УДК 517.5

О. С. Грецький, асп. (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО $\mathbb{C}$-ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ВІДОБРАЖЕНЬ БАНАХОВИХ ПРОСТОРІВ

The monogeneity conditions are studied for $\mathbb{R}$-differentiable maps of regions in a Banach space. Criteria of $\mathbb{C}$-differentiability of a map at a point are obtained.

Досліджуються умови моногенності для $\mathbb{R}$-диференційовних відображень областей банахового простору. Одержано критерії $\mathbb{C}$-диференційовності відображення у точці.

Для характеристики диференціальних властивостей відображення областей гільбертового простору замість сукупності похідних чисел, як це робиться в одновимірному випадку, використовується сукупність $\mathbb{C}$-лінійних операторів, що певним чином пов'язана із цим відображенням. На цьому шляху виникають поняття похідного оператора, множини моногенності та будується теорія локальних геометричних характеристик голоморфних відображень гільбертових просторів [1].

У даній статті вводиться понятійний апарат та досліджується процес диференціювання відображень для випадку банахових просторів. Критерії, доведені у теоремі 8, є новими і для випадку гільбертових просторів.

Нехай пара $(B, \|\cdot\|)$-банаховий комплексний простір з відповідною нормою, $\mathfrak{U}$ — множина довільної потужності.

Означення 1. *Сукупність* $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$ *елементів простору* B *назвемо базисом простору, якщо вірне наступне твердження:*

$$\forall z \in B\ \exists!\, \{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{U}} \left[\{z_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{U}} \subset \mathbb{C} \wedge z = \sum_\alpha z_\alpha e_\alpha\right],$$

де процес сумування розуміється в сенсі [2, с.234 – 236].

Кожний такий базис назвемо репером, а сукупність всіх реперів позначимо через $\mathfrak{O}(B)$.

Нехай $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{U}} \in \mathfrak{O}(B)$. Позначимо через $E(\varepsilon)$ дійсну лінійну замкнену оболонку ε, а саме: $E(\varepsilon) := \overline{\mathfrak{L}_{\mathbb{R}}(\varepsilon)}$.

За лемою 1 [3, с.136 – 137] $B = E(\varepsilon)\oplus iE(\varepsilon)$, де $\oplus$ — операція прямої топологічної суми, маємо

$$\mathfrak{K}(B) := \{E(\varepsilon) | \varepsilon \in \mathfrak{O}(B)\}.$$

Нехай $E_0 \in \mathfrak{K}(B)$ — довільний, але фіксований дійсний підпростір. Введемо $\mathbb{R}$-лінійний оператор спряження J, асоційований з розкладом $B = E_0 \oplus iE_0$: $\forall z \in B$, $Jz := z' - iz''$, де $z := z' + iz''$ та $z', z'' \in E_0$.

Для довільного $E \in \mathfrak{K}(B)$ означимо $\mathbb{C}$-лінійний оператор $T_E\colon B \to B$, а саме: $T_E z := Jz' + iJz''$, де $z := z' + iz''$ — довільний елемент простору B та $z', z'' \in E$.

Побудуємо понятійний апарат, на базі якого буде проводитись дослідження властивості моногенності для $\mathbb{R}$-диференційовних відображень. Мінімальна структура — комплексний банаховий простір з базисом.

Означення 2. *Сім'я послідовностей* $\tilde{\varepsilon} = \left\{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^{\infty}\right\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$, $z_\alpha^k \neq a$, $\forall\, k, a$ *називається репером послідовностей у точці* a *з дотичним репером* $\varepsilon \in \mathfrak{O}(B)$, *якщо виконані наступні умови:*

а) $\lim\limits_{k\to\infty} z_\alpha^k = a \quad \forall\,\alpha\in\mathfrak{U}$;

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{z_\alpha^k - a}{\left\| z_\alpha^k - a\right\|} = e_\alpha \quad \forall\,\alpha\in\mathfrak{U}; \quad \tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}(\varepsilon),\ \varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$.

