УДК 519.65

Н. П. Корнейчук, чл.-корр. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ*

For a continuous operator $A: X \to Y$, we formulate the problem of the optimal renewal of values Ax, $x \in X$, by decreasing the uncertainty domain by using an information $\mu_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, where μ_k are continuous functionals, defined on the space X. Specific results are obtained for some integral operators in functional spaces.

Сформульована задача про оптимальне відновлення значень Ax, $x \in X$, неперервного оператора $A: X \to Y$, шляхом зменшення області невизначеності для Ax у просторі Y за рахунок одержання інформації $\mu_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, де μ_k — задані на X неперервні функціонали. Конкретні результати одержані для деяких інтегральних операторів у функціональних просторах.

1. В наиболее общей постановке задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть X и Y — метрические пространства с метрикой соответственно $\rho(x, y)_X$ и $\rho(x, y)_Y$, A — непрерывный оператор из X в Y, который предполагается известным. Для некоторого элемента $x \in X$ требуется найти элемент $y = Ax$, причем нам известно только то, что $x \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — ограниченное множество в X, которое считается заданным. Эта априорная информация задает также и область неопределенности

$$A\mathfrak{M} = \{y\colon y \in Y,\ y = Ax,\ x \in \mathfrak{M}\} \tag{1}$$

для искомого элемента $y = Ax$.

Предположим, что мы имеем возможность получать дополнительную информацию об элементе x в виде значений $\mu_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, где μ_k — некоторые заданные на X непрерывные функционалы, выбор которых находится в нашем распоряжении. Эта дополнительная информация должна уменьшать область неопределенности как для x, так и для Ax, и задача, грубо говоря, состоит в том, чтобы обеспечить заданную точность восстановления элемента Ax при минимально возможном числе N функционалов $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots$ $\ldots, \mu_N(x)$.

Пример. Как хорошо известно, решение граничной задачи Дирихле для единичного круга задается формулой

$$y(\rho, t) = A_\rho x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \chi_\rho(t-u)x(u)\,du, \quad 0 \le \rho \le 1, \tag{2}$$

где функция $x(u)$ определена на границе круга, функция $y(\rho, t)$ — внутри круга, а

$$\chi_\rho(\tau) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \cos m\tau, \quad 0 \le \rho \le 1, \tag{3}$$

— ядро Пуассона, которым определяется оператор $A = A_\rho$. Если заранее известно, что $x(u)$, например, удовлетворяет условию Липшица, то, вычисляя значения $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots$ некоторых функционалов (коэффициентов Фурье, значений функции в отдельных точках и др.), мы можем сужать область не-

* Выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

определенности для $x(u)$ и $y(\rho, t)$ и, в конце концов, достигнем нужной точности для определения функции $y(\rho, t)$. Но сделать это нужно оптимальным образом, т. е. используя минимальное количество функционалов.

2. Чтобы строго сформулировать задачу, введем численную характеристику области неопределенности. В качестве такой характеристики можно взять диаметр области или ее чебышевский радиус. Если иметь в виду область неопределенности (1), то речь идет о величинах

$$D(A\mathfrak{M})_Y = \sup\{\rho(Ax, Az)_Y:\ x, z \in \mathfrak{M}\},$$

или

$$r(A\mathfrak{M})_Y = \inf_{y\in Y}\ \sup_{x\in\mathfrak{M}} \rho(y, Ax)_Y.$$

Заметим, что диаметр дает более точное представление о размере несимметричного множества. С другой стороны, если

$$r(A\mathfrak{M})_Y = \sup_{x\in\mathfrak{M}} \rho(y_0, Ax)_Y,\ \ y_0 \in Y,$$

то элемент y_0 есть чебышевский центр множества $A\mathfrak{M}$. Если такой элемент известен, то он является оптимальным восстановлением элемента Ax по информации $x \in \mathfrak{M}$ $\big($с погрешностью $r(A\mathfrak{M})_Y\big)$.

Пусть, далее, число $N = 1, 2, \ldots$ фиксировано и $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ — некоторый набор заданных и непрерывных на X функционалов. Для $x \in X$ будем полагать

$$T(x, M_N) = \{\mu_1(x),\ \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}, \tag{4}$$

и каждому $x \in \mathfrak{M}$ сопоставим множества

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(x, M_N) &= \{z:\ z \in \mathfrak{M},\ T(z, \mathfrak{M}) = T(x, \mathfrak{M})\}, \\ A\mathfrak{M}(x, M_N) &= \{y:\ \ y \in Y,\ \ y = Az,\ \ z \in \mathfrak{M}(x, M_N)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Если при фиксированном $x \in \mathfrak{M}$ для любого набора M_N можно эффективно определить множество (5), то задача состоит в отыскании точной нижней грани

$$\inf_{M_N} D(A\mathfrak{M}(x, M_N))_Y \tag{6}$$

по всем наборам M_N и в указании набора, который реализует инфимум.

