где A^{γ} — производная по Гато функционала φ^{γ}, F_{h1} и F_{h2} — максимальные монотонные операторы, $r(P, Q)$ — хаусдорфово расстояние между множествами P и Q пространства Y, содержащего P и Q. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Для каждого $\alpha > 0$, $hi > 0$, $\gamma > 0$ и $\delta \geqslant 0$ регуляризованное уравнение*

$$x + F^{\mu}_{h2\alpha} F^{\mu\gamma}_{h1\alpha}(x) = f_{\delta},$$

где $F^{\mu\gamma}_{h1\alpha}(x) = F_{h1}(x) + \alpha(A^{\gamma}(x) + \mu U(x))$ *и* $F^{\mu}_{h2\alpha}(x^*) = F_{h1}(x^*) + \alpha\mu V(x^*)$, *имеет единственное решение* $x^{h\gamma}_{\alpha\mu}$. *При условии* $hi/\alpha \to 0$, $\delta/\alpha \to 0$ *при* $\alpha \to 0$ *и* $\gamma/\mu \to 0$ *при* $\mu \to 0$ $x^{h\gamma}_{\alpha\mu}$ *сходится к* x_0.

Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 2 и основных результатов из [4].

1. *Sibony M.* Sur l'approximation d'équation et inéquation aux dérivees partielles nonlineares de type monotones // J. Math. Anal. Appl.— 1971.— **34**.— P. 502—564.
2. *Kluge R.* Approximation method for nonlinear problem with constrains in form of variations inequalities // Proc. of the Conference on Mathematical quetions of optimal control held at Zakopene, Poland 7—13.1. 1974. Banach center Publication.— 1976.— **1**.— P. 131—138.
3. *Bruckner G.* On the speed of c—sequence in conection with a lemma of Toeplith. Nonlinear analysis. Theory and application. Proc. of the seveth intern. summer school. Academ. Verlage, Berlin 1981, n 2, 53—64.
4. *Рязанцева И. П.* Операторный метод регуляризации для некорректных задач оптимального планирования с монотонными отображениями // Сиб. мат. журн.— 1983.— **4**, № 6.— С. 214.
5. *Конягин С. В.* Об аппроксимативных свойствах замкнутых множеств в банаховых пространствах и характеризации сильно выпуклых пространств // Докл. АН СССР.— 1980.— **251**, № 2.— С. 276—280.
6. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
7. *Browder E. F.* nNonlinear maximal monotone operators in Banach spaces // Math. Annal.— 1968.— **2**.— P. 89—113.
8. *Rockafellar R. T.* On the maximality of sums of nonlinear monotones operators // Trans. AMS.— 1970.— **149**.— P. 75—88.

Вьетнам

Получено 01.04.86,
после доработки — 15.12.86

УДК 517.922

Л. Г. Просенюк

Существование и асимптотика O-решений дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$b\,(dx/dt)^n - x + at^{\alpha} + x^n F(t, x, dx/dt) = 0, \tag{1}$$

где x — неизвестная функция переменной t, a, b, α, n — постоянные, $ab \neq 0$, $\alpha > 2$, $n > 2$ — целое, функция F непрерывна в окрестности точки $O\,(0, 0, 0)$ и имеет там непрерывную частную производную по dx/dt.

В статье изучается вопрос о существовании и асимптотических свойствах решений уравнения (1) таких, что $x \to 0$, $dx/dt \to 0$, когда $t \to +0$.

Подобные вопросы для различных уравнений, не разрешенных относительно производной, исследовались и в [1—3]. Отличие данной работы состоит в том, что в ней рассмотрено не изучавшееся уравнеиие, для которого выясняется не только асимптотика решений, но и асимптотика их производной.

Сформулируем и докажем полученные результаты.

Теорема. *Пусть* $ba^{n-1}<0$, *а* $\varepsilon>0$ — *произвольное сколь угодно малое число. Тогда уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно решение* $x(t)$ *такое, что*

$$x(t)=at^{\alpha}+b(a\alpha)^{n}t^{(\alpha-1)n}+o(t^{(\alpha-1)n+\varepsilon}), \tag{2}$$

$$dx(t)/dt=a\alpha t^{\alpha-1}+o(t^{\alpha-1+\varepsilon}),\ t\to+0. \tag{3}$$

Если же $ba^{n-1}>0$, *таких решений у уравнения* (1) *континуум.*

Доказательство. Зафиксируем произвольно число $0<\varepsilon<1$. В уравнении (1) переменные x и dx/dt заменим на новые y_1 и y_2 по формулам