Означення 3. *Нехай B, B_1 — комплексні банахові простори, $f: D\to B_1$ — відображення області $D\subset B$ та $\tilde{\varepsilon} = \left\{\left\{z_\alpha^k\right\}_{k=1}^{\infty}\right\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$ — такий репер послідовностей в точці $a\in D$ з дотичним репером $\varepsilon = \{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}\in\mathfrak{O}(B)$, що $z_\alpha^k\in D\ \forall\, a, k$. Вважатимемо, що у точці a існує похідний оператор $L(f,\tilde{\varepsilon}, a)$ відображення f вздовж репера послідовностей $\tilde{\varepsilon}$, якщо:*

а) $\forall\,\alpha\in\mathfrak{U}$ *існують границі:*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f\left(z_\alpha^k\right)-f(a)}{\left\|z_\alpha^k - a\right\|} = \zeta_\alpha\in B_1;$$

б) $L(f,\tilde{\varepsilon},a)$ — $\mathbb{C}$*-лінійний обмежений оператор, який задовольняє умови* $L(f,\tilde{\varepsilon},a)e_\alpha = \zeta_\alpha\ \forall\,\alpha\in\mathfrak{U}$.

Множину всіх реперів послідовностей $\tilde{\varepsilon}$ у точці a (з різними дотичними реперами $\varepsilon\in\mathfrak{O}(B)$), вздовж яких існують похідні оператори відображення f, позначимо через $\mathfrak{R}(f,a)$, а множину всіх похідних операторів $L(f,\tilde{\varepsilon},a)$, де $\tilde{\varepsilon}$ пробігає $\mathfrak{R}(f,a)$, позначимо через $\mathfrak{P}(f,a)$ і назвемо множиною похідних операторів відображення f в точці a.

Поняття, введені вище, є банаховими аналогами понять, які розглядались у [1] для випадку гільбертових просторів.

Означення 4. *Відображення $f: D\to B_1$, де $B\subset D$ — область, назвемо $\mathbb{R}$-диференційовним ($\mathbb{C}$-диференційовним) у точці $a\in D$, якщо існує такий $\mathbb{R}$-лінійний ($\mathbb{C}$-лінійний) неперервний оператор $f'(a): B\to B_1$, що*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)}{\|z-a\|} = 0.$$

Відомо, що для $\mathbb{R}$-диференційовної функції $f: D\to\mathbb{C}$ у точці a області $D\subset\mathbb{C}$ множина моногенності f у точці a має таке параметричне зображення:

$$\mathfrak{M}_a(f) := \{\lambda_\varphi \mid \lambda_\varphi\in\mathbb{C},\ \text{де}\ \lambda_\varphi = f_z(a) + f_{\bar z}(a)\, e^{-2i\varphi},\ \varphi\in[0,2\pi]\}.$$

Тут λ_φ — похідне число вздовж напряму, що утворює із віссю Ox кут φ,

$$f_z(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right),$$

$$f_{\bar z}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right).$$

Доведемо тепер таку теорему.

Теорема 1. *Нехай $B\supset D$ — область, $f: D\to B_1$ — відображення, $\mathbb{R}$-диференційовне у точці $a\in D$, тобто $f'(a)\in\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}(B,B_1)$, де $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}(B,B_1)$ — клас $\mathbb{R}$-лінійних неперервних відображень. Тоді для довільного репера ε з $\mathfrak{O}(B)$ та довільного репера послідовностей $\tilde{\varepsilon} = \{\{z_\alpha^k\}_{k=1}^{\infty}\}_{\alpha\in\mathfrak{U}}$ (в сенсі означення 2) в точці a з дотичним репером ε існує похідний оператор $L(f,\tilde{\varepsilon},a)$*

відображення f *у точці* a *вздовж* $\tilde{\varepsilon}$ *та відповідне зображення* $\mathfrak{P}(f, a)$:

$$L_E(f, a) := L(f, \tilde{\varepsilon}, a) = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_E, \tag{1}$$

де $E = E(\varepsilon)$.

Доведення. Введемо $\mathbb{C}$-лінійні оператори з банахового простору B у банаховий простір B_1:

$$f_z(a) z = \frac{f'(a)z - if'(a)iz}{2},$$

$$f_{\bar{z}}(a) z = \frac{if'(a)Jz - if'(a)iJz}{2i} \quad \forall z \in B.$$

Тоді $f'(a)$ зобразиться у вигляді $f'(a) = f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) J$. Із $\mathbb{R}$-диференційовності f у точці $a \in D$ та означення репера послідовностей випливає

$$\zeta_k = \lim_{k \to \infty} \frac{f(z_\alpha^k) - f(a)}{\| z_\alpha^k - a \|} = \lim_{k \to \infty} f'(a) \frac{z_\alpha^k - a}{\| z_\alpha^k - a \|} = f'(a) e_\alpha =$$

$$= f_z(a) e_\alpha + f_{\bar{z}}(a) J e_\alpha = (f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_E) e_\alpha \quad \forall a \in \mathfrak{U}.$$

Теорему доведено.

