УДК 512. 83

Е. Ф. Галба, канд. физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

ВЗВЕШЕННОЕ ПСЕВДООБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ С ВЫРОЖДЕННЫМИ ВЕСАМИ

A weighted pseudoinverse matrix with singular weights is given in terms of coefficients of the characteristic polynomial of a certain square matrix. By using the expression obtained, a limit representation of a weighted pseudoinverse matrix with singular weights is determined.

Зважена псевдообернена матриця з виродженими вагами подається в термінах коефіцієнтів характеристичного полінома деякої квадратної матриці. На основі одержаного виразу дається граничне зображення зваженої псевдооберненої матриці з виродженими вагами.

Пусть A — действительная матрица размерности $m \times n$, X — матрица размерности $n \times m$, B и C — симметричные положительно полуопределенные матрицы порядков m и n соответственно. В работе [1] взвешенная псевдообратная матрица с вырожденными весами определяется как матрица $X = A^+$, удовлетворяющая четырем условиям:

$$AXA = A, \tag{1}$$

$$XAX = X, \tag{2}$$

$$(BAX)^T = BAX, \tag{3}$$

$$(XAC)^T = XAC. \tag{4}$$

Там же устанавливается, что система (1) – (4) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{rk}\,(BA) = \mathrm{rk}\,(AC) = \mathrm{rk}\,(A), \tag{5}$$

где $\mathrm{rk}\,(P)$ — ранг матрицы P.

В работах [2, 3] псевдообратная матрица Мура – Пенроуза и взвешенная псевдообратная матрица с положительно определенными весами представлены соответственно в терминах характеристического полинома некоторых квадратных матриц. Предельное представление для матриц Мура – Пенроуза и взвешенной псевдообратной с положительно определенными весами дано в работах [4, 5].

В настоящей работе получено представление взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами, определяемой условиями (1) – (5), в терминах коэффициентов характеристического полинома матрицы A^TBAC. На основании полученного выражения дано предельное представление взвешенной псевдообратной матрицы с вырожденными весами.

Лемма 1. *Пусть для квадратных матриц V, F, P одного порядка выполняются условия $VP = PV$, $FP = PF$. Тогда из равенства $VP^2 = FP^2$ следует равенство $VP = FP$.*

Утверждение леммы 1 следует из легко проверяемого равенства

$$(VP^2 - FP^2)(V - F) = (VP - FP)^2,$$

которое справедливо при выполнении условий леммы.

Лемма 2. *Пусть A^TB, AC и A^T — произвольные матрицы, для которых существуют произведения AB, AC и A^TBACA^T и которые имеют один и тот же ранг r. Тогда ранг матрицы A^TBACA^T тоже равен r.*

Доказательство. Будем использовать неравенство для ранга произведения двух прямоугольных матриц

$$\mathrm{rk}\,(PQ) \le \min\{\mathrm{rk}\,(P), \mathrm{rk}\,(Q)\}, \tag{6}$$

где P и Q — произвольные матрицы, для которых существует произведение PQ, и неравенство Фробениуса

$$\operatorname{rk}(LM) + \operatorname{rk}(MN) \le \operatorname{rk}(M) + \operatorname{rk}(LMN), \tag{7}$$

справедливое для всех тех матриц L, M, N, для которых существует произведение LMN.

В силу (7) имеем

$$\operatorname{rk}(A^TBAC) + \operatorname{rk}(ACA^T) \le \operatorname{rk}(AC) + \operatorname{rk}(A^TBACA^T),$$

откуда, учитывая условие леммы и неравенство (6), получаем

$$\operatorname{rk}(A^TBAC) + \operatorname{rk}(ACA^T) \le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(A^TBACA^T) \le 2\operatorname{rk}(A). \tag{8}$$

Теперь оценим снизу ранги матриц ACA^T и A^TBAC через ранг матрицы A. Используя (7), находим

$$\operatorname{rk}(AC) + \operatorname{rk}(CA^T) \le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(ACA^T),$$

