УДК 517. 956

**С. А. Алдашев,** д-р физ.-мат. наук (Алма-Атин. ин-т инженеров ж.-д. трансп.)

# О КОРРЕКТНОСТИ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ДАРБУ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

For the equation

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i} u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0,$$

$$k_i = \text{const} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad m \geq 2,$$

a multidimensional analog of the known "Gellerstedt condition"

$$a_i(x,t) = O(1)\, t^{\alpha}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha > \frac{k_1}{2} - 1,$$

is found and, under the assumption that this condition is satisfied, a unique solvability of the Darboux problems is proved. Theorems on uniqueness of solutions of these problems are also established.

Для рівняння

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i} u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0,$$

$$k_i = \text{const} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad x = (x_1, \ldots, x_m), \quad m \geq 2,$$

знайдено багатовимірний аналог "відомої умови Ґеллерстедта"

$$a_i(x,t) = O(1)\, t^{\alpha}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha > \frac{k_1}{2} - 1,$$

при виконанні якої доведені однозначні розв'язуваності задач Дарбу. Встановлені також теореми єдиності розв'язку цих задач.

Задачи Дарбу для двумерных вырождающихся гиперболических уравнений исследовались во многих работах (см., например, [1 – 4]). Многомерные аналоги этих задач в случае, когда нехарактеристические части границы области представляют собой поверхность пространственного типа, изучены сравнительно мало [5 – 9].

Расмотрим в полуплоскости $t \geq 0$ вырождающееся гиперболическое уравнение

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i} u_{x_i x_i} - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \tag{1}$$

где $k_i = \text{const} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $m \geq 2$. Не ограничивая общности можно считать, что $0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_m$. В дальнейшем нам понадобится связь декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ со сферическими $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$:

$$x_1 = r\cos\theta_1 = rp_1(\theta_1),$$
$$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_1 = rp_2(\theta_1,\theta_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{m-1} = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{m-2}\cos\theta_{m-1} = rp_{m-1}(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}),$$
$$x_m = r\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{m-2}\sin\theta_{m-1} = rp_m(\theta_1, \ldots, \theta_{m-1}), \quad t = t,$$

где $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$, при этом $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = r^2$, $\sum_{i=1}^{m} p_i^2 = 1$.

Найдем характеристические поверхности уравнения (1).

По определению характеристическими поверхностями или характеристиками уравнения (1) называют поверхности

$$\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_m, t) = 0 \tag{2}$$

такие, для которых на этой поверхности

$$F(x_1, \dots, x_m, t, q_1, \dots, q_m, q_0) = \sum_{i=1}^{m} t^{k_i} q_i^2 - q_0^2 = 0, \tag{3}$$

$$q_i = \Phi_{x_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad q_0 = \Phi_t.$$

Как известно из теории уравнений в частных производных первого порядка [10], поверхность (2), удовлетворяющая уравнению (3), получается как многообразие, состоящее из бихарактеристик, т. е. решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{F_{q_1}} = \dots = \frac{dx_m}{F_{q_m}} = \frac{dt}{F_{q_0}} = \frac{dq_1}{-\frac{\partial F}{\partial x_1}} = \dots = \frac{dq_m}{-\frac{\partial F}{\partial x_m}} = \frac{dq_0}{-\frac{\partial F}{\partial t}} = ds$$

или

$$\frac{dx_1}{2t^{k_1} q_1} = \dots = \frac{dx_m}{2t^{k_m} q_m} = \frac{dt}{-2q_0} = \frac{dq_1}{0} = \dots = \frac{dq_m}{0} = \frac{dq_0}{-\left(\sum\limits_{i=1}^{m} k_i t^{k_i - 1} q_i^2\right)} = ds. \tag{4}$$

