-1}} = \sigma_L \tag{41}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы аналитическая на множестве $\overline{\Omega}$ функция $f(z)$ была целой логарифмического порядка ρ_L и логарифмического типа $\sigma_L \in (0,\infty)$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f(z)$ — целая функция логарифмического порядка $\rho_L \in [1, \infty)$. Тогда из (38) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon > 0$ такое, что

$$\tilde{M}(r, f)_\Omega \le \exp\left[(\ln r)^{\rho_L+\varepsilon}\right] \quad \forall r > r_\varepsilon. \tag{42}$$

Для функции $\psi(w)$, осуществляющей конформное отображение множества $|w| > 1$ на внешность области Ω, имеем

$$\lim_{|w|\to\infty} \psi(w)/w = d,$$

где d — трансфинитный диаметр множества $\overline{\Omega}$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует w_ε такое, что

$$(d-\varepsilon)|w| \le |\psi(w)| \le (d+\varepsilon)|w| \quad \forall w : |w| > |w_\varepsilon|. \tag{43}$$

Используя (42), для достаточно больших $|w|$ записываем

$$|f(\psi(w))| \le \exp\left\{\left[\ln (d+\varepsilon)|w|\right]^{\rho_L+\varepsilon}\right\}.$$

Отсюда, учитывая вид коэффициентов a_n (см. теорему А из [16]), получаем $|a_n| \le F_n(r)$, где $F_n(r) \overset{\text{df}}{=} r^{-n}\exp\left\{\left[\ln (d+\varepsilon)|r|\right]^{\rho_L+\varepsilon}\right\}$. Исследуя функцию $F_n(r)$ на экстремум, нетрудно видеть, что в точке $r_* = (d+\varepsilon)^{-1}\exp\left[(n/(\rho_L + \varepsilon))^{1/(\rho_L+\varepsilon-1)}\right]$ $\min\{F_n(r) : r > 0\} = F_n(r_*)$. Следовательно,

$$|a_n| \le (d+\varepsilon)^n \exp\left[-\beta n^{(\rho_L+\varepsilon)/(\rho_L+\varepsilon-1)}\right], \quad \beta \overset{\text{df}}{=} 1 - 1/(\rho_L+\varepsilon).$$

Учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, имеем

$$\rho_L - 1 \ge \hat{\rho}_L - 1 \overset{\text{df}}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left\{n^{-1}\ln 1/|a_n|\right\}}. \tag{44}$$

Покажем справедливость неравенства $\hat{\rho}_L \ge \rho_L$, из которого при учете (44) следует соотношение (40). Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существует n_ε такое, что

$$|a_n| \le 1/\exp\left[n^{(\hat{\rho}_L+\varepsilon)/(\hat{\rho}_L+\varepsilon-1)}\right] \quad \forall n > n_\varepsilon, \tag{45}$$

нетрудно убедиться в том, что для всех натуральных $n \ge n_r > n_\varepsilon$, где $r > 1$, $n_r \overset{\text{df}}{=} 1 + [\![(\ln(2r))^{\hat{\rho}_L+\varepsilon-1}]\!]$, справедливо неравенство

$$|a_n| r^n \le 2^{-n}. \tag{46}$$

Используя (17) и (46), имеем

$$\tilde{M}(r, f)_\Omega \le c_1(r)\left\{r^{n_\varepsilon}\sum_{k\le n_\varepsilon}|a_k| + 2 + (n_r - n_\varepsilon)\max\left\{|a_k| r^k : k = \overline{n_\varepsilon, n_r}\right\}\right\}. \tag{47}$$

Учитывая (45) при оценке сверху слагаемых с индексами $k = \overline{n_\varepsilon, n_r}$, для достаточно больших r из (47) получаем

$$\tilde{M}(r, f)_\Omega = O\left(r^{t(\ln r)^{\hat{\rho}_L+\varepsilon-1}}\right), \quad t = \text{const} > 0.$$

В силу (38) и произвольности $\varepsilon > 0$ последнее соотношение означает, что $\hat{\rho}_L \ge \rho_L$, т. е. справедливо равенство (40).