Якщо $E \in \mathcal{K}(B)$ і $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathfrak{O}(B)$ такі, що $\varepsilon_1 \subset E$, $\varepsilon_2 \subset E$, то з (1) випливає, що для довільних реперів послідовностей $\tilde{\varepsilon}_1$ і $\tilde{\varepsilon}_2$ у точці a з дотичними реперами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ відповідно похідні оператори $L(f, \tilde{\varepsilon}_1, a)$ і $L(f, \tilde{\varepsilon}_2, a)$ рівні. Тому $L_E(f, a)$ назвемо похідним оператором відображення f в точці a вздовж E.

Означення 5. *Вважатимемо, що дійсні підпростори* $E_1 \subset B, \ldots, E_m \subset B$ *перебувають у відношенні загального розташування, якщо для довільних* $j \neq i$ *виконується* $E_j + E_i = B$.

Теорема 2. *Нехай* D *— область в* B, $f: D \to B$ *— відображення,* $\mathbb{R}$*-диференційовне у точці* $a \in D$; $E_1, E_2 \in \mathcal{K}(B)$ *і перебувають у відношенні загального розташування. Тоді якщо похідні оператори* $L_{E_1}(f, a)$ *та* $L_{E_2}(f, a)$ *відображення* f *в точці* a *вздовж двох підпросторів* E_1 *та* E_2 *співпадають, то відображення* f *—* $\mathbb{C}$*-диференційовне в точці* a.

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведенню теореми 3.2 [1, с. 184].

Означення 6. *Нехай* $L: B \to B_1$ *—* $\mathbb{C}$*-лінійний неперервний оператор. Тоді*

$$L^s := \begin{cases} 0, & \text{якщо } L = 0; \\ \dfrac{L}{\| L \|}, & \text{якщо } L \neq 0. \end{cases}$$

В одновимірному випадку справедливе наступне твердження [4, с. 41]: якщо функція f диференційовна у точці a області $D \subset \mathbb{C}$ та якщо вздовж трьох променів, які виходять із точки a і лежать на трьох різних прямих, існує одна і та ж границя

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{Arg} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

то функція f моногенна в точці a.

Поширимо цей результат на відображення областей банахових просторів.

Теорема 3. *Нехай* $f: D \to B_1$ — *відображення області* $D \subset B$, $\mathbb{R}$*-диференційовне у точці* $a \in D$; $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{K}(B)$ *та перебувають у відношенні загального розташування. Тоді якщо для похідних операторів відображення* f: $L_1 := L_{E_1}(f, a)$, $L_2 := L_{E_2}(f, a)$, $L_3 := L_{E_3}(f, a)$, *справджується рівність* $L_1^s = L_2^s = L_3^s$, *то відображення* f — $\mathbb{C}$*-диференційовне в точці* a.

Доведення. Розглянемо три можливі випадки:

1. Норми, принаймні, двох похідних операторів відображення f рівні та відмінні від нуля.

Нехай, наприклад, $\|L_1\| = \|L_2\|$. Тоді з умови теореми випливає, що $L_1 = L_2$. Потрапляємо в умови теореми 2.

2. Норми трьох похідних операторів відображення f різні та відмінні від нуля.

Нехай $\|L_1\| < \|L_2\| < \|L_3\|$, $\|L_1\|/\|L_2\| = \beta < 1$ та $\|L_1\|/\|L_3\| = \gamma < 1$. З рівності в умові теореми маємо

$$L_1 = \frac{\|L_1\|}{\|L_2\|} L_2, \tag{2}$$

$$L_1 = \frac{\|L_1\|}{\|L_3\|} L_3. \tag{3}$$

Покажемо, що випадок 2 неможливий. З теореми 1 та рівностей (2), (3) одержуємо

$$f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_{E_1} = \beta f_z(a) + \beta f_{\bar{z}}(a) T_{E_2} \Rightarrow (\mathbb{1}_{B_1} - \beta \mathbb{1}_{B_1}) f_z(a) +$$

$$+ (\mathbb{1}_{B_1} - \beta \mathbb{1}_{B_1}) f_{\bar{z}}(a)(T_{E_1} - T_{E_2}) = 0 \Rightarrow f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)(T_{E_1} - T_{E_2}) = 0.$$