откуда в силу условий леммы имеем

$$\operatorname{rk}(A) \le \operatorname{rk}(ACA^T). \tag{9}$$

Снова используя неравенство Фробениуса (7), получаем

$$\operatorname{rk}(A^TB) + \operatorname{rk}(BAC) \le \operatorname{rk}(BA) + \operatorname{rk}(A^TBAC),$$

$$\operatorname{rk}(BA) + \operatorname{rk}(AC) \le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(BAC).$$

Из последних двух неравенств с учетом условий леммы имеем

$$\operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(A^TBAC) \ge \operatorname{rk}(A^TB) + \operatorname{rk}(AC) = 2\operatorname{rk}(A),$$

т. е.

$$\operatorname{rk}(A^TBAC) \ge \operatorname{rk}(A). \tag{10}$$

В силу (8) – (10) получаем

$$2\operatorname{rk}(A) \le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(A^TBAC) \le \operatorname{rk}(ACA^T) + \operatorname{rk}(A^TBAC) \le$$

$$\le \operatorname{rk}(A) + \operatorname{rk}(A^TBACA^T) \le 2\operatorname{rk}(A),$$

т. е. $\operatorname{rk}(A^TBACA^T) = \operatorname{rk}(A)$, откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. *Матрица A^+, являющаяся решением системы матричных уравнений* (1) – (4), *при выполнении условий* (5) *представима в виде*

$$A^+ = -\alpha_k^{-1}C[(A^TBAC)^{k-1} + \alpha_1(A^TBAC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E]A^TB, \tag{11}$$

где E — единичная матрица, α_p, $p = 1, \ldots, n$, — коэффициенты характеристического полинома

$$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = \det|\lambda E - A^TBAC|,$$

а α_k — последний, отличный от нуля коэффициент этого полинома.

Доказательство. Сначала покажем, что матрица, определяемая формулой

$$A^+ = CSA^TB, \tag{12}$$

удовлетворяет системе (1) – (4), если существует матрица S, удовлетворяющая уравнению

$$SA^TBACA^T = A^T \tag{13}$$

и условиям

$$SA^TBAC = A^TBACS, \quad CS = (CS)^T. \tag{14}$$

Матрица A^+ удовлетворяет уравнению (1) при выполнении условий (13), (14). Действительно, учитывая (14), можно переписать (13) в виде

$$A^TBACSA^T = A^T, \quad AS^TCA^TBA = A, \quad ACSA^TBA = A,$$

откуда в силу представления A^+ формулой (12) и следует утверждение.

Для того чтобы показать, что матрица A^+ удовлетворяет уравнению (2), умножим (13) слева на CS, а справа — на B. Учитывая (14), получаем $CSA^TBACSA^TB = CSA^TB$, т. е. матрица A^+, определенная формулой (12), удовлетворяет уравнению (2).

Теперь, подставляя в (3) $A^+ = CSA^TB$ и учитывая (14), получаем

$$BACSA^TB = BAS^TCA^TB = (BACSA^TB)^T,$$

т. е. BAA^+ является симметричной матрицей и, следовательно, A^+ удовлетворяет (3).

Наконец, подставляя в (4) $A^+ = CSA^TB$ и учитывая (14), имеем $CSA^TBAC = CA^TBACS = CA^TBAS^TC = (CSA^TBAC)^T$, так что A^+AC является симметричной матрицей, т. е. удовлетворяет (4).

Теперь покажем, что существует такая матрица S, которая удовлетворяет (13), (14) при выполнении условий (5). Для этого используем теорему Гамильтона – Кэли, согласно которой любая квадратная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Так как A^TBAC — квадратная матрица порядка n, то справедливо равенство

$$(A^TBAC)^n + \alpha_1(A^TBAC)^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}A^TBAC + \alpha_n E = 0. \tag{15}$$

Если бы $\alpha_n \neq 0$, то матрица A^TBAC имела бы обратную. Тогда можно было бы положить $S = (A^TBAC)^{-1}$. Легко проверить, что такая матрица удовлетворяет условиям (13), (14). Но матрица A^TBAC является вырожденной и, следовательно, $\alpha_n = 0$. Пусть среди коэффициентов α_p, $p = 1, \ldots, n-1$, α_k будет последний, отличный от нуля коэффициент полинома $f(\lambda) = \det|\lambda E - A^TBAC|$ и пусть

$$S = -\alpha_k^{-1}[(A^TBAC)^{k-1} + \alpha_1(A^TBAC)^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}E]. \tag{16}$$