Докажем необходимость условия (41). Пусть $f(z)$ — целая функция логарифмического порядка $\rho_L \in (1, \infty)$ и логарифмического типа $\sigma_L \in (0, \infty)$. На основании (39) для любого $\varepsilon > 0$ существует $r_\varepsilon > 0$ такое, что

$$M(r) \le \exp[(\sigma_L + \varepsilon)(\ln r)^{\rho_L}] \quad \forall r > r_\varepsilon. \tag{48}$$

Используя (43), (48), для достаточно больших $r > 0$ получаем

$$|a_n| \le r^{-n} \exp\{(\sigma_L + \varepsilon)[\ln(d+\varepsilon)r]^{\rho_L}\}.$$

Нетрудно убедиться в том, что правая часть последнего неравенства принимает минимальное значение при $\tilde{r} = (d+\varepsilon)^{-1} \exp\{[n/((\sigma_L+\varepsilon)\rho_L)^{1/(\rho_L-1)}]$ и для $r = \tilde{r}$

$$|a_n| \le (d+\varepsilon)^n \exp\{-\tilde{\delta}\, n^{\rho_L/(\rho_L-1)} / (\rho_L(\sigma_L+\varepsilon)^{1/(\rho_L-1)})\},$$

где $\tilde{\delta} \overset{\mathrm{df}}{=} 1 - 1/\rho_L$. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sigma_L \ge \hat{\sigma}_L \overset{\mathrm{df}}{=} \limsup_{n\to\infty} \frac{(\rho_L - 1)^{\rho_L - 1}}{\rho_L^{\rho_L}} \frac{n^{\rho_L}}{[\ln 1/|a_n|]^{\rho_L - 1}}. \tag{49}$$

Покажем справедливость неравенства $\hat{\sigma}_L \ge \sigma_L$. Из правой части соотношения (49) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathrm{N}$ такое, что

$$|a_n| \le 1/\exp[\tilde{\nu}\, n^{\rho_L}/(\hat{\sigma}_L + \varepsilon)]^{1/(\rho_L-1)} \quad \forall n > n_\varepsilon, \tag{50}$$

где $\tilde{\nu} = (\rho_L - 1)^{\rho_L - 1} / \rho_L^{\rho_L}$. Полагая $\tilde{n}_r \overset{\mathrm{df}}{=} [\![(\hat{\sigma}_L + \varepsilon)(\ln(2r))^{\hat{\rho}_L - 1} / \tilde{\nu}]\!] + 1$ для всех натуральных $n \ge \tilde{n}_r > n_\varepsilon$, имеем (46). Используя, как и в предыдущем случае, (17) и (46), получаем неравество (47). Проводя с помощью (50) оценки сверху слагаемых из (47), соответствующих индексам $k = \overline{n_\varepsilon, \tilde{n}_r}$, для достаточно больших r запишем

$$\tilde{M}(r, f)_\Omega = O(r^{(\hat{\sigma}_L + \varepsilon)(\ln r)\rho_L - 1}).$$

Отсюда и из (39) следует, что целая функция $f(z)$ имеет логарифмический порядок ρ_L и логарифмический тип не больше $\hat{\sigma}_L$. Следовательно, $\sigma_L = \hat{\sigma}_L$.

Остановимся вкратце на доказательстве *достаточности* условий (40), (41) и, не уменьшая общности, рассмотрим одно из них. Пусть, например, для аналитической в области $\overline{\Omega}$ функции $f(z)$ выполнено соотношение (40). Тогда справедлива формула $0 = \lim\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, а это в силу теоремы А из [16] означает, что $f(z)$ — целая функция. Полагая ее логарифмический порядок равным $\hat{\rho}_L$ и используя (38), а также рассуждения, проведенные при доказательстве необходимости условия (40), находим $\hat{\rho}_L = \rho_L$. Лемма 5 доказана.

