УДК 519.21

Н. Н. Леоненко, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т),
Э. Орзингер, д-р философии (Рим. ун-т "Ла Сапьенца", Италия),
К. В. Рыбасов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА СО СЛУЧАЙНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ. II

Non-Gaussian limit distributions of solutions of a many-dimensional Byurgers equation with the initial condition being a homogeneous isotropic random field of type χ^2 with strong dependence are found.

Знайдено негауссівські граничні розподіли розв'язків багатовимірного рівняння Бюргерса, у якого початкова умова є однорідним ізотропним випадковим полем типу χ^2 із сильною залежністю.

Настоящая работа является продолжением статьи [15]. При этом сохранены все основные обозначения, а нумерация пунктов, утверждений, формул и используемых источников продолжена.

3. Сходимость к негауссовскому случайному полю. Пусть начальное условие в задаче Коши (1) представляет собой случайное поле типа χ^2 с одной степенью свободы.

Б. Начальное условие $v(\vec{x}) = \xi^2(\vec{x}) - 1$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, где $\xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, — случайное поле, удовлетворяющее условию А.

При условии Б рассмотрим вопрос о предельном распределении при $t \to \infty$ нормированных конечномерных распределений случайных полей

$$\vec{u}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \dfrac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}, t\right) \exp\left\{-\dfrac{\xi^2(\vec{y}) - 1}{2\mu}\right\} d\vec{y}}{\int_{\mathbb{R}^n} g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}, t\right) \exp\left\{-\dfrac{\xi^2(\vec{y}) - 1}{2\mu}\right\} d\vec{y}} = \frac{\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right)}{\vec{J}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right)}. \tag{22}$$

При условии А корреляционная функция $B(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, поля $\xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, допускает спектральное разложение

$$B(|\vec{x}|) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\vec{\lambda}, \vec{x}) F(d\vec{\lambda}) = 2^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(ur)}{(ur)^{\frac{n-2}{2}}} dG(u),$$

где $r = |\vec{x}|$, $F(\cdot)$ — спектральная мера поля $\xi(\vec{x})$, $J_q(z)$ — функция Бесселя первого порядка степени q, а $G(u) = \int_{\{\vec{\lambda}: |\vec{\lambda}| < u\}} F(d\vec{\lambda})$, $u \in [0, \infty)$ — ограниченная неубывающая функция.

Используя теорему тауберового типа из работы [16] (доказательство, содержащее медленно меняющуюся функцию L, приведено в [17]), получаем, что при условии А, $0 < \alpha < n$ и $u \to 0+$ $G(u) \sim u^\alpha L(1/u) / c_3(n, \alpha)$, где $c_3(n, \alpha) = 2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2) \Gamma(n/2) / \Gamma((n - \alpha)/2)$.

Тауберовы и абелевы теоремы для корреляционной функции поля с сильной зависимостью содержатся также в [18].

В. Предположим, что у поля $\xi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющего условию А, существует спектральная плотность $f(|\vec{\lambda}|)$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, которая при $|\vec{\lambda}| \to \infty$ монотонно стремится к нулю, начиная с некоторого места.

При условии В справедливо представление

$$B(|\vec{x}|) = \int_{\mathbb{R}^n} \cos(\vec{\lambda}, \vec{x}) f(\vec{\lambda}) d\vec{\lambda}, \quad G'(u) = |s(1)| u^{n-1} f(u), \quad u \geq 0,$$

где $|s(1)| = 2\pi^{n/2} / n\Gamma(n/2)$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, причем асимптотическую формулу для $G(u)$ при $u \to \infty$ можно продифференцировать.

Таким образом, при условиях А, В и $|\vec{\lambda}| \to 0+$ из тауберовой теоремы следует

$$f(|\vec{\lambda}|) \sim \alpha L\left(\frac{1}{|\vec{\lambda}|}\right) |\vec{\lambda}|^{\alpha - n} / (c_3(n, \alpha) |s(1)|). \tag{23}$$

При условии В поле допускает спектральное разложение

$$\xi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{i(\vec{\lambda}, \vec{x})\right\} \left(f(|\vec{\lambda}|)\right)^{1/2} W(d\vec{\lambda}), \tag{24}$$

где $W(\cdot)$ — комплексный гауссовский белый шум в $\mathbb{R}^n$ (подробнее см., например, [12, 14, 19]).