Аналогічно отримуємо рівність

$$f_z(a) + f_{\bar{z}}(a)(T_{E_1} - T_{E_3}) = 0,$$

і, як наслідок, шляхом віднімання від останньої рівності попередньої, маємо

$$f_{\bar{z}}(a) T_{E_2} = f_{\bar{z}}(a) T_{E_3} \Rightarrow f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_{E_3} =$$

$$= f_z(a) + f_{\bar{z}}(a) T_{E_2} \Rightarrow L_{E_2} = L_{E_3} \Rightarrow \|L_3\| = \|L_2\|.$$

Суперечність.

3. Нехай $L_1 = 0$. Тоді $L_1^s = 0$. З рівності в умові теореми та означення L_1^s випливає, що $L_1 = L_2 = L_3$. Виконуються умови теореми 2. Теорему доведено.

Як показує теорема 1, дослідження умов $\mathbb{C}$-диференційовності для $\mathbb{R}$-диференційовних відображень у точці зводиться до пошуку достатніх умов, які б забезпечували операторну рівність $f_{\bar{z}}(a) = 0$. При цьому важливим є вивчення властивостей сім'ї операторів $T_E: D \to B$, де $E \in \mathcal{K}(B)$.

Теорема 4. *Нехай* x — *довільний фіксований ненульовий елемент банахового простору* $B, F := \{T_E x\}_{E \in \mathcal{K}(B)}$. *Тоді вірне твердження*

$$\forall y (y \neq 0 \wedge y \in B)' \; \exists s (s \in F) \;\; \exists \gamma (\gamma \in \mathbb{R}_+) \;\; [y = \gamma s].$$

Доведення. Припустимо спочатку, що x та Jy $\mathbb{C}$-лінійно залежні: $Jy = \lambda x$. Маємо $y = J(Jy) = J(\lambda x) = \overline{\lambda}(Jx)$.

Нехай $a = (\lambda/|\lambda|)^{1/2}$ та $g_1 = ax$. Тоді $x = \overline{a}g_1$. Доповнимо множину $\{g_1\}$ до базису простору B (це можна зробити на основі [5, с. 108 – 110]) і позначимо через E замкнену дійсну лінійну оболонку утвореної множини елементів. Одержимо

$$T_E x = T_E(\overline{a}g_1) = \overline{a}T_E g_1 = \overline{a}J(ax) = (\overline{a})^2 Jx = \frac{\lambda}{|\lambda|}Jx = \frac{1}{|\lambda|}y.$$

Отже, $s = (1/|\lambda|)y$ та $\gamma = \|y\|$.

Нехай x та Jy $\mathbb{C}$-лінійно незалежні та $\overline{\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}\{x, Jy\}}$ — лінійний підпростір, породжений елементами x та Jy. Тоді за наслідком теореми Банаха [6, с. 17] маємо

$$B = \overline{\mathfrak{L}_{\mathbb{C}}\{x, Jy\}} \oplus B_1.$$

Розглянемо лінійний топологічний ізоморфізм: $\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{B_1} \end{bmatrix}$, де $Ax = ix - iJy$, $AJy = x + Jy$. Маємо $x = \frac{1}{2i}(\tilde{A}x + i\tilde{A}y)$.

Доповнимо множину елементів $\{Ax, AJy\}$ до базису простору B [5] та позначимо через E замкнену дійсну лінійну оболонку утвореної множини елементів. Тоді

$$T_E x = \frac{1}{2i}(T_E\tilde{A}x + iT_E\tilde{A}y) = \frac{1}{2i}(JAx + iJAJy) =$$

$$= \frac{1}{2i}(J(ix - iJy) + iJ(x + Jy)) = y.$$

Отже, $s = y$ та $\gamma = 1$. Теорему доведено.

