УДК 513

Л. А. Сахнович, д-р физ.-мат. наук (Одес. электротехн. ин-т связи)

ОБ ОДНОЙ ГИПОТЕЗЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ГАМИЛЬТОНИАНОВ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ*

Canonical systems are classified. It is shown that, under certain conditions, Hamiltonians belonging to the same class are linearly similar.

Канонічні системи розподілені на класи. Показано, що при певних умовах гамільтоніани одного й того ж класу лінійно подібні.

1. В настоящей статье рассматриваются канонические дифференциальные системы

$$\frac{dW}{dx} = izJ\mathcal{H}(x)W(x,z), \quad W(0,z) = E_{2m}, \tag{1}$$

где J, $\mathcal{H}(x)$, $W(x,z)$ — матрицы-функции порядка $2m \times 2m$, причем

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{H}(x) \geq 0.$$

Исследуем системы вида (1), порожденные операторными тождествами [1] вида

$$AS - SA^* = i(\Phi_1\Phi_2^* + \Phi_2\Phi_1^*). \tag{2}$$

Будем предполагать далее, что выполнены следующие требования:

1) операторы A и S действуют в пространстве $L_m^2(0,\omega)$, причем $S > 0$ и

$$S\vec{f} = \overrightarrow{f(x)} + \int_0^{\omega} \mathcal{K}(x,t)\overrightarrow{f(t)}\,dt, \tag{3}$$

$$A\vec{f} = \int_0^{x} a(x,t)\overrightarrow{f(t)}\,dt, \tag{4}$$

где $\mathcal{K}(x,t)$ и $a(x,t)$ — непрерывные матрицы-функции порядка $m \times m$;

2) операторы Φ_1, Φ_2 имеют вид

$$\Phi_k\vec{g} = L_k(x)\vec{g}, \quad k = 1, 2, \tag{5}$$

где $L_1(x)$ и $L_2(x)$ — непрерывные матрицы-функции порядка $m \times m$, а $\vec{g}$ — постоянные вектор-столбцы.

Введем еще семейство проекторов

$$P_\zeta\vec{f} = \begin{cases} \overrightarrow{f(x)}, & 0 \leq x \leq \zeta; \\ \vec{0}, & \zeta < x \leq \omega. \end{cases} \tag{6}$$

Из соотношений (4), (6) следует

$$P_\zeta A^* P_\zeta = A^* P_\zeta.$$

В статье [1] показано, что тождеству (2) соответствует система

$$W(x,z) = E_{2m} + izJ\int_0^x [d\sigma(t)]\,W(t,z), \tag{7}$$

где

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$\sigma(\zeta) = \Pi^* S_\zeta^{-1} P_\zeta \Pi, \quad \Pi = [\Phi_1, \Phi_2], \quad S_\zeta = P_\zeta S P_\zeta. \tag{8}$$

2. Из условия 1 следует, что оператор S_ζ^{-1} имеет вид

$$S_\zeta^{-1}\vec{f} = \overrightarrow{f(x)} + \int_0^\zeta \Gamma_\zeta(x,t)\overrightarrow{f(t)}\,dt.$$

Оператор S в силу условия 1 допускает факторизацию, т. е. может быть представлен в виде [2]

$$S^{-1} = (E+V_-^*)(E+V_-), \tag{9}$$

где

$$V_-\vec{f} = \int_0^x \Gamma_x(x,t)\overrightarrow{f(t)}\,dt.$$

Из соотношений (8), (9) выводим

$$\sigma'(x) = \mathcal{H}(x) = \left\{\vec{F}_p^*(x)\vec{F}_q(x)\right\}_{q,p=1}^2, \tag{10}$$

причем

$$\vec{F}_q(x) = (E+V_-)L_q(x) \quad q = 1, 2. \tag{11}$$

Отметим, что матрица-функция $\Gamma_x(x,t)$ непрерывна [2]. Значит, в силу (10), (11) матрица-функция $\mathcal{H}(x)$ непрерывна. Из абсолютной непрерывности $\sigma(x)$ вытекает, что система (7) эквивалентна системе (1).

3. Будем считать операторы A и Φ_2 фиксированными. Класс $\mathcal{H}(x)$, который получается при варьировании Φ_1 и S, обозначим через $N(A,\Phi_2)$. При этом предполагается, что условия 1, 2 выполнены.

Гипотеза. *Если $\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_2(x) \in N(A,\Phi_2)$, то матрицы-функции $J\mathcal{H}_1(x)$, $J\mathcal{H}_2(x)$ при каждом x линейно подобны.*

В статье [1] при дополнительных жестких условиях доказана справедливость сформулированной гипотезы. В данной статье гипотеза доказывается для ряда важных в приложениях классов $N(A,\Phi_2)$. При этом мы опираемся на результат из [1].