При $0 < \alpha < n/2$ рассмотрим векторное случайное поле

$$\vec{Z}(\vec{a}) = -c_4(\mu, \alpha, n) \int_{\mathbb{R}^{2n}}' \frac{\exp\left\{i\left(\vec{a}, \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2\right) - \mu\left|\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2\right|^2\right\}}{i} \frac{\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2\right) W\left(d\vec{\lambda}_1\right) W\left(d\vec{\lambda}_2\right)}{|\vec{\lambda}_1|^{\frac{n-\alpha}{2}} |\vec{\lambda}_2|^{\frac{n-\alpha}{2}}} \tag{25}$$

где

$$c_4(\mu, \alpha, n) = \alpha\mu / (1 + \mu) c_3(n, \alpha) |s(1)|,$$

а символом $\int' \ldots$ обозначен кратный стохастический интеграл по комплексному гауссовскому белому шуму в $\mathbb{R}^n$ (интегрирование по гиперплоскостям $\vec{\lambda}_i = \pm\vec{\lambda}_j$, $i, j = 1, 2$, исключается). Подробное изложение теории кратных стохастических интегралов можно найти в [12, 14, 19].

***Замечание* 2.** Поле $\vec{Z}(\vec{a})$ не является гауссовским, хотя существует $M\vec{Z}(\vec{a})\vec{Z}'(\vec{a})$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условие* А *при* $0 < \alpha < n/2$, *а также условия* Б, В, *т. е. поле* (22) *является решением задачи Коши* (1), *у которой начальное условие есть поле типа* χ^2. *Тогда конечномерные распределения случайных полей*

$$L^{-1}(\sqrt{t}) t^{\frac{1+\alpha}{2}} \vec{u}(\vec{a}\sqrt{t}, t), \quad \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \ 0 < \alpha < \frac{n}{2},$$

при $t \to \infty$ *слабо сходятся к конечномерным распределениям поля* $\vec{Z}(\vec{a})$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, однако здесь появляются существенно новые элементы, связанные с появлением негауссовских предельных распределений. Рассмотрим $\vec{I}(\vec{a}\sqrt{t}, t)$ из (22), где $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, и разобьем этот интеграл на две части:

$$\vec{I}(\vec{a}\sqrt{t}, t) = \vec{I}_1(t) + \vec{I}_2(t),$$

где

$$\vec{I}_1(t) = \int_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} \frac{\exp\left\{-|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}|^2 / (4\mu t)\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2(\vec{y}) - 1}{2\mu}\right\} d\vec{y},$$

$$\vec{I}_2(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} \frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}\right|^2/(4\mu t)\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\xi^2(\vec{y})-1}{2\mu}\right\} d\vec{y},$$

где $\mathbb{D}_t = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x}| \le t\}$.

Функция

$$G_2(u) = \exp\left\{-\frac{u^2-1}{2\mu}\right\} \in L_2(\mathbb{R}^1, \varphi_1(u)\,du)$$

и в $L_2(\Omega)$ существует разложение

$$G_2(\xi(\vec{x})) = \exp\left\{-\frac{\xi^2(\vec{x})-1}{2\mu}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} H_k(\xi(\vec{y})), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} < \infty,$$

причем

$$C_0 = \exp\left\{\frac{1}{2\mu}\right\}\sqrt{\frac{\mu}{1+\mu}} > 0, \quad C_1 = 0,$$

$$C_2 = \exp\left\{\frac{1}{2\mu}\right\}\left(\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{3/2} - \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1/2}\right) < 0.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{t\to\infty} M\vec{I}_1(t) = M\vec{I}\left(\vec{a}\sqrt{t}, t\right) = \vec{0}.$$

Тогда можно получить разложение для $\vec{I}_1(t)$:

$$\vec{I}_1(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{k!} \int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}}{t} \frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}\right|^2/(4\mu t)\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}} H_k\left(\xi(\vec{y})\right) d\vec{y} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k}{k!} \vec{\eta}_k(\vec{a}, t).$$

Выпишем дисперсионную матрицу для $\vec{I}_1(t)$:

$$D\vec{I}_1(t) = \Sigma = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{C_k^2}{k!} \Sigma_k,$$