Тогда из (15) получим

$$S(A^TBAC)^{n-k+1} = (A^TBAC)^{n-k}. \tag{17}$$

Из вида матрицы S, определенной формулой (16), следует, что для нее выполняются условия (14). Теперь осталось показать, что для матрицы S выполняется условие (13).

Нетрудно убедиться, что в силу леммы 1 из (17) получаем

$$S(A^TBAC)^2 = A^TBAC. \tag{18}$$

Умножим равенство (18) справа на A^T и, учитывая (14), перепишем полученное равенство в виде

$$(A^TBAC)^2SA^T = A^TBACA^T. \tag{19}$$

Рассмотрим матрицы A^TB, AC и A^T, которые имеют соответственно размеры $n \times m$, $m \times n$, $n \times m$ и согласно условиям теоремы — одинаковый ранг; положим его равным r.

Чтобы показать, что из равенства (19) следует (13) при выполнении условий (5), используем скелетное разложение матриц [6] A^TB, AC и A^T, т. е. представим их в виде $A^TB = KL$, $AC = MN$, $A^T = PQ$, где K, L, M, N, P и Q — матрицы полного ранга соответственно размеров $n \times r$, $r \times m$, $m \times r$, $r \times n$, $n \times r$ и $r \times m$. Тогда (19) примет вид

$$KLMNPQBACSA^T = KLMNPQ. \tag{20}$$

Матрица K^TK невырождена (см [6]), так что она имеет обратную. Умножим равенство (20) сначала слева на K^T, а потом на $(K^TK)^{-1}$. Получим

$$LMNPQBACSA^T = LMNPQ. \tag{21}$$

Матрицы LM и NP — квадратные, невырожденные ранга r. Действительно, ранг этих матриц будет r, так как согласно лемме 2 ранг матрицы $KLMNPQ$ равен r. Но ранг матрицы произведения не может превышать ранги матриц сомножителей. С другой стороны, ранги матриц сомножителей LM, NP не могут превышать r, так как r — порядок этих матриц.

Умножим равенство (21) сначала слева на $(LM)^{-1}$, а затем на $(NP)^{-1}$. В результате получим

$$QBACSA^T = Q. \tag{22}$$

Теперь, умножая слева (22) на P и используя (14), получаем (13).

Так как матрица S, определенная формулой (16), удовлетворяет условиям (13), (14), то матрица A^+, определенная формулой (12), удовлетворяет системе (1) – (4) и представима в виде (11). Теорема доказана.

Отметим, что в силу (12), (14) A^+ принимает вид $A^+ = S^TCA^TB$.

Теперь на основании выражения (11) для матрицы A^+ дадим предельное представление этой матрицы.

Теорема 2. *Пусть относительно матриц* A, B, C *выполняются предположения теоремы* 1. *Тогда существует предел*

$$\lim_{\delta \to +0} A_\delta = \lim_{\delta \to +0} C^{1/2}(C^{1/2}A^TBAC^{1/2} + \delta E)^{-1}C^{1/2}A^TB = A^+. \tag{23}$$

Доказательство. Обозначим $P = C^{1/2}A^TBAC^{1/2}$. Прежде всего отметим, что матрица $P + \delta E$ — симметричная и при $\delta > 0$ положительно определенная. Действительно,

$$(Px, x) = \| B^{1/2}AC^{1/2}x \|^2 + \delta \| x \|^2 \geq \delta \| x \|^2,$$

где $(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ — скалярное произведение в евклидовом векторном пространстве, $\| u \| = (u, u)^{1/2}$.