Если же вычисление диаметра множества (5) для конкретного $x \in \mathfrak{M}$ вызывает затруднения, то остается ориентироваться на худший случай. Положим

$$\mathfrak{M}(M_N) = \sup\{\rho(x, z)_X:\ x, z \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = T(z, M_N)\},$$

$$A\mathfrak{M}(M_N) = \sup\{\rho(Ax, Az)_Y:\ \ x, z \in \mathfrak{M}(M_N)\}.$$

Величина

$$\gamma^N(A\mathfrak{M}, Y) = \inf_{M_N} D(A\mathfrak{M}(M_N))_Y \tag{7}$$

дает минимально возможную гарантированную для всех $x \in \mathfrak{M}$ погрешность восстановления элемента Ax по информации (4). Эту величину можно рассматривать как информационный N-поперечник множества $A\mathfrak{M}$ в пространстве Y.

Теперь заметим, что при выборе набора функционалов $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots \ldots, \mu_N\}$ мы можем поступить двояким образом. Во-первых, можно сразу предъявить весь набор M_N, а затем решать задачу (6) для конкретного элемента $x \in \mathfrak{M}$, или, ориентируясь на худший случай, искать поперечник (7). Такой подход называют неадаптивным. При втором, адаптивном, подходе функционалы $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ выбираются последовательно, причем при выборе μ_k, $k = 2, 3, \ldots$, учитываются уже найденные значения $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\ldots$, $\mu_{k-1}(x)$ и соответствующая область неопределенности. Этот подход позволяет полностью использовать последовательно накапливаемую информацию о конкретном элементе $x \in \mathfrak{M}$, а в худшем варианте позволяет учесть особенности структуры множеств $A\mathfrak{M}(M_N), N = 1, 2, \ldots$.

3. Конкретные результаты по сформулированным задачам мы сможем привести в линейном случае. Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, A — линейный непрерывный оператор из X в Y, M_N — набор заданных на X линейных непрерывных функционалов $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$. Теперь можно использовать вектор информации (4) непосредственно для приближенного восстановления элемента Ax в виде $\tilde{y} = \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x) y_k$, где $y_1, y_2, \ldots \ldots, y_N$ — некоторые элементы пространства Y. При этом возникает задача минимизации погрешности $\| \tilde{y} - Ax \|_Y$ или величины

$$\sup_{x \in \mathfrak{M}} \left\| \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x) y_k - Ax \right\|_Y$$

по всем наборам M_N из N функционалов и по всем наборам элементов $y_1, y_2, \ldots, y_N$. Такой подход использован в работе автора [1].

Здесь же мы исследуем задачу минимизации погрешности восстановления элемента Ax только за счет оптимального выбора функционалов и сужения области неопределенности. В случае нормированных пространств появляются новые возможности при решении задачи (7). В частности, для „правильных" множеств $\mathfrak{M}$ выражение для

$$D(A\mathfrak{M}(M_N))_Y = \sup\{\|Ax - Az\|_Y : x, z \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = T(z, M_N)\} \tag{8}$$

упрощается. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное множество в нормированном пространстве X, $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$ — набор заданных на X линейных непрерывных функционалов, A — линейный оператор из X в Y. Тогда*

$$D(A\mathfrak{M}(M_N))_Y = 2r(A\mathfrak{M}(M_N))_Y =$$
$$= 2\sup\{\|Ax\|_Y :\ x \in \mathfrak{M},\ T(x, M_N) = 0\}. \tag{9}$$

Доказательство основано на известных соображениях (см., например, [2, с. 219]); в более общей ситуации оно приведено в [1].

Вычисление диаметра (8) упрощается, если заранее известно, что верхняя грань в (8) достигается на паре „крайних" элементов множества $\mathfrak{M}(M_N)$. В этом случае

$$D(A\mathfrak{M}(M_N))_Y = \sup\{\|Ax - Az\|_Y :\ \|x - z\|_X = D(\mathfrak{M}(M_N))_X\},$$

а в условии предложения 1

$$D(A\mathfrak{M}(M_N))_Y = 2\sup\{\,\|Ax\|_Y\colon \|x\|_X = D(\mathfrak{M}(M_N))_X/2\}.$$

Такие ситуации встретятся ниже, в рамках функциональных пространств.