где $\Sigma_k = \left(\sigma^2_{k,i,j}(t)\right)_{1\le i,\, j\le n}$, и

$$\sigma^2_{k,i,j}(t) = \int\limits_{\mathbb{D}_t}\int\limits_{\mathbb{D}_t} \frac{a_i\sqrt{t} - y_{1i}}{t} \frac{a_j\sqrt{t} - y_{2j}}{t} g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}_1, t\right) g\left(\vec{a}\sqrt{t} - \vec{y}_2, t\right) \times$$

$$\times B^k(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|)\, d\vec{y}_1\, d\vec{y}_2.$$

Из условия A и замены (10) так же, как в (11) при $t\to\infty$, $0 < \alpha < n/k$

$$\sigma^2_{k,i,j}(t) \sim \frac{L^k\left(\sqrt{t}\right)}{t^{1+k\alpha/2}} (2\mu)^{1-k\alpha/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{w_{1i} w_{2j}\, \varphi_n(\vec{w}_1)\varphi_n(\vec{w}_2)}{|\vec{w}_1 - \vec{w}_2|^{k\alpha}} d\vec{w}_1\, d\vec{w}_2 =$$

$$= L(k, \alpha, t)(2\mu)^{1-k\alpha/2} c_2(k, \alpha, \mu).$$

Представим $\vec{I}_1(t)$ в виде

$$\vec{I}_1(t) = \frac{C_2}{2}\vec{\eta}_2(\vec{a},t) = \vec{R}(t), \quad \vec{R}(t) = \sum_{k=3}^{\infty}\frac{C_k}{k!}\vec{\eta}_k(\vec{a},t).$$

Тогда

$$\frac{2\vec{I}_1(t)}{|C_2|\sqrt{L(2,\alpha,t)}} = \frac{-\vec{\eta}_2(\vec{a},t)}{\sqrt{L(2,\alpha,t)}} + \frac{2\vec{R}(t)}{|C_2|\sqrt{L(2,\alpha,t)}} = \vec{U}_1(t) + \vec{U}_2(t).$$

Аналогично выкладкам п. 2 можно показать, что при $t\to\infty$ $\vec{U}_2(t) \xrightarrow{P} \vec{0}$, и из леммы 1 будет следовать, что предельное распределение

$$2\vec{I}_1(t)\,/\,|C_2|\sqrt{L(2,\alpha,t)}$$

такое же, как предельное распределение $-\vec{\eta}_2(\vec{a},t)\,/\,\sqrt{L(2,\alpha,t)}$.

Также следуя схеме доказательства теоремы 1, можно показать, что при $t\to\infty$ $\vec{I}_2(t)\,/\,\sqrt{L(2,\alpha,t)} \xrightarrow{P} 0$ и предельное распределение $\vec{I}\left(\vec{a},\sqrt{t}\right)L^{-1}\left(\sqrt{t}\right)\times$ $\times\, t^{(1+\alpha)/2}$ такое же, как предельное распределение

$$-\frac{1}{2}\vec{\eta}_2\left(\vec{a},\sqrt{t}\right)L^{-1}\left(\sqrt{t}\right)t^{(1+\alpha)/2}\exp\left\{\frac{1}{2\mu}\right\}\left|\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{3/2} - \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1/2}\right|.$$

Аналогично можно получить, что при $t\to\infty$

$$J\left(\vec{a}\sqrt{t},t\right) \xrightarrow{P} \exp\left\{\frac{1}{2\mu}\right\}\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1/2} = C_0.$$

Отсюда при $t\to\infty$ (лемма 1)

$$L^{-1}\left(\sqrt{t}\right)t^{(1+\alpha)/2}\vec{u}\left(\vec{a}\sqrt{t},t\right) \xrightarrow{D} -L^{-1}\left(\sqrt{t}\right)t^{(1+\alpha)/2}\left|\frac{C_2}{2C_0}\right|\vec{\eta}_2(\vec{a},t) =$$

$$= -\frac{1}{2}L^{-1}\left(\sqrt{t}\right)t^{(1+\alpha)/2}\frac{1}{1+\mu}\vec{\eta}_2(\vec{a},t).$$

