УДК 517.5

И. Б. Ковальская

Оценки верхних граней уклонений в метрике пространства L_p

В работе [1] введены классы периодических функций следующим образом. Пусть $f(x)$ — суммируемая 2π-периодическая функция и $S[f] = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f, x)$ — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ и $\overline{\beta}(k)$ — произвольные фиксированные функции натурального аргумента. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\psi(k))^{-1} (a_k(f)\cos(kx + \overline{\beta}(k)\pi/2) + b_k(f) \times \sin(kx + \overline{\beta}(k)\pi/2))$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции. Эту функцию обозначим через $f_{\overline{\beta}}^{\psi}(x)$ и назовем $(\psi; \overline{\beta})$-производной функции $f(x)$, а множество функций $f(x)$, удовлетворяющих таким условиям, обозначим через $L_{\overline{\beta}}^{\psi}$.

Пусть еще $\mathfrak{R}$ — некоторый класс суммируемых 2π-периодических функций. Тогда если $f \in L_{\overline{\beta}}^{\psi}$ и, кроме того, $f_{\overline{\beta}}^{\psi} \in \mathfrak{R}$, то будем говорить, что функция $f(x)$ принадлежит классу $L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{R}$.

В качестве классов $\mathfrak{R}$ будем рассматривать множества S_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 2π-периодических функций, для которых $\|\varphi\|_p = \left\{\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^p dt\right\}^{1/p} \leqslant 1$ при $1 \leqslant p < \infty$ и $\|\varphi\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup} |\varphi(t)| \leqslant 1$. При этом полагаем $L_{\overline{\beta}}^{\psi} S_p = L_{\overline{\beta},p}^{\psi}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Пусть, далее, $\Lambda = \{\lambda_r(k)\}$ — совокупность функций, зависящих от $k = 1, 2, \ldots$ и от параметра r, изменяющегося на некотором множестве $E_\Lambda \subseteq R$. Заметим, что в частном случае, когда $r = n \in N$, числа $\lambda_r(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \lambda_k^{(n)}$ являются элементами прямоугольной числовой матрицы $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $n, k = 1, 2, 3, \ldots$.

С помощью множества Λ каждой функции $f \in L_{\overline{\beta},p}^{\psi}$ поставим в соответствие ряд

$$a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_r(k)(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \tag{1}$$

где r — любое фиксированное число из E_Λ.

Пусть множество Λ таково, что ряд (1) при каждом $r \in E_\Lambda$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции, которую обозначим через $U_r(f, x, \Lambda)$.

Рассмотрим величины уклонений $\|\delta_r(f; x)\|_s = \|f(x) - U_r(f, x, \Lambda)\|_s$ для функций из классов $L_{\overline{\beta},p}^{\psi}$ и их верхние грани на классах $L_{\overline{\beta},p}^{\psi}$:

$$\mathcal{E}_r(L_{\overline{\beta},p}^{\psi})_s = \sup_{f \in L_{\overline{\beta},p}^{\psi}} \|\delta_r(f, x)\|_s.$$

Для случая $r = n \in N$ $\lambda_r(k) = \lambda_k^{(n)} = 1$ при $k \leqslant n$ и $\lambda_k^{(n)} = 0$ при $k > n$, т. е. когда приближение осуществляется суммами Фурье, точные порядковые оценки таких величин в метрике пространства L_s, $1 < s < \infty$, на классах $L_{\overline{\beta},p}^{\psi}$ получены в [2].

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\psi(k)$ и $\overline{\beta}(k)$ — произвольные функции, $k \in N$, причем $|(1 - \lambda_r(k))\psi(k)| \leqslant K$, где $K = \mathrm{const}$, а $\lambda_r(k)$ — функции, зависящие* *от k и от параметра r, $k \in N$, $r \in E_\Lambda$. Тогда $\forall r \in E_\Lambda \mathscr{E}_r (L^{\psi}_{\bar\beta,2})_2 = \nu^*(r)$, где* $\nu^*(r) = \sup\limits_k |(1-\lambda_r(k))\psi(k)|$.

Доказательство этой и следующих теорем проводится согласно схеме, предложенной А. И. Степанцом и А. К. Кушпелем [2]. При доказательстве используются теоремы Марцинкевича [3] и Рисса [4].