Для информационного N-поперечника множества $A\mathfrak{M}$ в линейном случае используем обычное обозначение

$$\lambda^N(A\mathfrak{M}, Y) = \inf_{M_N} D(A\mathfrak{M}(M_N))_Y,$$

где инфимум вычисляется по всем наборам M_N заданных на X линейных непрерывных функционалов. Заметим, что в условиях предложения 1

$$\lambda^N(A\mathfrak{M}, Y) = 2\inf_{M_N}\sup\{\,\|Ax\|_Y\colon x\in\mathfrak{M},\ T(x, M_N) = 0\}.$$

Из предложения 1 следует, что для выпуклого центрально-симметричного множества $\mathfrak{M}$ адаптивный подход, если он ориентирован на худший случай, не может дать выигрыша по сравнению с неадаптивным, так как в силу линейности функционалов μ_k и оператора A каждое множество $A\mathfrak{M}(M_N)$, $N = 1, 2, \ldots$, также является выпуклым и центрально-симметричным. Таким образом, применяя адаптивный подход в худшем варианте, можно рассчитывать на выигрыш лишь тогда, когда множество $\mathfrak{M}$ не является центрально-симметричным.

4. Перейдем к рассмотрению конкретных ситуаций в функциональных пространствах. Под каждым из пространств X и Y будем тепер понимать пространство C или L_p, $1\le p\le\infty$, функций, заданных на конечном отрезке, с обычной нормой. Считаем для определенности, что функции пространства X определены на отрезке $[a, b]$, а функции пространства Y — на отрезке $[c, d]$. Нам потребуется такое утверждение.

Предложение 2. *Пусть Q — некоторое множество функций в пространстве X, и для всех $x(u)\in Q$ выполняются неравенства*

$$\psi(u)\le x(u)\le\Psi(u),\quad a\le u\le b, \tag{10}$$

где $\psi(u)$ и $\Psi(u)$ — фиксированные функции из X. Положим

$$x_0(u) = \frac{1}{2}[\psi(u)+\Psi(u)].$$

Если линейный оператор $A\colon X\to Y$ таков, что для всех $x(u)\in Q$ выполняются неравенства

$$A\psi(t)\le Ax(t)\le A\Psi(t),\quad c\le t\le d, \tag{11}$$

то для любой функции $x(u)\in Q$

$$|Ax(t) - Ax_0(t)|\le\frac{1}{2}[A\Psi(t) - A\psi(t)],\quad c\le t\le d; \tag{12}$$

а если ψ, $\Psi\in Q$, то

$$D(AQ)_Y = 2r(AQ)_Y = \|A(\Psi-\psi)\|_Y. \tag{13}$$

Неравенство (12) следует из (11) и определения функции $x_0(t)$. Если $\psi, \Psi\in Q$, то при $x(u) = \psi(u)$ или $x(u) = \Psi(u)$ в (12) будет знак равенства, и мы получаем (13).

Заметим, что если A — положительный оператор (т. е. из $x(u)\ge 0$, $a\le u\le b$, следует $Ax(t)\ge 0$, $c\le t\le d$), то неравенство (11) сразу вытекает из (10). Поэтому справедливо такое следствие.

Следствие. *Для положительного оператора A в условиях предложения* 2 *неравенство* (12), *а при* ψ, $\Psi \in Q$ *и равенства* (13) *справедливы при выполнении неравенств* (10).

Для произвольного линейного ограниченного оператора $A: X \to Y$ в предположении, что ψ, $\Psi \in Q$, вместо (13) можно написать лишь вытекающие из (9) двусторонние оценки

$$\| A(\Psi - \psi) \|_Y \le D(AQ)_Y \le \| A \| \| \Psi - \psi \|_X = \| A \| D(Q)_X, \qquad (14)$$

где $\| A \| = \| A \|_{X \to Y}$.

Предложение 2 и оценки (14) мы будем использовать в ситуациях, когда $Q = \mathfrak{M}(M_N)$, $N = 1, 2, \dots$, так что функции $\psi(u)$ и $\Psi(u)$ будут определяться и набором функционалов M_N.