Согласно (4) будем иметь $q_i = q_{i0} = p_i$, $i = 1, \dots, m$, при этом выполняется условие нормировки $\sum_{i=1}^{m} q_{i0}^2 = 1$, а также

$$x_i = 2p_i \left( \int_0^t t^{k_i} ds + C \right), \quad i = 1, \dots, m, \tag{5}$$

где $C$ — произвольная постоянная и

$$\frac{dq_0}{ds} = -\left( \sum_{i=1}^{m} k_i t^{k_i - 1} p_i^2 \right), \quad q_0 = -\frac{1}{2}\left(\frac{dt}{ds}\right). \tag{6}$$

Тогда из (6) имеем

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = 2\left( \sum_{i=1}^{m} k_i t^{k_i - 1} p_i^2 \right). \tag{7}$$

Теперь, изменяя дифференцирование

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = -\left(\frac{ds}{dt}\right)^{-3} \frac{d^2 s}{dt^2}, \tag{8}$$

из (7), (8) получаем

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \left( \sum_{i=1}^{m} k_i t^{k_i - 1} p_i^2 \right) = 0. \tag{9}$$

Если $\varphi(t) = \dfrac{ds}{dt}$, то (9) есть обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi'(t) + 2\varphi^3(t)\left(\sum_{i=1}^{m} k_i t^{k_i-1} p_i^2\right) = 0,$$

решением которого являются функции

$$\varphi(t) = \pm\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{m} t^{k_i} p_i^2\right)^{-1/2} \tag{10}$$

Формулы (5) и (10) позволяют найти уравнения семейства характеристических поверхностей

$$x_j = p_j\left[\int_0^t \frac{\xi^{k_j}\,d\xi}{\left(\sum_{i=1}^m \xi^{k_i} p_i^2\right)^{1/2}} + C\right], \quad j = 1, \ldots, m, \quad t = t, \tag{11}$$

$$x_j = p_j\left[C - \int_0^t \frac{\xi^{k_j}\,d\xi}{\left(\sum_{i=1}^m \xi^{k_i} p_i^2\right)^{1/2}}\right], \quad j = 1, \ldots, m, \quad t = t, \tag{12}$$

для уравнения (1). С помощью семейств (11), (12) образуем конечную область $D_\varepsilon$ евклидова пространства $E_{m+1}$ точек $(x, t)$, ограниченную характеристическими коноидами

$$x_j = \int_0^t \frac{p_j\xi^{k_j}\,d\xi}{\left(\sum_{i=1}^m \xi^{k_i} p_i^2\right)^{1/2}} + \varepsilon p_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad t = t,$$

$$x_j = p_j - \int_0^t \frac{p_j\xi^{k_j}\,d\xi}{\left(\sum_{i=1}^m \xi^{k_i} p_i^2\right)^{1/2}}, \quad j = 1, \ldots, m, \quad t = t,$$

и плоскостью $t = 0$, где $0 \le t \le t_0$, $t_0$: $\dfrac{1-\varepsilon}{2} = \displaystyle\int_0^{t_0}\left(\sum_{i=1}^m \xi^{k_i} p_i^2\right)^{1/2} d\xi$, а $0 < \varepsilon < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу $\partial D_\varepsilon$ области $D_\varepsilon$, обозначим соответственно через $S_\varepsilon, S_1$ и $S^\varepsilon$.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу можно рассмотреть следующие задачи.

**Задача 1.** В области $D_\varepsilon$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = \tau_\varepsilon(x), \quad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x) \tag{13}$$

или

$$u_t|_{S^\varepsilon} = \nu_\varepsilon(x), \quad u|_{S_\varepsilon} = \sigma_\varepsilon(x). \tag{14}$$

**Задача 2.** В области $D_\varepsilon$ найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S^\varepsilon} = \tau_\varepsilon(x), \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x)$$

или

$$u_t|_{S^\varepsilon} = \nu_\varepsilon(x), \quad u|_{S_1} = \sigma_1(x).$$

Пусть далее $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций $n$, $1 \le k \le k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2m+m-2)$. Если $m = 2$, то $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система функций $\{\sin n\theta_1, \cos n\theta_1\}$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l = 0, 1, \ldots$ — пространства Соболева.