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{H}(x), \mathcal{H}_0(x) \in N(A,\Phi_2)$, причем соответствующие операторы S, Φ_k определены формулами* (3), (5), *а*

$$S_0\vec{f} = \overrightarrow{f(x)} + \int_0^\omega \mathcal{K}_0(x,t)\overrightarrow{f(t)}\,dt, \tag{12}$$

$$\Phi_1^0\vec{g} = L_1^0(x)\vec{g}. \tag{13}$$

Пусть далее существуют вещественные числа $u_j(r)$ и самосопряженные матрицы $\gamma_j(r)$, $\alpha_{N(r)}$ такие, что для $\varepsilon_r \to 0$ справедливы неравенства

$$\sup_{0\le x,t\le\omega} \|\mathcal{K}(x,t) - \mathcal{K}(x,t,r)\| < \varepsilon_r, \tag{14}$$

$$\sup_{0\le x,t\le\omega} \|L_1(x) - L_1(x,r)\| < \varepsilon_r, \tag{15}$$

где

$$L_1(x,r) = L_1^0(x) - \sum_{=1}^{N(r)} A[E-u_j(r)A]^{-1}L_2(x)\gamma_j(r) - iL_2(x)\alpha_{N(r)},$$

а $\mathcal{K}(x, t, r)$ *определяется равенством*

$$S(r)\vec{f} = \vec{f} + \int_0^{\omega} \mathcal{K}(x, t, r)\overrightarrow{f(t)}dt =$$

$$= S_0\vec{f} + \sum_{j=1}^{N(r)} [E - u_j(r)A]^{-1}\Phi_2\gamma_j(r)\Phi_2^*[E - u_j(r)A^*]^{-1}\vec{f}.$$

Тогда соответствующие матрицы $J\mathcal{H}_0(x)$ *и* $J\mathcal{H}(x)$ *линейно подобны.*

(*Нормы матриц, стоящих в левых частях* (14), (15), *определяются метрикой пространства* G_1.)

Доказательство. Для последовательности операторов $S(r)$ справедливы тождества

$$AS(r) - S(r)A^* = i\left[\Phi_1(r)\Phi_2^* + \Phi_2\Phi_1^*(r)\right], \tag{16}$$

где

$$\Phi_1(r)\vec{g} = L_1(x, r)\vec{g}.$$

Тождеству (16) соответствует система

$$\frac{dW}{dx} = izJ\mathcal{H}(x, r)W,$$

принадлежащая классу $N(A, \Phi_2)$. При этом аналогично (10), (11) выводим равенства

$$\mathcal{H}(x, r) = \left\{\vec{F}_p^*(x, r)\vec{F}_q(x, r)\right\}_{q,p=1}^2, \tag{17}$$

$$\vec{F}_p(x, r) = [E + V_-(r)]L_p(x, r), \tag{18}$$

$$V_-(r)\vec{f} = \int_0^x \Gamma_x(x, t, r)\overrightarrow{f(t)}dt. \tag{19}$$

Из (14) следует (см. [2])

$$\Gamma_x(x, t, r) \to \Gamma_x(x, t), \quad \varepsilon_r \to 0. \tag{20}$$

Из (13), (15) и (18) – (20) получаем соотношение

$$F_p(x, r) \to F_p(x), \quad p = 1, 2; \quad \varepsilon_r \to 0.$$

Значит, согласно (10), (17) верно равенство

$$\lim \mathcal{H}(x, r) = \mathcal{H}(x), \quad \varepsilon_r \to 0. \tag{21}$$

Матрицы $J\mathcal{H}(x, r)$ и $J\mathcal{H}_0(x)$ линейно подобны (см. [1], гл. 4, § 2). Из этого факта и равенства (21) вытекает утверждение теоремы.

***Пример* 1.** Рассмотрим класс $N(A, \Phi_2)$, где операторы A и Φ_2 выбраны следующим образом:

$$A\vec{f} = iW\int_0^x \overrightarrow{f(t)}dt, \quad \Phi_2\vec{g} = \vec{g}, \tag{22}$$

$$W = \operatorname{diag}\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2m}\}, \quad \omega_k > 0.$$

Тогда ядро $\mathcal{K}(x, t)$ имеет следующую структуру [3]:

$$\mathcal{K}(x, t) = \left\{k_{p,q}(\omega_p x - \omega_q t)\right\}_{p,q=1}^2, \quad k(x, t) = k^*(x, t),$$

а матрица $L_1(x)$ определяется равенством

$$L_1(x) = W\int_0^x k(u,0)du + W/2.$$

Выбирая $S_0 = E$, из формулы (10) выводим

$$\mathcal{H}_0(x) = \begin{bmatrix} W^2/4 & W/2 \\ W/2 & E_m \end{bmatrix}. \tag{23}$$