Нехай B — комплексний рефлексивний банаховий простір з базисом $\hat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathcal{A} : B \to B$ — довільний $\mathbb{C}$-лінійний неперервний оператор: $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(B)$ та $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — базис у спряженому до B просторі U^*, біортогональний до $\hat{\varepsilon}$. Результат дії лінійного функціоналу $\varphi \in B^*_{\mathbb{C}}$ на елемент x з простору $B_{\mathbb{C}}$ позначатимемо $\langle x, \varphi\rangle$. Тоді $\operatorname{Re}\langle x, \varphi\rangle$ можна розглядати як результат дії дійсного лінійного функціоналу $\operatorname{Re}\langle\cdot, \varphi\rangle$ на елемент x з простору $B_{\mathbb{R}}$. Отже, якщо $\forall x \in B$ $\operatorname{Re}\langle x, \varphi\rangle = 0$, то $\varphi = 0$. Оператор $\mathcal{A}$ допускає матричне зображення A відносно базису $\hat{\varepsilon}$ [7, с. 227 – 229]: $A := (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, де $a_{ij} = \langle \mathcal{A}e_i, \varphi_i\rangle$.

Означення 7. *Вважатимемо, що лінійний неперервний оператор $\mathcal{A}$ зображується у вигляді декартового розкладу операторів відносно базису $\hat{\varepsilon}$, якщо $A := \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$, де $\operatorname{Re} A := (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$, $b_{ij} := \dfrac{\langle \mathcal{A}e_i, \varphi_i\rangle + \overline{\langle \mathcal{A}e_i, \varphi_i\rangle}}{2}$. $\operatorname{Re} A$ назвемо дійсною частиною оператора $\mathcal{A}$.*

Надалі будемо ототожнювати оператор $\mathcal{A}$ із його матричним зображенням A відносно базису $\hat{\varepsilon}$ і використовувати для них однакові позначення. Діагональ матриці A позначатимемо як $\operatorname{diag} A$.

Теорема 5. *Нехай $f : D \to B$ — відображення області $D \in B$, $\mathbb{R}$-диференційовне у точці $a \in D$, і відносно деякого базису $\tilde{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ всі діагоналі дійсних частин похідних операторів $\mathfrak{P}(f, a)$ співпадають:*

$$\operatorname{diag} \operatorname{Re} L_E = \operatorname{diag} \operatorname{Re} A \quad \forall E \in \mathcal{K}(B).$$

Тоді відображення f — $\mathbb{C}$-диференційовне у точці a.

Доведення. За умовою теореми

$$\operatorname{Re} \langle L_E e_k, \varphi_k \rangle = \operatorname{Re} \langle A e_k, \varphi_k \rangle \quad \forall E \in \mathcal{K}(B) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Отже, $\operatorname{Re} \langle L_E e_k, \varphi_k \rangle = \operatorname{Re} \langle L_{iE} e_k, \varphi_k \rangle \ \forall E, k$.

З теореми 1 та з того, що $T_{iE} = -T_E$, випливає

$$\langle (f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_E) e_k, \varphi_k \rangle + \overline{\langle (f_z(a) + f_{\bar z}(a) T_E) e_k, \varphi_k \rangle} =$$

$$= \langle (f_z(a) - f_{\bar z}(a) T_E) e_k, \varphi_k \rangle + \overline{\langle (f_z(a) - f_{\bar z}(a) T_E) e_k, \varphi_k \rangle} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle f_{\bar z}(a) T_E e_k, \varphi_k \rangle = 0 \ \forall E, k \Rightarrow \operatorname{Re} \langle T_E e_k, f_{\bar z}^*(a) \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall E, k.$$

За теоремою 4 множина векторів $\{T_E e_k\}_{E \in \mathcal{K}(B)}$ тотальна у просторі B. Отже,

$$f_{\bar z}^*(a) \varphi_k = 0 \quad \forall k \Rightarrow f_{\bar z}^*(a) = 0 \Rightarrow f_{\bar z}(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = f_z(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{відображення } f \text{ — } \mathbb{C}\text{-диференційовне у точці } a.$$

Теорему доведено.

Розглянемо результат, наведений у попередній теоремі для класу функцій комплексної змінної, що мають у фіксованій точці повний диференціал.

У випадку, коли множина моногенності відображення є коло, три різні точки якого мають однакові дійсні частини, це коло вироджується у точку. Наслідком цього є моногенність функцій у заданій точці.

Теорема 6. *Нехай $f\colon D \to B$ — відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційовне у точці $a \in D$, і відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ дійсні координати образів одного з елементів із $\hat{\varepsilon}$ при дії операторів з множини $\mathcal{P}(f, a)$ співпадають.*

Тоді відображення f — $\mathbb{C}$-диференційовне у точці a.