Пусть

$$\vec{\nu}(\vec{a},t) = \frac{\vec{\eta}_2(\vec{a},t)}{\sqrt{L(2,\alpha,t)}}\frac{1}{1+\mu} = -\frac{t^{(1+\alpha)/2}\vec{\eta}_2(\vec{a},t)}{2(1+\mu)L(\sqrt{t})}.$$

Докажем, что при $0<\alpha<n/2$ и $t\to\infty$ $M\left|\vec{\nu}(\vec{a},t)-\vec{Z}(\vec{a})\right|^2\to 0$, где $\vec{Z}(\vec{a})$ — поле из (25). Используя формулу Ито (см., например, [12, 14, 19]) при условиях A и B, из (24) получаем

$$H_2(\xi(\vec{x})) = \int_{\mathbb{R}^{2n}}' \exp\left\{i\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2,\vec{x}\right)\right\}\left(f\left(\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\right)f\left(\left\|\vec{\lambda}_2\right\|\right)\right)^{1/2}W\left(d\vec{\lambda}_1\right)W\left(d\vec{\lambda}_2\right).$$

Тогда

$$\vec{\nu}(\vec{a},t) = -\frac{t^{(1+\alpha)/2}}{2(1+\mu)L(\sqrt{t})}\times$$

$$\times\int_{\mathbb{R}^{2n}}'\left(\int_{\mathbb{D}_t}\exp\left\{i\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2,\vec{y}\right)\right\}\frac{\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}}{t}\,\frac{\exp\left\{-\left|\vec{a}\sqrt{t}-\vec{y}\right|^2/(4\mu t)\right\}}{(4\pi\mu t)^{n/2}}\,d\vec{y}\right)\times$$

$$\times\left(f\left(\left\|\vec{\lambda}_1\right\|\right)f\left(\left\|\vec{\lambda}_2\right\|\right)\right)^{1/2}W\left(d\vec{\lambda}_1\right)W\left(d\vec{\lambda}_2\right).$$

Осуществляя замену $\vec{y}\sqrt{t} = \vec{z}, \ \vec{z} \in \mathbb{D}_{\sqrt{t}}$ и используя свойство $W\left(d(a\vec{\lambda})\right) \overset{d}{=}$ $\overset{d}{=} a^{n/2} W\left(d\vec{\lambda}\right)$, имеем

$$\vec{v}(\vec{a}, t) = -\frac{t^{(1+\alpha)/2}}{2(1+\mu)L(\sqrt{t})} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{2n}}' \left(\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{t}}} \exp\left\{ i\sqrt{t}\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{z}\right)\right\} \frac{\vec{a} - \vec{z}}{\sqrt{t}} \frac{\exp\{-|\vec{a} - \vec{z}|^2/(4\mu)\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} d\vec{z} \right) \times$$

$$\times \left(f\left(\left|\vec{\lambda}_1\right|\right) f\left(\left|\vec{\lambda}_2\right|\right)\right)^{1/2} W\left(d\vec{\lambda}_1\right) W\left(d\vec{\lambda}_2\right) =$$

$$= -\frac{t^{(1+\alpha)/2}}{2(1+\mu)L(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{R}^{2n}}' \left(\int_{\mathbb{D}_{\sqrt{t}}} \exp\left\{ i\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{z}\right)\right\} (\vec{a} - \vec{z}) \frac{\exp\{-|\vec{a} - \vec{z}|^2/(4\mu)\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} d\vec{z} \right) \times$$

$$\times \frac{\left(f\left(\left|\vec{\lambda}_1\right|/\sqrt{t}\right) f\left(\left|\vec{\lambda}_2\right|/\sqrt{t}\right)\right)^{1/2}}{t^{(1+n)/2}} W\left(d\vec{\lambda}_1\right) W\left(d\vec{\lambda}_2\right). \qquad (26)$$

Последнее равенство означает равенство распределений.

Интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{i(\vec{y}, \vec{x}) - |\vec{x}|^2/(2\sigma^2)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} d\vec{x} = \exp\left\{-\frac{\sigma^2|\vec{y}|^2}{2}\right\}, \quad \sigma > 0, \quad \vec{y} \in \mathbb{R}^n,$$

сходится равномерно, поэтому его можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\vec{\nabla}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\exp\left\{i(\vec{y}, \vec{x}) - |\vec{x}|^2/(2\sigma^2)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} d\vec{x} \right) = \vec{\nabla}\exp\left\{-\frac{\sigma^2|\vec{y}|^2}{2}\right\},$$

$$i\int_{\mathbb{R}^n} \vec{x}\, \frac{\exp\left\{i(\vec{y}, \vec{x}) - |\vec{x}|^2/(2\sigma^2)\right\}}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} d\vec{x} = -\sigma^2\vec{y}\exp\left\{-\frac{\sigma^2|\vec{y}|^2}{2}\right\}.$$

При $\sigma^2 = 2\mu, \ \vec{y} = \vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \ \vec{x} = \vec{z} - \vec{a}$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{z} - \vec{a} + \vec{a}\right)\right\} (\vec{a} - \vec{z}) \frac{\exp\left\{-|\vec{a} - \vec{z}|^2/(4\mu)\right\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} d(\vec{z} - \vec{a}) =$$

$$= \exp\left\{ i\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{a}\right)\right\} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{x}\right)\right\} \frac{\exp\left\{-|\vec{x}|^2/(4\mu)\right\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} d\vec{x} =$$

$$= \frac{-2\mu(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)\exp\left\{i\left(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{a}\right)\right\}\exp\left\{-\mu|\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2|^2\right\}}{i}. \qquad (27)$$

Прибавляя и вычитая левую и правую части (27) к выражению в (26), которое стоит в квадратных скобках, получаем

$$\vec{v}(\vec{a}, t) = -\frac{t^{(1+\alpha)/2}}{2(1+\mu)L(\sqrt{t})} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{2n}}' \left(\frac{2\mu(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) \exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{a}) - \mu |\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2|^2 \right\}}{i} + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_{\sqrt{t}}}' \exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{z}) \right\} (\vec{a} - \vec{z}) \frac{\exp\left\{ -|\vec{a} - \vec{z}|^2 / (4\mu) \right\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} d(\vec{z}) \right) \times$$

$$\times \frac{\left(f\left(|\vec{\lambda}_1| / \sqrt{t} \right) f\left(|\vec{\lambda}_2| / \sqrt{t} \right) \right)^{1/2}}{t^{(1+n)/2}} W(d\vec{\lambda}_1) W(d\vec{\lambda}_2).$$

Далее

$$M \left| \vec{Z}(\vec{a}) - \vec{v}(\vec{a}, t) \right|^2 =$$

$$= \frac{t^{1+\alpha}}{2(1+\mu)^2 L^2(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \left(\frac{2\mu(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) \exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{a}) - \mu |\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2|^2 \right\}}{i} \times \right. \right.$$

$$\times \frac{\left(f\left(|\vec{\lambda}_1| / \sqrt{t} \right) f\left(|\vec{\lambda}_2| / \sqrt{t} \right) \right)^{1/2}}{t^{(1+n)/2}} - \frac{2c_4(\mu, \alpha, 2)(1+\mu) L(\sqrt{t})}{t^{(1+\alpha)/2}} \times$$

$$\left. \times \frac{\exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{a}) - \mu |\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2|^2 \right\}}{i} \frac{(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2)}{|\vec{\lambda}_1|^{(n-\alpha)/2} |\vec{\lambda}_2|^{(n-\alpha)/2}} \right) -$$

$$- \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_{\sqrt{t}}} \exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{z}) \right\} (\vec{a} - \vec{z}) \frac{\exp\left\{ -|\vec{a} - \vec{z}|^2 / (4\mu) \right\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} \times$$

$$\left. \times \frac{\left(f(|\vec{\lambda}_1| / \sqrt{t}) f(|\vec{\lambda}_2| / \sqrt{t}) \right)^{1/2}}{t^{(1+n)/2}} d\vec{z} \right|^2 d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2 \le$$

$$\le \frac{t^{1+\alpha}}{4(1+\mu)^2 L^2(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \frac{2\mu(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2) \exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{a}) - \mu |\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2|^2 \right\}}{i} \right. \times$$