Справедлива следующая лемма [11].

**Лемма 1.** *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S^\varepsilon)$. *Если* $l \ge m-1$, *то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{15}$$

*а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка* $p \le l-m+1$, *сходятся абсолютно и равномерно, при этом* $f_n^k(r) = \int_\Gamma f(r,\theta) Y_{n,m}^k(\theta) d\Gamma$, *где* $\Gamma$ — *единичная сфера в* $E_m$.

**Лемма 2.** *Для того чтобы* $f(r,\theta) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда* (15) *удовлетворяли неравенствам*

$$\left|f_0^1(r)\right| \le c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{2l}\left|f_n^k(r)\right|^2 \le c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\tau_{\varepsilon n}^k(r)$, $\nu_{\varepsilon n}^k(r)$, $\sigma_{\varepsilon n}(r)$, $\tilde{a}_{in}^k(r,t)$ $\hat{a}_{in}^k(r,t)$, , $\tilde{b}_n^k(r,t)$, $f_{in}^k$, $g_{in}^k$, $\tilde{c}_n^k(r,t)$, $\rho_n^k$ обозначим коэффициенты разложения ряда (15) соответственно функций $\tau_\varepsilon(r,\theta)$, $\nu_\varepsilon(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta)$, $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i p_i \rho$, $b_i(r,\theta,t)\rho$, $p_i\rho$, $p_i^2\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $\rho$, $i = 1, \ldots, m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty\left(S^\varepsilon\right)$.

Сформулируем основные результаты.

**Теорема 1.** *Если* $a_i, b, c \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \ge m$, *то решение задач* 1 *и* 2 *единственно в классе функций* $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \ge m+1$.

Пусть $0 < k_1 < 4/3$ и $a_i, b, c \in W_2^l(D_\varepsilon) \cap C^1\left(\overline{D}_\varepsilon\right)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \ge m$.

Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если* $\tau_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon) \cap C^1\left(\overline{S}^\varepsilon\right)$, $\sigma_\varepsilon(x) \in W_2^l(S_\varepsilon) \cap C^1\left(\overline{S}_\varepsilon\right)$, $l \ge m+1$, $\nu_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $l \ge m$, *то задача* 1 *имеет единственное решение в классе* $C\left(\overline{D}_\varepsilon\right) \cap C^1\left(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon\right) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Пусть теперь $k_1 \ge 0$ и, кроме того, при $k_1 \ge 2$ выполняется условие

$$a_i(x,t) = O(1)\,t^\alpha, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \alpha > \frac{k_1}{2} - 1 \text{ в } \overline{D}_\varepsilon, \tag{16}$$

которое является многомерным аналогом "известного условия Геллерстедта" для двумерных вырождающихся гиперболических уравнений.

Тогда справедливы следующие теоремы.

**Теорема 3.** *Если* $a_i, b, c \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \ge m+1$, *и* $\tau_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $\sigma_\varepsilon(x) \in W_2^l(S_\varepsilon)$, $l \ge m+3$, *то задача* (1), (13) *однозначно разрешима в* $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \ge m+1$.

**Теорема 4.** *Пусть* $a_i, b \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \ge m+2$, $c \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \ge m+1$, *и* $\nu_\varepsilon(x) \in W_2^l(S^\varepsilon)$, $l \ge m$, $\sigma_\varepsilon(x) \in W_2^l(S_\varepsilon)$, $l \ge m+1$. *Тогда задача* (1), (14) *разрешима, причем единственным образом, если* $u \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \ge m+1$.