***Следствие* 1.** *Пусть A и Φ_2 определены равенствами* (22), *а $\mathcal{H}_0(x)$ — равенством* (23). *Если $\mathcal{H}(x) \in N(A, \Phi_2)$, то матрицы $J\mathcal{H}(x)$ и $J\mathcal{H}_0(x)$ линейно подобны.*

В самом деле, условие (14) теоремы 1 сводится к возможности равномерной аппроксимации ядра $\mathcal{K}(x,t)$ линейными ядрами $\mathcal{K}_j(x,t)$ операторов

$$\mathcal{K}_j\vec{f} = (E-u_jA)^{-1}\Phi_2\gamma_j\Phi_2^*[E-u_jA^*]^{-1}\vec{f} = \int_0^\omega \mathcal{K}_j(x,t)\vec{f}(t)dt. \tag{24}$$

В случае (22) верно равенство

$$\mathcal{K}_j(x,t) = (\exp iu_jWx)\gamma_j\exp(-iu_jWt).$$

Из теории тригонометрических рядов [4] следует выполнение условия (14). Аналогично доказывается выполнение условия (15). Значит, верно следствие 1.

***Пример* 2.** Выберем теперь A и Φ_2 следующим образом:

$$A\vec{f} = \int_0^x (t-x)\vec{f}(t)dt, \quad \Phi_2\vec{g} = \vec{g}. \tag{25}$$

Тогда ядро $\mathcal{K}(x,t)$ имеет структуру вида [2]

$$\mathcal{K}(x,t) = R(x-t) + R(x+t),$$
$$R(x) = R^*(x) = R(-x),$$

а $L_1(x)$ определяется равенством

$$L_1(x) = \left[2\int_0^x (x-u)R(u)du + \frac{1}{2}x\right]i.$$

При $S_0 = E$ из формулы (10) выводим

$$\mathcal{H}_0(x) = \begin{bmatrix} x^2E_m & -ixE_m \\ ixE_m & E_m \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Ядро $\mathcal{K}_j(x,t)$ оператора $\mathcal{K}_j$ (см. (24)) теперь имеет вид

$$k_j(x,t) = \gamma_j\cos\sqrt{u_j}\,x\cos\sqrt{u_j}\,t.$$

Снова пользуясь теорией тригонометрических рядов, получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть A и Φ_2 определены равенствами* (25), *а $\mathcal{H}_0(x)$ — равенством* (26). *Если $\mathcal{H}(x) \in N(A, \Phi_2)$, то матрицы $J\mathcal{H}(x)$ и $J\mathcal{H}_0(x)$ линейно подобны.*

1. *Сахнович Л. А.* Задачи факторизации и операторные тождества // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 1. – С. 3 – 55.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. – М.: Наука, 1967. – 271 с.
3. *Сахнович Л. А.* Уравнения с разностным ядром на системе отрезков // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1986. – Вып. 45. – С. 111 – 122.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 320 с.

Получено 29.06.93

Редакция сообщает, что в ГААСП (Государственное агентство авторских и смежных прав 252030, Киев 30, ул. Б. Хмельницкого, 34, тел. 2247304) поступил валютный гонорар за статьи, опубликованные в „Українському математичному журналі" за 1992 – 1993 годы.

Просим всех авторов статей срочно оформить свои справки – заявления (образец ниже) и выслать по указанному адресу.

СПРАВКА – ЗАЯВЛЕНИЕ АВТОРА

1. Фамилия, имя, отчество ____

   ____

2. Серия, номер паспорта, где, когда и кем выдан ________________________

   ____

3. Домашний адрес ____

   ____

   (обязательно указать почтовый индекс, а для Киева и район города)

4. Телефон ____

5. Мои статьи опубликованы в „Українському математичному журналі"

   за 19____ год.

   № __________ стр. ______________ № __________ стр. ______________

   № __________ стр. ______________ № __________ стр. ______________

   № __________ стр. ______________ № __________ стр. ______________

   № __________ стр. ______________ № __________ стр. ______________

   № __________ стр. ______________ № __________ стр. ______________

   № __________ стр. ______________ № __________ стр. ______________

7. Причитающуюся мне сумму гонорара прошу начислить в долларах США и выдать:

   а) на руки через кассу ГААСП

   б) перечислить на счет типа „Б" в УКРЭКСИМБАНК

   в) перечислить на расчетный счет №______________________ в УКРЭКСИМБАНКЕ

(Нужное подчеркнуть или указать № расчетного счета.)

«____»__________________ 19___г. ______________________

(дата заполнения) (подпись автора)