$$\times \left(\frac{\left(f\left(|\vec{\lambda}_1| / \sqrt{t} \right) f\left(|\vec{\lambda}_2| / \sqrt{t} \right) \right)^{1/2}}{t^{(1+n)/2}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2c_4(\mu, \alpha, 2)(1+\mu) L(\sqrt{t})}{2\mu t^{(1+\alpha)/2} |\vec{\lambda}_1|^{(n-\alpha)/2} |\vec{\lambda}_2|^{(n-\alpha)/2}} \right) \right|^2 d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2 +$$

$$+ \frac{t^{1+\alpha}}{2(1+\mu)^2 L^2(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{D}_{\sqrt{t}}} \exp\left\{ i(\vec{\lambda}_1 + \vec{\lambda}_2, \vec{z}) \right\} (\vec{a} - \vec{z}) \frac{\exp\left\{ -|\vec{a} - \vec{z}|^2 / (4\mu) \right\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} \right|^2 \times$$

$$\times \frac{f\left(|\vec{\lambda}_1| / \sqrt{t} \right) f\left(|\vec{\lambda}_2| / \sqrt{t} \right)}{t^{1+n}} d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2 = V_1(t) + V_2(t).$$

Покажем, что $V_2(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно,

$$0 \le V_2(t) \le \frac{t^{1+\alpha}}{2(1+\mu)^2 L^2(\sqrt{t})} t^{-n-1} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f\left(\frac{|\vec{\lambda}_1|}{\sqrt{t}}\right) f\left(\frac{|\vec{\lambda}_2|}{\sqrt{t}}\right) d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2 \times$$

$$\times \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\vec{a}-\vec{z}) \frac{\exp\left\{-|\vec{a}-\vec{z}|^2/(4\mu)\right\}}{(4\pi\mu)^{n/2}} d\vec{z} \right|^2 \le \frac{K_6}{t^{n-\alpha}} \to 0, \quad t\to\infty, \ 0<\alpha<\frac{n}{2}.$$

Теперь проведем анализ $V_1(t)$, используя для $f(\cdot)$ асимптотику из (23): при $t\to\infty$

$$V_1(t) = \frac{t^{1+\alpha}(2\mu)^2}{4(1+\mu)^2 L^2(\sqrt{t})} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{2n}} \left| \frac{\exp\left\{i\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2, \vec{a}\right) - \mu\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2\right\}}{i} \frac{\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right)}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^{(n-\alpha)/2}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{(n-\alpha)/2}} \right|^2 \times$$

$$\times \left| \frac{\left(f\left(\left|\vec{\lambda}_1\right|/\sqrt{t}\right) f\left(\left|\vec{\lambda}_2\right|/\sqrt{t}\right)\right)^{1/2} \left|\vec{\lambda}_1\right|^{(n-\alpha)/2}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{(n-\alpha)/2}}{t^{(1+n)/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{2c_4(\mu,\alpha,2)(1+\mu)L\left(\sqrt{t}\right)}{2\mu t^{(1+\alpha)/2}} \right|^2 d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2 \sim$$

$$\sim \frac{t^{1+\alpha}(2\mu)^2}{4(1+\mu)^2 L^2(\sqrt{t})} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\exp\left\{2i\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2, \vec{a}\right) - 2\mu\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2\right\}\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^{n-\alpha}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{n-\alpha}} \times$$

$$\times \left| \frac{\alpha\left(L\left(\sqrt{t}/\left|\vec{\lambda}_1\right|\right) L\left(\sqrt{t}/\left|\vec{\lambda}_2\right|\right)\right)^{1/2}}{c_3(n,\alpha)|s(1)|t^{(1+\alpha)/2}} - \frac{2c_4(\mu,\alpha,2)(1+\mu)L(\sqrt{t})}{2\mu t^{(1+\alpha)/2}} \right|^2 d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2 =$$

$$= \frac{(2\mu)^2\alpha^2}{4(1+\mu)^2 c_3^2(n,\alpha)|s(1)|} \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^{2n}} \frac{\exp\left\{2i\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2, \vec{a}\right) - 2\mu\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2\right\}\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^{n-\alpha}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{n-\alpha}} \times$$

$$\times \left| \left(\frac{L\left(\sqrt{t}/\left|\vec{\lambda}_1\right|\right) L\left(\sqrt{t}/\left|\vec{\lambda}_2\right|\right)}{L(\sqrt{t}) L(\sqrt{t})} \right)^{1/2} - 1 \right|^2 d\vec{\lambda}_1 d\vec{\lambda}_2.$$