***Доказательство теоремы* 1.** Сначала докажем единственность решения задачи (1), (13). Так как $u \in W_2^l(D_\varepsilon), l \geq m+1$, то в силу леммы 1 она разложима в ряд

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} v_n^k(r,t)Y_{n,m}^k(\theta). \tag{17}$$

Подставив (17) в (1), в сферических координатах будем иметь

$$Lu \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} p_i^2 t^{k_i}\right)Y_{n,m}^k(\theta)v_{nrr}^k + \left[2\sum_{i=1}^{m} p_i t^{k_i}Y_{n-1,m}^k(\theta) - \right.\right.$$

$$\left. - n\sum_{i=1}^{m} p_i^2 t^{k_i}Y_{n,m}^k(\theta)\right]v_{nrr}^k + \left[\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}Y_{n-2,m}^k(\theta) - (2n-1)\sum_{i=1}^{m} p_i t^{k_i}Y_{n-1,m}^k(\theta) + \right.$$

$$\left. + n(n-1)\sum_{i=1}^{m} p_i^2 t^{k_i}Y_{n,m}^k(\theta)\right]v_n^k - Y_{n,m}^k(\theta)v_{ntt}^k + \sum_{i=1}^{m} p_i a_i Y_{n,m}^k(\theta)v_{nr}^k +$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m} a_i Y_{n-1,m}^k(\theta)v_n^k - n\sum_{i=1}^{m} p_i a_i Y_{n,m}^k(\theta)v_n^k + bY_{n,m}^k(\theta)v_{nt}^k + cY_{n,m}^k(\theta)v_n^k\right\} = 0. \tag{18}$$

Здесь мы использовали тот факт, что [11, 12]

$$Y_{-n,m}^k(\theta) \equiv 0,\ Y_{0,m}^1(\theta) = \text{const},\ \frac{\partial}{\partial x_i}Y_{n,m}^k(\theta) = \left.\frac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1} - np_i Y_{n,m}^k(\theta),$$

$Q_n^k(x) = r^n Y_{n,m}^k(\theta)$ — гармоническая функция от $x$, причем $\left.\dfrac{\partial Q_n^k}{\partial x_i}\right|_{r=1}$ — $m$-мерная сферическая функция $Y_{n-1,m}^k(\theta)$ порядка $n-1$.

При этом область $D_\varepsilon$ переходит в область $\Omega_\varepsilon$ с границами

$$\Gamma_\varepsilon: r = \int_0^t\left(\sum_{i=1}^{m}\xi^{k_i}p_i^2\right)^{1/2}d\xi + \varepsilon,$$

$$\Gamma_1: r = 1 - \int_0^t\left(\sum_{i=1}^{m}\xi^{k_i}p_i^2\right)^{1/2}d\xi,\quad \Gamma^\varepsilon: t = 0,\quad \varepsilon \leq r \leq 1.$$

Теперь полученное выражение (18) сначала умножим на $\rho(\theta) \neq 0$, а затем проинтегрируем по единичной сфере $\Gamma$. Тогда для определения функций $v_n^k(r,t)$ получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}g_{i0}^1 v_{0rr}^1 - \rho_0^1 v_{0tt}^1 = 0, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}g_{i1}^k v_{1rr}^k - \rho_1^k v_{1tt}^k = -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}\hat{a}_{i0}^1 v_{0r}^1 + \tilde{b}_0^1 v_{0t}^1 + \tilde{c}_0^1 v_0^1\right),\quad k = \overline{1, k_1}, \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}g_{in}^k v_{nrr}^k - \rho_n^k v_{ntt}^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{i=1}^{k_{n-1}}\left\{\left[\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}(2f_{in-2}^k - (n-1)g_{in-1}^k\right) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \hat{a}\,{}^{1}_{in-1}\Bigg]v^k_{n-1r} - \tilde{b}\,{}^k_{n-1}v^k_{n-1t} - \Bigg[\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}\Big(\rho^k_{n-3} - (2n-3)f^k_{in-2} +$$