8. Использовав основные результаты п. 7, рассмотрим вопросы о скорости стремления к нулю величин наилучших полиномиальных приближений целых трансцендентных функций конечного логарифмического порядка и типа.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(z) \in E_2'(\Omega)$, *где* Ω *— конечная односвязная область с жордановой границей* $\gamma \in \Gamma$. *Условия*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left\{n^{-1} \ln \mathcal{E}_n^{-1}(f)_{E_2'}\right\}} = \hat{\rho}_L - 1, \tag{51}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{(\hat{\rho}_L - 1)^{\hat{\rho}_L - 1}}{\hat{\rho}_L^{\hat{\rho}_L}} \frac{n^{\hat{\rho}_L}}{\left[\ln \mathcal{E}_n^{-1}(f)_{E_2'}\right]^{\hat{\rho}_L - 1}} = \hat{\sigma}_L \tag{52}$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция $f(z)$ *была соответственно:* 1) *целой логарифмического порядка* $\hat{\rho}_L \in [1, \infty)$; 2) *целой логарифмического порядка* $\hat{\rho}_L \in (1, \infty)$ *и логарифмического типа* $\hat{\sigma}_L \in \in (0, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим вначале условие (51). Тогда справедливо равенство $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{E}_n^{1/n}(f)_{E_2'}$. В силу теоремы 1 это означает, что функция $f(z) \in E_2'(\Omega)$ — целая. Полагая ее логарифмический порядок равным ρ_L, покажем справедливость равенства $\rho_L = \hat{\rho}_L$. В силу (40) для каждого $\delta > 0$ существует $m_\delta \in \mathrm{N}$ такое, что

$$|a_n| \leq 1/\exp\left(n^{1/(\rho_L - 1 + \delta) + 1}\right) \quad \forall n > m_\delta. \tag{53}$$

Используя (23), (53), для всех натуральных $n > \max\{m_\delta; \tilde{M}_{r,\delta,L}\}$, где $\tilde{M}_{r,\delta,L} \stackrel{\mathrm{df}}{=} [\![(\ln r)^{\rho_L - 1 + \delta}]\!] + 1$, $r = \mathrm{const} \in (1, \infty)$, получаем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'} \leq c_1(r) r^{n+1} \{1 - r^2/\exp[2(n+1)^{1/(\rho_L - 1 + \delta)}]\}^{-1/2} \times$$
$$\times \{\exp(n+1)^{1/(\rho_L - 1 + \delta) + 1}\}^{-1}. \tag{54}$$

Разрешая это соотношение относительно выражения $\rho_L - 1 + \delta$, входящего в последний сомножитель правой части неравенства (54), и учитывая произвольность выбора $\delta > 0$ и оценку (17) для $c_1(r)$ при $r = 1 + 1/n$, имеем $\rho_L \geq \hat{\rho}_L$.

Используя (51), (26), (20) и неравенство (12) при $p_1 = \infty$, $p = 2$, запишем

$$\hat{\rho}_L \geq 1 + \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left\{n^{-1} \ln 1/|a_n|\right\}} = \rho_L.$$

Следовательно, $\hat{\rho}_L = \rho_L$.

Показывая необходимость условия (51), полагаем, что $f(z)$ — целая функция конечного логарифмического порядка $\rho_L \geq 1$. Справедливость равенства $\hat{\rho}_L = \rho_L$ доказывается как и в случае достаточности условия (51).

Рассмотрим условие (52). Пусть $f(z)$ — целая функция конечного логарифмического порядка $\hat{\rho}_L \in (1, \infty)$, определяемого формулой (51), и конечного логарифмического типа $\sigma_L > 0$, связанного с $\hat{\rho}_L$ соотношением (41). Докажем, что $\hat{\sigma}_L = \sigma_L$.

Из (41) следует, что для любого $\delta > 0$ существует $m_\delta \in \mathrm{N}$ такое, что

$$|a_n| \leq 1/\exp\left[\left(\frac{n}{\hat{\rho}_L}\right)^{\hat{\rho}_L/(\hat{\rho}_L - 1)} \frac{\hat{\rho}_L - 1}{(\sigma_L + \delta)^{1/(\hat{\rho}_L - 1)}}\right] \quad \forall n > m_\delta. \tag{55}$$

В силу (23) и (55) для всех натуральных $n > \max\{m_\delta; \hat{M}_{r,\delta,L}\}$, где $\hat{M}_{r,\delta,L} \stackrel{\mathrm{df}}{=}$ $\stackrel{\mathrm{df}}{=} [\![\rho_L^{\rho_L}(\sigma_L + \delta)(\rho_L - 1)^{1-\rho_L}(\ln r)^{\rho_L - 1}]\!] + 1$; $r \in (1, \infty)$, запишем

$$\mathcal{E}_n(f)_{E_2'} \leq c_1(r) r^{n+1} \{1 - r^2/\exp[2(n+1)^{1/(\rho_L - 1)} \times$$
$$\times \rho_L^{\rho_L/(1-\rho_L)}(\rho_L - 1)/(\sigma_L + \delta)^{1/(\rho_L - 1)}]\}^{-1/2} \times$$
$$\times \{\exp[((n+1)/\rho_L)^{\rho_L/(\rho_L - 1)}(\rho_L - 1)/(\sigma_L + \delta)^{1/(\rho_L - 1)}]\}^{-1}. \tag{56}$$