Доведення. Нехай умова теореми виконується для e_1. Тоді можна записати

$$\operatorname{Re} \langle L_E e_1, \varphi_k \rangle = \langle A e_1, \varphi_k \rangle \quad \forall E, k \Rightarrow \forall E, k \ \operatorname{Re} \langle L_{iE} e_1, \varphi_k \rangle =$$

$$= \operatorname{Re} \langle L_E e_1, \varphi_k \rangle \Rightarrow \forall E, k \ \operatorname{Re} \langle f_{\bar z}(a) T_E e_1, \varphi_k \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} \langle T_E e_1, f_{\bar z}^*(a) \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall E, k.$$

За теоремою 4 множина векторів $\{T_E e_k\}_{E \in \mathcal{K}(B)}$ тотальна у просторі B. Отже,

$$f_{\bar z}^*(a) \varphi_k = 0 \ \forall k \Rightarrow f_{\bar z}^*(a) = 0 \Rightarrow f_{\bar z}(a) = 0 \Rightarrow f'(a) = f_z(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{відображення } f \text{ — } \mathbb{C}\text{-диференційовне у точці } a.$$

Теорему доведено.

Наслідок. *Нехай $f\colon D \to B$ — відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційовне у точці $a \in D$, та існує точка $0 \neq x \in B$, нерухома відносно дії операторів з множини $\mathcal{P}(f, a)$. Тоді відображення f — $\mathbb{C}$-диференційовне у точці a.*

Доведення. Нехай $e_1 := x$. Доповнимо e_1 до базису в B: $\hat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Виконуються умови теореми 6. Наслідок доведено.

Теорема 7. *Нехай $f: D \to B_1$ — відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційовне у точці $a \in D$. Для $\mathbb{C}$-диференційовності f у точці a необхідно і достатньо виконання однієї із наступних умов (E_i перебувають у відношенні загального розташування):*

а) *для підпросторів $E_1, E_2 \in \mathcal{K}(B)$ похідні оператори L_{E_1} і L_{E_2} відображення f у точці a вздовж E_1 та E_2 рівні;*

б) *для підпросторів $E_1, E_2, E_3 \in \mathcal{K}(B)$ рівні оператори $L^s_{E_k}$: $L^s_1 = L^s_2 = L^s_3$.*

Доведення. Якщо відображення f — $\mathbb{C}$-диференційовне у точці a, то $L_E = f'(a)$ $\forall E \in \mathcal{K}(B)$ і тому виконуються умови а) і б).

Якщо виконується одна з умов а) або б), то відображення f — $\mathbb{C}$-диференційовне за теоремою 2 або теоремою 3. Теорему доведено.

Теорема 8. *Нехай $f: D \to B$ — відображення області $D \subset B$, $\mathbb{R}$-диференційовне у точці $a \in D$; B — сепарабельний рефлексивний банаховий простір. Для $\mathbb{C}$-диференційовності f у точці a необхідно і достатньо виконання однієї з наступних умов:*

c1) *відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ діагоналі дійсних частин похідних операторів $\mathfrak{P}(f, a)$ співпадають;*

c2) *відносно деякого базису $\hat{\varepsilon} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ дійсні координати образів одного з елементів із $\hat{\varepsilon}$ при дії операторів з множини $\mathfrak{P}(f, a)$ співпадають.*

Доведення. Якщо відображення f — $\mathbb{C}$-диференційовне у точці a, то $\operatorname{diag} \operatorname{Re} L_E = \operatorname{diag} \operatorname{Re} f'(a)$ $\forall E \in \mathcal{K}(B)$ і тому виконується умова c1).

Якщо виконується умова c1, то f — $\mathbb{C}$-диференційовне за теоремою 5.
Аналогічно проводиться доведення для умови c2). Теорему доведено.

1. *Бондарь А. В.* Локальные геометрические характеристики голоморфных отображений. – Киев: Наук.думка, 1992. – 220 с.
2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. — М.: Физматгиз, 1958. – 324 с.
3. *Гохберг И. У., Маркус А. С.* Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, №5 (89). – С. 135 – 140.
4. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 212 с.
5. *Singer I.* Bases in Banach spases: In 2 v. — Berlin etc.: Springer, 1981. – V.2. – 876 p.
6. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. – М.: Мир, 1967. – 203 с.
7. *Люстерник Л. А., Соболев В. П.* Элементы функционального анализа. – М.; Л.: Гостехиздат, 1951. – 519 с.

Одержано 15.02.93