$$+ (n-1)(n-2)\,g^k_{in-1}\Big) + \sum_{i=1}^{m}\Big(\tilde{a}^k_{in-2} - (n-1)\hat{a}\,{}^k_{in-1}\Big) + \tilde{c}\,{}^k_{in-1}\Bigg]v^k_{n-1}\Bigg\}, \tag{21}$$

$$k = \overline{1, k_1}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

В силу того, что $\tau_\varepsilon(x) \equiv 0$, $\sigma_\varepsilon(x) \equiv 0$, с учетом леммы 1 имеем

$$v^1_0(r,t)\Big|_{\Gamma^\varepsilon} \equiv 0, \quad v^1_0(r,t)\Big|_{\Gamma_\varepsilon} \equiv 0, \tag{22}$$

$$v^k_n(r,t)\Big|_{\Gamma^\varepsilon} \equiv 0, \quad v^k_n(r,t)\Big|_{\Gamma_\varepsilon} \equiv 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{23}$$

Таким образом, задача (1), (13) сведена к системе однородных задач Дарбу для вырождающихся гиперболических уравнений (19), (20), (21). Решив сначала задачу (19), (22), а затем (20), (23) $(n = 1)$ и (21), (23) $(n = 2, 3, \ldots)$ [2], убедимся в том, что все $v^k_n(r,t) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$ . Тогда из (17) будет вытекать $u(r, \theta, t) \equiv 0$. Единственность решения остальных задач доказывается аналогично. Теорема 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 3.** Единственность решения задачи (1), (13) доказана в теореме 1. Докажем его существование. Для этого искомое решение будем строить в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \overline{u}\,{}^k_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} v^k_n(r,t)Y^k_{n,m}(\theta), \tag{24}$$

при этом $L\overline{u}\,{}^k_n = 0$, а функции $v^k_n(r,t)$ в области $\Omega_\varepsilon$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i} g^1_{i0}v^1_{0rr} - \rho^1_0 v^1_{0tt} + \sum_{i=1}^{m} \hat{a}\,{}^1_{i0}v^1_{0r} + \tilde{b}\,{}^1_0 v^1_{0r} + \tilde{c}\,{}^1_0 v^1_0 = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{i=1}^{m} t^{k_i} g^k_{in}v^k_{nrr} - \rho^k_n v^k_{ntt} + \Bigg[\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}\big(2f_{in-1} - ng^k_{in}\big) + \sum_{i=1}^{m}\hat{a}\,{}^k_{in}\Bigg]v^k_{nr} + \tilde{b}\,{}^k_n v^k_{nt} +$$

$$+ \Bigg[\sum_{i=1}^{m} t^{k_i}\Big(\rho^k_{n-2} - (2n-1)f^k_{in-1} + n(n-1)g^k_{in}\Big) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m}\Big(\tilde{a}\,{}^k_{in-1} - n\hat{a}\,{}^k_{in}\Big) + \tilde{c}\,{}^k_{in}\Bigg]v^k_n = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

и краевым условиям

$$v^1_0\Big|_{\Gamma^\varepsilon} = \tau^1_{\varepsilon 0}(r), \quad v^1_0\Big|_{\Gamma_\varepsilon} = \sigma^1_{\varepsilon 0}(r), \quad \varepsilon \le r \le 1, \tag{27}$$

$$v^k_n\Big|_{\Gamma^\varepsilon} = \tau^k_{\varepsilon n}(r), \quad v^k_n\Big|_{\Gamma_\varepsilon} = \sigma^k_{\varepsilon n}(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{28}$$

Нетрудно заметить, что каждое из уравнений (25), (26) можно представить в виде

$$t^{k_1} g(t)v_{rr} - v_{tt} + a(r,t)v_r + b(r,t)v_t + c(r,t)v = 0,$$

$g(t) > 0$ при $t \ge 0$, которое с помощью неособенного действительного преобразования независимых переменных сводится к уравнению [3]

$$\eta^{k_1}\omega_{\xi\xi} - \omega_{\eta\eta} + \tilde{a}(\xi,\eta)\omega_\xi + \tilde{b}(\xi,\eta)\omega_\eta + \tilde{c}(\xi,\eta)\omega = 0, \tag{29}$$

при этом если $a(r,t) = O(1)t^\alpha$, то и $\tilde{a}(\xi,\eta) = O(1)\eta^\alpha = O(1)t^\alpha$.