5. Рассмотрим конкретные ситуации. Пусть $X = C[a, b]$, $Y = C[c, d]$ и оператор $A = A_K$ задается равенством

$$y_K(t) = A_K x(t) = \int_a^b K(t, u) x(u) du, \quad c \le t \le d, \qquad (15)$$

с помощью ядра $K(t, u)$, которое будем считать непрерывным на прямоугольнике $a \le u \le b$, $c \le t \le d$. Пусть задано множество $\mathfrak{M} \subset C[a, b]$, и для некоторого набора $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ определенных на $C[a, b]$ линейных функционалов

$$\mathfrak{M}(M_N) = \{x(u) : x(u) \in \mathfrak{M}, \ \psi(u) \le x(u) \le \Psi(u), \ a \le u \le b\},$$

где ψ, $\Psi \in C[a, b]$. Если для $x(u) \in \mathfrak{M}(M_N)$ выполняются неравенства

$$A_K \psi(t) \le A_K x(t) \le A_K \Psi(t), \ c \le t \le d, \qquad (16)$$

то в силу предложения 2

$$D(A_K \mathfrak{M}(M_N))_{C[c,d]} \le \left\| \int_a^b K(\cdot, u)[\Psi(u) - \psi(u)] du \right\|_{C[c,d]} \le$$

$$\le \max_{c \le t \le d} \int_a^b |K(t, u)| du \cdot \| \Psi - \psi \|_{C[a,b]}, \qquad (17)$$

причем если ψ, $\Psi \in \mathfrak{M}(M_N)$, то первое неравенство в (17) превращается в равенство.

В случае, когда сверточный интегральный оператор (2) задается ядром Пуассона (3), для некоторых множеств $\mathfrak{M}$ и наборов M_N значение диаметра наибольшей области неопределенности удается точно вычислить.

Пусть $X = C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций, KW_∞^m, $m = 1, 2, \dots$, — класс функций $x(u) \in C_{2\pi}$, у которых $(m-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна, а $|x^{(m)}(u)| = K$. Возьмем набор $M_{2n} = M_{2n}^\tau$ заданных на $C_{2\pi}$ линейных функционалов $\mu_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, 2n$, вида $\mu_k(x) = x(\tau_k)$, где $\tau_k = k\pi / n$, $k = 1, 2, \dots, 2n$.

Так как KW_∞^m — выпуклое и центрально-симметричное множество в $C_{2\pi}$, то, считая пока $K = 1$ и используя предложение 1, можно написать

$$D\left(A_\rho W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)\right)_{C_{2\pi}} = 2\sup\left\{ \|A_\rho x\|_{C_{2\pi}}:\ x(u)\in W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)_0 \right\},$$

где

$$W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)_0 = \{x(u):\ x(u)\in W_\infty^m,\ x(\tau_k)=0,\ k=1,2,\dots,2n\}.$$

В силу следствия 2.7.3 из [3], если $x(u)\in W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)_0$, то для всех u

$$|x(u)| \le \Psi_m(u), \tag{18}$$

где $\Psi_m(u) = |\varphi_{n,m}(u+\alpha_m)|$, $\varphi_{n,m}$ — стандартный идеальный сплайн Эйлера, задаваемый равенствами

$$\varphi_{n,0}(u) = \operatorname{sgn}\sin u,$$

$$\varphi_{n,m}(u) = \int\limits_{\gamma_m}^{u} \varphi_{n,m-1}(t)\,dt, \qquad \gamma_m = [1-(-1)^m]\,\frac{\pi}{4n},$$

а $\alpha_m = 0$, если m — четно, и $\alpha_m = \pi/2n$, если m — нечетно.

Так как $\chi_\rho(t)\ge 0$ и, значит, оператор Пуассона A_ρ положителен, из неравенства (18) следует, что для всех t $|A_\rho x(t)| \le A_\rho\Psi_m(t)$ и, таким образом,

$$D\left(A_\rho W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)\right)_{C_{2\pi}} \le \left\| \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \chi_\rho(\cdot-u)\Psi_m(u)\,du \right\|_{C_{2\pi}} \le 2\|\varphi_{n,m}\|_{C_{2\pi}},$$

ибо $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\chi_\rho(t)\,dt = 1$.