Полагая $r = 1 + 1/n$ и подставляя в левую часть соотношения (52) вместо $\mathcal{E}_n(f)_{E_2'}$ правую часть неравенства (56), в силу (17) и произвольности $\delta > 0$

имеем $\hat{\sigma}_L \le \sigma_L$. Обратное неравенство $\sigma_L \le \hat{\sigma}_L$ получаем на основании (52), (26), (20) и (12), где $p_1 = \infty$, $p = 2$. Следовательно, $\sigma_L = \hat{\sigma}_L$.

Остановимся вкратце на доказательстве достаточности условия (52). Из выполнения формулы (52) имеем $\mathcal{E}_n^{1/n}(f)_{E_2'} \to 0$ при $n \to \infty$, а это означает, что функция $f(z) \in E_2'(\Omega)$ — целая (см. теорему 1). Из (51), (52) следует, что ее логарифмический порядок равен $\hat{\rho}_L$. Полагая логарифмический тип $f(z)$ равным σ_L, совпадение σ_L с $\hat{\sigma}_L$ показываем так же, как и в случае необходимости условия (52). Теорема 4 доказана.

Следующее ниже утверждение приведем без доказательства, поскольку оно аналогично доказательству теоремы 2; при этом существенно используются результаты теоремы 4.

Теорема 5. *Пусть функция $f(z) \in E_p'(\Omega)$, где $p \ge 1$, и область Ω удовлетворяет требованиям предыдущей теоремы. Тогда условия*

$$1)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left\{n^{-1}\ln \mathcal{E}_n^{-1}(f)_{E_p'}\right\}} = \hat{\rho}_L - 1;$$

$$2)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{(\hat{\rho}_L - 1)^{\hat{\rho}_L - 1}}{\hat{\rho}_L^{\hat{\rho}_L}} \frac{n^{\hat{\rho}_L}}{\left[\ln \mathcal{E}_n^{-1}(f)_{E_p'}\right]^{\hat{\rho}_L - 1}} = \hat{\sigma}_L$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы функция $f(z)$ была соответственно: 1) *целой логарифмического порядка* $\hat{\rho}_L \in [1, \infty)$; 2) *целой логарифмического порядка* $\hat{\rho}_L \in (1, \infty)$ *и логарифмического типа* $\hat{\sigma}_L \in (0, \infty)$.

9. Полученные в п. 8 результаты допускают распространение на банаховы пространства аналитических функций $E_p(\Omega)$, $p \ge 1$, введенные В. И. Смирновым [13, 15].

Теорема 6. *Пусть Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости со спрямляемой границей γ и функция $f(z) \in E_p(\Omega)$, $p \ge 1$. Для того чтобы $f(z)$ была соответственно:* 1) *целой логарифмического порядка* $\hat{\rho}_L \in [1, \infty)$; 2) *целой логарифмического порядка* $\hat{\rho}_L \in (1, \infty)$ *и логарифмического типа* $\hat{\sigma}_L \in (0, \infty)$, *необходимо и достаточно выполнение соответствующих условий:*

$$1)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln\left\{n^{-1}\ln \mathcal{E}_n^{-1}(f)_{E_p}\right\}} = \hat{\rho}_L - 1;$$

$$2)\ \limsup_{n\to\infty} \frac{(\hat{\rho}_L - 1)^{\hat{\rho}_L - 1}}{\hat{\rho}_L^{\hat{\rho}_L}} \frac{n^{\hat{\rho}_L}}{\left[\ln \mathcal{E}_n^{-1}(f)_{E_p}\right]^{\hat{\rho}_L - 1}} = \hat{\sigma}_L.$$

Доказательство данного утверждения основано на тех же идейных соображениях, что и доказательство теоремы 3. При этом существенная роль отводится ряду рассуждений и результатов, полученных в ходе доказательства теорем 4, 5.

16. *Вакарчук С. Б.* О наилучшем полиномиальном приближении целых трансцендентных функций в некоторых банаховых пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1123 – 1133.

17. *Reddy A. R.* Approximation of an entire function // J. Approxim. Theory. – 1970. – **3**, № 1. – P. 128 – 137.

Получено 06.07.92