Рассмотрим далее множество $P^{(r)}$ пар $(\psi; \beta)$, для которых справедливы неравенства

$$\sup_{m\in N}\sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi(k+1)(1-\lambda_r(k+1))\cos(\bar\beta(k+1)\pi/2+\gamma) - \psi(k)\times$$
$$\times(1-\lambda_r(k))\cos(\bar\beta(k)\pi/2+\gamma)| \leqslant C\nu^*(r)$$

$\forall r \in E_\Lambda$, $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi/2$, C — постоянная, не зависящая от r.

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $1 < s \leqslant p < \infty$, $(\psi; \bar\beta) \in P^{(r)}$. Тогда найдутся постоянные $C^{(1)}_{p,s}$ и $C^{(2)}_{p,s}$, для которых при всех $r \in E_\Lambda$ выполняются неравенства $C^{(2)}_{p,s}\nu^*(r) \leqslant \mathscr{E}_r(L^{\psi}_{\bar\beta,p})_s \leqslant C^{(1)}_{p,s}\nu^*(r)$. При этом $C^{(1)}_{p,s}$* и *$C^{(2)}_{p,s}$ зависят только от p и s.*

Для случая, когда $\Lambda = \{\lambda^{(n)}_k\}$ — треугольная матрица и $\lambda^{(n)}_k = 1$ при $k \leqslant n$, $\lambda^{(n)}_k = 0$ при $k > n$, теоремы 1 и 2 переходят соответственно в теоремы 1.1 и 2.2 из [2].

Получим далее порядковые оценки величины $\|\delta_r(f,x)\|_s$ для $f \in L^{\psi}_{\bar\beta,p}$, когда $1 < p < s < \infty$, а пары $(\psi; \bar\beta) \in P'^{(r)}_\alpha$ такие, что

$$\bar\nu(r) = \max\{\sup_k |\psi(k)(1-\lambda_r(k))|k^\alpha, \sup_{m\in N}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}}|\psi(k+1)\times$$
$$\times(1-\lambda_r(k+1))(k+1)^\alpha\cos(\bar\beta(k+1)\pi/2+\gamma) - \psi(k)(1-\lambda_r(k))k^\alpha\times$$
$$\times\cos(\bar\beta(k)\pi/2+\gamma)|\} \leqslant C, \tag{2}$$

где C — постоянная, не зависящая от r, $\alpha = 1/p - 1/s$, $\gamma = 0$ или $\gamma = \pi/2$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $1 < p < s < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/s$ и для $(\psi; \bar\beta)$ выполняется соотношение* (2). *Тогда если $f \in L^{\psi}_{\bar\beta}L_p$, то $\forall r \in E_\Lambda \|\delta_r(f;x)\|_s \leqslant \leqslant C_{p,s}\bar\nu(r)$, где $C_{p,s}$ — постоянная, не зависящая ни от r, ни от f.*

Из теоремы 3 следует такая теорема.

Теорема 4. *Пусть $1 < p < s < \infty$, $\alpha = 1/p - 1/s$ и для пар $(\psi; \bar\beta)$ выполняется соотношение* (2). *Тогда $\forall r \in E_\Lambda$*

$$\mathscr{E}_r(L^{\psi}_{\bar\beta,p})_s = \sup_{f\in L^{\psi}_{\bar\beta,p}}\|\delta_r(f,x)\|_s \leqslant C_{p,s}\bar\nu(r), \tag{3}$$

где $C_{p,s}$ — постоянная, зависящая только от p и s.

Теперь выделим множество пар $(\psi; \bar\beta)$, для которых оценки (3) будут точны по порядку для любого $\alpha > 0$. Это множество обозначим через P_K и к нему отнесем любую пару $(\psi; \bar\beta)$, если $\forall r \in E_\Lambda$ существуют номер $l \in N$ и постоянная $K > 0$, не зависящая от r, такие, что

$$\bar\nu(r)/|\psi(l)(1-\lambda_r(l)| \leqslant K. \tag{4}$$

Здесь $\bar\nu(r)$ определяется соотношением (2).