Теперь заметим, что при $m=1$ (и только при $m=1$) функция $\Psi_m(u)$ принадлежит классу W_∞^m, а точнее — множеству $W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)_0$. Это дает возможность, в силу предложения 2, написать

$$D\left(A_\rho W_\infty^1\left(M_{2n}^\tau\right)\right)_{C_{2\pi}} = 2\|A_\rho\Psi_1\|_{C_{2\pi}} = \max_t \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\chi_\rho(t-u)\Psi_1(u)\,du.$$

Разлагая $\Psi_1(u)$ в ряд Фурье:

$$\Psi_1(u) = \frac{\pi}{4n} - \frac{2}{\pi n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\cos(2\nu-1)2nu}{(2\nu-1)^2}$$

и учитывая (3), с помощью обобщенного равенства Парсеваля получаем

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\chi_\rho(t-u)\Psi_1(u)\,du = \frac{\pi}{2n} + \frac{4}{\pi n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu-1)}\cos 2n(2\nu-1)t}{(2\nu-1)^2}.$$

Так как $D\left(A_\rho KW_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)\right)_{C_{2\pi}} = KD\left(A_\rho W_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)\right)_{C_{2\pi}}$, то доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для всех* $m=1,2,\dots$ *и* $0\le\rho\le 1$ *справедливы неравенства*

$$\lambda^{2n}\left(A_\rho KW_\infty^m, C_{2\pi}\right) \le D\left(A_\rho KW_\infty^m\left(M_{2n}^\tau\right)\right)_{C_{2\pi}} \le$$

$$\le 2K\|\varphi_{n,m}\|_{C_{2\pi}} = 2K\,\mathcal{K}_m/n^m,$$

где $\mathcal{K}_m$ *— константа Фавара* [4, *с.* 72]. *При* $m=1$ *справедлив более точный результат*:

$$\lambda^{2n}\left(A_\rho KW^1_\infty, C_{2\pi}\right) \le D\left(A_\rho KW^1_\infty\left(M^\tau_{2n}\right)\right)_{C_{2\pi}} =$$

$$= \frac{K\pi}{2n} + \frac{4K}{\pi n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\rho^{2n(2\nu-1)}}{(2\nu-1)^2}, \quad 0 \le \rho \le 1. \tag{19}$$

Некоторые соображения позволяют предполагать, что первое неравенство в (19) можно заменить равенством.

6. Рассмотрим еще один конкретный случай, в котором адаптивный метод выбора функционалов μ_k может дать существенный выигрыш по сравнению с неадаптивным. Пусть при $0 < \alpha \le 1$

$$H^\alpha = \{x(t): x(t) \in C[a,b],\ |x(t') - x(t'')| \le |t' - t''|^\alpha,\ t', t'' \in [a,b]\},$$

$H^\alpha_{m,L}$ — множество монотонных функций $x(t) \in H^\alpha$ таких, что $x(b) - x(a) = L \ne 0$. Ясно, что множество $H^\alpha_{m,L}$ не является центрально-симметричным. Из результатов работы [5] следует, что при $0 < \alpha < 1$ существует набор $M^a_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots \ldots, \mu_N\}$ последовательно выбираемых функционалов μ_k, $\mu_k(x) = x(\tau_k)$, $\tau_k \in [a,b]$, такой, что для $x(u) \in H^\alpha_{m,L}\left(M^a_N\right)$ выполняются неравенства

$$\psi(u) \le x(u) \le \Psi(u), \quad a \le u \le b, \tag{20}$$

причем начиная с некоторого $N = N(\alpha)$

$$\|\Psi - \psi\|_{C[a,b]} \le \frac{2\beta}{n}\log_2 N, \quad \beta = \frac{L}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Но тогда, если интегральный оператор (15) сохраняет неравенство (20) в смысле (16), то

$$D\left(A_K H^\alpha_{m,L}\left(M^a_N\right)\right)_{C[c,d]} \le \|A_K\|\,\frac{2\beta}{n}\log_2 N. \tag{21}$$

В частности, эта оценка справедлива для положительных операторов A_K, например для A_ρ.

Если же пользоваться неадаптивным методом, т. е. весь набор M_N функционалов $\mu_k(x) = x(\tau_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, предъявлять сразу, то точный порядок при $N \to \infty$ диаметра множества $H^\alpha_{m,L}(M_N)$ в $C[a,b]$ есть $O(N^{-\alpha})$ [5]. Нетрудно указать конкретный оператор вида (15) (например, (2)) такой, что порядок сохраняется и для $D\left(A_K H^\alpha_{m,L}(M_N)\right)_{C[c,d]}$, а это при $0 < \alpha < 1$ хуже, чем (21).

1. *Korneichuk N. P.* Encoding and recovery of operator values // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 79–91.
2. *Тихомиров В. Н.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Оптимизация адаптивных алгоритмов восстановления монотонных функций класса H^ω // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 12. – С. 1627–1634.

Получено 23.05.94