Далее, из условия (16) следует

$$\hat{a}^k_{in}(r,t) = O(1)t^\alpha, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \alpha > \frac{k_1}{2} - 1 \tag{30}$$

в $\overline{\Omega}_\varepsilon$ т. е. выполняются условия Геллерстедта для коэффициентов уравнений (25), (26). В [2] установлено, что при выполнении условия (30) задачи (25), (27) и (26), (28) однозначно разрешимы.

В силу линейности оператора $L$ следует $Lu = 0$, а из леммы 1 и ортогональности систем функций $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ [11] получим, что функция (24) удовлетворяет краевому условию (13).

Таким образом, решение задачи(1), (13) построено.

Учитывая ограничения на функции $\tau_\varepsilon(x)$, $\sigma_\varepsilon(x)$, $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, и лемму 2, из [2] имеем неравенства

$$\left|\frac{\partial^j v^k_n}{\partial r^j}\right| \le c_1 n^{-l}, \quad \left|\frac{\partial^j v^k_n}{\partial t^j}\right| \le c_2 n^{-l}, \quad j = 0, 1, 2, \quad l \ge m+1. \tag{31}$$

Из (31), а также из оценок [11, 12]

$$k_n \le c_1 n^{m-2}, \quad \left|\frac{\partial^p}{\partial \theta^p_j} Y^k_{n,m}(\theta)\right| \le c_2 n^{\frac{m}{2}-1+p}, \quad i = 1, \dots, m-1, \tag{32}$$

следует, что полученное решение $u(r,\theta,t)$ в виде (24) принадлежит классу $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$,. более того, в силу (31) и леммы 2 $u \in W^l_2(D_\varepsilon)$, $l \ge m+1$. Теорема 3 установлена.

***Доказательство теоремы* 4.** Однородная задача, соответствующая задаче (1), (14), сводится к двумерным задачам Дарбу для уравнений (19) – (21) с данными

$$v^k_{nt}\big|_{\Gamma^\varepsilon} \equiv 0, \quad v^k_n\big|_{\Gamma_\varepsilon} \equiv 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

которые имеют только тривиальные решения $v^k_n(r,t) \equiv 0$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \dots$, [1]. Тогда из (17) получим $u(r,\theta,t) \equiv 0$.

Для доказательства существования решения задачи(1), (14) будем искать его в виде ряда (24), где $L\overline{u}^k_n = 0$, а функции $v^k_n(r,t)$ удовлетворяют в области $\Omega_\varepsilon$ уравнениям (25), (26) и краевым условиям

$$v^1_{0t}\big|_{\Gamma^\varepsilon} = \nu^1_{\varepsilon 0}(r), \quad v^1_0\big|_{\Gamma_\varepsilon} = \sigma^1_{\varepsilon 0}(r), \quad \varepsilon \le r \le 1, \tag{33}$$

$$v^k_{nt}\big|_{\Gamma^\varepsilon} = \nu^k_{\varepsilon n}(r), \quad v^k_n\big|_{\Gamma_\varepsilon} = \sigma^k_{\varepsilon n}(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{34}$$

В силу того, что уравнения (25) и (26) сводятся к уравнению вида (29), при выполнении условий (30) задачи (25), (33) и (26), (34) имеют единственные решения [1]. Представления решений этих задач с учетом ограничений на функции $\nu_\varepsilon(x)$, $\sigma_\varepsilon(x)$ и на коэффициенты уравнения (1), а также леммы 2 позволяют получить оценки

$$\left|\frac{\partial^j v^k_n}{\partial r^j}\right| \le c_1 n^{-2l}, \quad \left|\frac{\partial^j v^k_n}{\partial t^j}\right| \le c_2 n^{-2l}, \quad j = 0, 1, 2, \quad l \ge m.$$

Теперь нетрудно установить, что функция (24) удовлетворяет уравнению (1), краевому условию (14) и принадлежит классу $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l \geq m+1$. Следовательно, теорема 4 доказана.