Функция

$$\frac{\exp\left\{2i\left(\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2,\vec{a}\right)-2\mu\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2\right\}\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^{n-\alpha}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{n-\alpha}}$$

абсолютно интегрируема, так как в нуле имеет порядок

$$O\left(\frac{\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^{n-\alpha}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{n-\alpha}}\right), \quad 0<\alpha<\frac{n}{k},$$

а на бесконечности — порядок

$$O\left(\exp\left\{-\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2\right\}\frac{\left|\vec{\lambda}_1+\vec{\lambda}_2\right|^2}{\left|\vec{\lambda}_1\right|^{n-\alpha}\left|\vec{\lambda}_2\right|^{n-\alpha}}\right).$$

Поэтому, переходя к пределу под знаком интеграла, можно получить, что $V_2(t)\to 0,\ t\to\infty$, а отсюда $M\left|\vec{v}(\vec{a},t)-\vec{Z}(\vec{a})\right|^2\to 0,\ t\to\infty$, откуда следует сходимость одномерных распределений в теореме 2. Сходимость конечномерных распределений доказывается методом Крамера – Уолда – Сапогова в сочетании с некоторыми простыми обобщениями леммы 1. Эти рассуждения стандартны и мы их опускаем. Теорема 2 доказана.

1. *Burgers J. M.* A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Adv. Appl. Mech. – 1948. – P. 171 – 189.
2. *Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И.* Нелинейные случайные волны в средах без дисперсий. – М.: Наука, 1990. – 216 с.
3. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
4. *Rosenblatt M.* Remark on the Burgers equation // J. Math. Phys. – 1968. – **9**. – P. 1129 – 1136.
5. *Rosenblatt M.* Fractional integrals of stationary prosesses and the central limit theorem // J. Appl. Probab. – 1976. – **13**. – P. 723 – 732.
6. *Rosenblatt M.* Scale normalization and random solutions of the Burgers equation // Ibid. – 1987. – **24**. – P. 328 – 338.
7. *Булинский А. В., Молчанов С. А.* Асимптотическая гауссовость решения уравнения Бюргерса со случайными начальными данными // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**, № 2. – С. 217 – 235.
8. *Giraitis L., Molchanow S. A., Surgailis D.* Long memory shot noises and limit theorems with applications to Burger's equations. New direction in time series analysis. Pt II // IMA Volumes Math. and Appl. – 1993. – **46**. – P. – 153 – 171.
9. *Sinai Ya. G.* Two resalts concerning asymptotic behaviour of solutions of the Burgers equations with force // J. Statist. Physics. – 1991. – **64**. – P. 1 – 12.
10. *Leonenko N. Orsingher E.* Limit theorems for solutions of Burgers equation with Gaussian and non–Gaussian initial conditions. – Univ. Rome, 1991. – 22 p. – Preprint № 1.
11. *Berman S. M.* High level sojours for strongly dependent Gaussian processes // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1979. – **50**, № 3. – P. 223 – 236.
12. *Dobrushin R. L., Major P.* Non-central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields // Ibid. – P. 1 – 28.
13. *Taqqu M. S.* Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rang // Ibid. – № 1. – P. 55 – 83.
14. *Ivanov A. V., Leonenko N. N.* Statistical analysis of random fields. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. – 224 p.
15. *Леоненко Н. Н., Орзингер Э., Рыбасов К. В.* Предельные распределения решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. I // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 870 – 877.
16. *Леоненко Н. Н., Оленко А. Я.* Тауберовы и абелевы теоремы для корреляционной функции однородного изотропного случайного поля // Там же. – 1991. – **43**, № 12. – С. 1652 – 1664.
17. *Оленко А. Я.* Некоторые вопросы корреляционной и спектральной теории случайных полей: Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1991. – 18 с.
18. *Leonenko N. N., Olenko A. Ya.* Tauberian theorems for correlation functions and limit theorems for spherical averages of random fields // Random Oper. Stoch. Eqs. – 1992. – **1**, № 1. – P. 58 – 68.
19. *Major P.* Multiple Wiener – Itô integrals // Lect. Notes Math. – 1981. – **849**. – 127 p.

Получено 20.05.92