Пусть $(\varphi; \bar\beta) \in P^{(r)}_\alpha \cap P_K$. Покажем, что в этом случае $\forall r \in E$ в классе $L^{\psi}_{\bar\beta,p}$ найдется функция $f^*_r(\cdot)$, для которой $\|\delta_r(f^*_r,\cdot)\|_s \geqslant C_{p,s}\bar\nu(r)$. С этой целью при фиксированном $r \in E_\Lambda$ рассмотрим функцию $f_r(t) = \bar\nu(r)\sin(lt - \bar\beta(l,\pi/2)/(1-\lambda_r(l))$ и найдем ее $(\psi; \bar\beta)$-производную: $(f_r(t))^{\psi}_{\bar\beta} = \bar\nu(r)\sin lt/$

$/\psi(l)(1-\lambda_r(l))$. В силу условия (4) заключаем, что

$$\|(f_r(t))_{\bar\beta}^{\psi}\|_p = |\bar\nu(r)/\psi(l)(1-\lambda_r(l))|\,\|\sin lt\|_p \leqslant K\|\sin lt\|_p.$$

Отсюда следует, что функция $f_r^*(t) = (Ka(1-\lambda_r(l)))^{-1}\bar\nu(r)\sin(lt - \bar\beta(l)\times \times \pi/2)$, где $a = \|\sin t\|_p$, а K — то же, что и в (4), принадлежит классу $L_{\rho,p}^{\psi}$. Тогда $(f_r^*(t))_{\bar\beta}^{\psi}\in S_p$ и вследствие неравенства Гельдера

$$\|f_{r\bar\beta}^{*\psi}\|_s = \Big(\int_{-\pi}^{\pi}|(f_r^*(t))_{\bar\beta}^{\psi}|^s dt\Big)^{1/s} \leqslant (2\pi)^{(p-s)/ps}\Big(\int_{-\pi}^{\pi}|(f_r^*(t))_{\bar\beta}^{\psi}|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^{(p-s)/ps}\|f_{r\bar\beta}^{*\psi}\|_p \leqslant (2\pi)^{(p-s)/ps}.$$

Поэтому

$$\mathscr{E}_r(L_{\bar\beta,p}^{\psi})_s \geqslant \|\delta_r(f_r^*;x)\|_s = \|(1-\lambda_r(k))f_r^*(x)\|_s = (1-\lambda_r(l))(Ka(1-$$

$$-\lambda_r(l)))^{-1}\bar\nu(r)\|\sin(lt-\bar\beta(l)\pi/2)\|_s = C_{p,s}\bar\nu(r).$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $1<p<s<\infty$, $\alpha = 1/p - 1/s$ *и* $(\psi;\bar\beta)\in P_\alpha^{(r)}\cap P_k$. *Тогда* $\forall r\in E_\Lambda$ $C_{p,s}^{(2)}\bar\nu(r) \leqslant \mathscr{E}_r(L_{\bar\beta,p}^{\psi})_s \leqslant C_{p,s}^{(1)}\bar\nu(r)$, *где* $C_{p,s}^{(1)}$ и $C_{p,s}^{(2)}$ — *положительные постоянные, зависящие лишь от* p *и* s.

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 83.69).
2. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 44 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.15).
3. *Marcinkievicz J.* Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Studia Math.— 1939.— N 8.— P. 78—91.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 15.09.86

УДК 519.41/47

Н. С. Черников

Факторизации групп автоморфизмов конечнопорожденного модуля над коммутативным кольцом

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп, изоморфно представимых автоморфизмами тех или иных конечнопорожденных унитальных модулей над коммутативно-ассоциативными кольцами с единицей. Этот класс достаточно широк. Очевидно, произвольная группа матриц над любым коммутативно-ассоциативным кольцом с единицей принадлежит $\mathfrak{X}$. В частности, $\mathfrak{X}$ включает в себя все линейные группы. В настоящей статье приведены три теоремы, связанные с факторизациями группы $G\in\mathfrak{X}$ попарно перестановочными подгруппами с теми или иными свойствами.

Теорема 1. *Группа* $G\in\mathfrak{X}$ *гиперабелева и локально конечна, если выполняется хотя бы одно из следующих условий:* 1) G *разложима в произведение некоторых попарно перестановочных периодических локально нильпотентных подгрупп* A_ι, $\iota\in I$; 2) G *разложима в произведение некоторых попарно перестановочных примарных подгрупп* A_ι, $\iota\in I$; 3) *для каждого простого* p *найдется* p*-подгруппа группы* G, *обладающая* p'*-дополнением в ней. Если группа* G *локально конечна и гиперабелева (или даже локально конечна и двуступенно разрешима), то для нее может не выполняться ни одно из условий* 1—3.