Теперь перейдем к теореме 2. Сначала рассмотрим задачу (1), (13). Так как искомое решение принадлежит классу $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$, то ее можно искать в виде ряда (17). Тогда функции $v_n^k(r,t)$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, будут удовлетворять условиям (19) – (21). Задачи (19), (27), (20), (28) $(n = 1)$ и (21), (28) $(n == 2, 3, \ldots)$ имеют единственные решения (см. [4]), при этом нетрудно получить неравенства

$$\left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial r^j}\right| \leq c_1 q^{n+1} n^{-2l},$$

$$\left|\frac{\partial^j v_n^k}{\partial t^j}\right| \leq c_2 q^{n+1} n^{-2l}, \quad j = 0, 1, 2, \quad q = \text{const} < 1, \quad l \geq m. \tag{35}$$

Из оценок (35), (32) вытекает, что полученное решение в виде (17) задачи (1), (13) принадлежит классу $C(\overline{D}_\varepsilon) \cap C^1(D_\varepsilon \cup S^\varepsilon) \cap C^2(D_\varepsilon)$.

Что касается задачи (1), (14), то она сводится к однозначно разрешимым задачам (19), (33), (20), (34) $(n = 1)$ и (21), (34) $(n = 2, 3, \ldots)$ (см. [4]), для которых нетрудно установить оценку вида (35).

Следовательно, задача(1), (14) также имеет единственное решение (17) и в силу (35), (32) принадлежит искомому классу. Таким образом, теорема 2 также доказана.

В заключение отметим, что рассматриваемые задачи для уравнения (1) при $k_i = k \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, исследованы в [13].


1. *Gellerstedt S.* Sur une equation lineare aux derivees partielles de type mixte // Ark. math., astron. och. fys. – 1937. – **25A**, № 29. – P. 1–25.
2. *Protter M. H.* On partiel differential equations of mixed type // Proc. Conf. Different. Equations. Univ. Maryland book store College Park. – 1956. – P. 91–106.
3. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
4. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся гиперболические уравнения.– Минск: Вышэйш. шк., 1977. – 158 с.
5. *Protter M. H.* New boundary value problems for the wave equation and equation of mixed type // J. Rat. Mech. and Anal. – 1954. – **3**, № 4. – P. 435 – 446.
6. *Диденко В. П.* Краевые задачи для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа: Дис... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1974. – 254 с.
7. *Каратопраклиев Г. Д.* О единственности решения некоторых задач для уравнений смешанного типа и гиперболических уравнений в пространстве // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 1. – С 59–63.
8. *Popivanov N. J., Schneider M.* The Darboux-problem in $R^3$ for a class of degenerated hyperbolic equation // Докл. Болг. Академии наук. – 1988. – **41**, № 11. – С 7 – 9.
9. *Алдашев С. А.* Некоторые краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа: Дис... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1990 – 188с.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 4-х т. – М.: Наука, 1981.– **4**, ч. 2. – 550 с.
11. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.– М.: Физматгиз, 1962.– 254 с.
12. *Calderon A. P., Zygmund A.* Singular integral operators and differential equations // Amer. J. Math. – 1957. – **79**, № 4. – P. 901–921.
13. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических уравнений // Нелинейн. задачи мат. физики со свободной границей: Тез. докл. VIII респ. конф. – Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, 1991. – С. 6.


Получено 10.04.92