Следовательно, матрица $P + \delta E$ имеет обратную. Обозначим $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, где $\lambda_i \geq 0$ — собственные значения матрицы P. Так как матрица P — симметричная, то она представима в виде $P = Q\Lambda Q^T$, где Q — ортогональная матрица. Тогда, учитывая (13), (14) получаем

$$\lim_{\delta \to +0} A_\delta = \lim_{\delta \to +0} C^{1/2}(P + \delta E)^{-1}P^2C^{1/2}S^2A^TB =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} C^{1/2}Q(\Lambda + \delta E)^{-1}Q^T(Q\Lambda Q^T)^2C^{1/2}S^2A^TB =$$

$$= \lim_{\delta \to +0} C^{1/2}Q(\Lambda + \delta E)^{-1}\Lambda^2Q^TC^{1,2}S^2A^TB.$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{\delta\to+0}(\Lambda+\delta E)^{-1}\Lambda^2 = \Lambda$. В силу этого соотношения, условий (13), (14) и определения матрицы A^+ формулой (12) имеем

$$\lim_{\delta\to+0} A_\delta = C^{1/2}Q\Lambda Q^T C^{1/2}S^2A^TB = C^{1/2}PC^{1/2}S^2A^TB =$$

$$= CA^TBACS^2A^TB = CSA^TBACSA^TB = CSA^TB = A^+.$$

Теорема доказана.

Из представления взвешенной псевдообратной матрицы A^+ соотношением (23) следует, что при достаточно малом параметре δ матрицы A^+ и A_δ будут как угодно мало отличаться друг от друга и на основании предельного представления матрицы A^+ можно строить регуляризующие алгоритмы. Близость матриц A^+ и A_δ устанавливает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* A^+ *— матрица, определенная формулой* (12), A_δ *— матрица, определенная в* (23). *Тогда справедлива оценка*

$$\| A^+ - A_\delta \|_l \le \delta \| C^{1/2}Q \|_l \| Q^T C^{1/2}S^2A^TB \|_l, \tag{24}$$

где Q *— ортогональная матрица в спектральном разложении матрицы* $P = C^{1/2}A^TBAC^{1/2}$, $\| A \|_l = \max \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$.

Доказательство. В с. .у (12) – (14) имеем

$$A_\delta = C^{1/2}(P+\delta E)^{-1}P^2C^{1/2}S^2A^TB, \quad A^+ = C^{1/2}PC^{1/2}S^2A^TB.$$

Пусть $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_i)$, где $\lambda_i \ge 0$ — собственные значения матрицы P. Тогда $P = Q\Lambda Q^T$ и

$$A_\delta = C^{1/2}Q(\Lambda+\delta E)^{-1}\Lambda^2Q^TC^{1/2}S^2A^TB,$$

$$A^+ = C^{1/2}Q\Lambda Q^TC^{1/2}S^2A^TB.$$

Учитывая вид матриц Λ, Λ^2 и $(\Lambda+\delta E)^{-1}$, получаем

$$\| A^+ - A_\delta \|_l = \| C^{1/2}Q(\Lambda - (\Lambda+\delta E)^{-1}\Lambda^2)Q^TC^{1/2}S^2A^TB \|_l =$$

$$= \| C^{1/2}QDQ^TC^{1/2}S^2A^TB \|_l,$$

где $D = \operatorname{diag}\left(\dfrac{\delta\lambda_i}{\lambda_i+\delta}\right)$.

Учитывая вид матрицы D и определение матричной нормы $\|\cdot\|_l$, из последнего равенства получаем оценку (24). Теорема доказана.

1. *Ward J. F., Boullion T. L., Lewis T. O.* Weighted pseudoinverses with singular weights // SIAM J. Appl. Math. – 1971. – **21**, № 3. – P. 480 – 482.
2. *Decell H. P.* An application of the Cayley – Hamilton theorem to generalized matrix inversion // SIAM Rev. – 1965. – **7**, № 4. – P. 526 – 528.
3. *Молчанов И. Н., Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение комплексных матриц // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 53 – 57.
4. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1977. – 223 с.
5. *Молчанов И. Н., Галба Е. Ф.* Взвешенное псевдообращение матриц с положительно определенными весами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 7. – С. 15 – 17.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Получено 21.01.93