$$x=at^{\alpha}+b(a\alpha)^{n}t^{(\alpha-1)n}+t^{(\alpha-1)n+\varepsilon}y_1, \tag{4}$$

$$dx/dt=a\alpha t^{\alpha-1}+t^{\alpha-1+\varepsilon}y_2. \tag{5}$$

Обозначим

$$\Phi(t,y_1,y_2)=b\sum_{k=2}^{n}C_n^k(a\alpha)^{n-k}y_2^kt^{(k-2)\varepsilon}+t^{n-2\varepsilon}(a+b(a\alpha)^nt^{(\alpha-1)n-\alpha}+$$

$$+t^{(\alpha-1)n-\alpha+\varepsilon}y_1)^n\cdot F(t,at^{\alpha}+b(a\alpha)^nt^{(\alpha-1)n}+t^{(\alpha-1)n+\varepsilon}y_1,\ a\alpha t^{\alpha-1}+t^{\alpha-1+\varepsilon}y_2).$$

Нетрудно убедиться, что функция Φ непрерывна в некоторой окрестности $t\geqslant 0$, $y_1^2+y_2^2<r^2$, $r=\mathrm{const}$, и имеет там непрерывную частную производную по y_2.

После замены (4), (5) равенство (1) примет вид

$$y_1=bn(a\alpha)^{n-1}y_2+t^{\varepsilon}\Phi(t,y_1,y_2). \tag{6}$$

Последнее, очевидно, определяет в окрестности $0\leqslant t\leqslant\delta$, $|y_1|\leqslant\delta_1$ (δ и δ_1 — постоянные) непрерывную неявную функцию $y_2(t,y_1)$ такую, что $y_2(0,0)=0$. Представим ее в виде

$$y_2(t,y_1)=(bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n}y_1+f(t,y_1) \tag{7}$$

и отметим некоторые свойства f. Так, подставляя (7) в (6), получаем $f(t,y_1)\equiv-(bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n}\,t^{\varepsilon}\Phi(t,y_1,y_2(t,\ y_1))$. Отсюда с учетом свойств $y_2(t,y_1)$, указанных выше, вытекает соотношение

$$f(t,y_1)=O(t^{\varepsilon})\quad\text{при } t\to 0,\ |y_1|\leqslant\delta_1. \tag{8}$$

Теперь вычислим производную правой части (4), считая там y_1 функцией от t, и результат приравняем к правой части (5), где вместо y_2 подставим (7). Получим дифференциальное уравнение

$$t^{m+1}\frac{dy_1}{dt}=[(bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n}-((\alpha-1)n+\varepsilon)t^m]\,y_1-b(a\alpha)^n(\alpha-1)nt^{m-\varepsilon}+$$

$$+f(t,y_1),\quad m=(\alpha-1)(n-1)-1. \tag{9}$$

Изучим это уравнение качественным методом.

Введем функцию $u(t,y_1)=y_1^2-t^{2\varepsilon_1}$, $0<\varepsilon_1<\min(\varepsilon,m-\varepsilon)$ и рассмотрим порождаемую ею область $U=[(t,y_1)\colon 0<t<\delta,\ u(t,y_1)<0]$. Вычислим производную вдоль траекторий уравнения (9) от функции $u(t,y_1)$. Имеем

$$du/dt=2t^{-m-1}\{[(bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n}-((\alpha-1)n+\varepsilon)t^m]\,y_1^2-$$

$$-b(a\alpha)^n(\alpha-1)ny_1t^{m-\varepsilon}+y_1f(t,y_1)-\varepsilon_1t^{2\varepsilon_1+m}\}.$$

Оценим знак du/dt на множестве $U_1=[(t,y_1):0<t<\delta,\ u(t,y_1)=0]$. Ясно, что выражение в квадратных скобках при малом δ строго отрицательно, если $ba^{n-1}<0$ и положительно, если $ba^{n-1}>0$. Остальные слагаемые на рассматриваемом множестве при $t \to +0$ имеют более высокий порядок малости, чем $t^{2\varepsilon_1}$. Таким образом, можно изначально считать δ малым настолько, что $du/dt < 0$, если $ba^{n-1} < 0$ и $du/dt > 0$, если $ba^{n-1} > 0$, $(t, y_1) \in U_1$. Тогда, как известно [4], в первом случае будет существовать хотя бы одно решение уравнения (9), лежащее при $0 < t < \delta$ в области U, а во втором таких решений будет континуум. Возьмем одно из этих решений и подставим в правую часть (4) и в правую часть (5), где вместо y_2 стоит найденная ранее неявная функция $y_2(t, y_1)$. Очевидно при этом (4) даст нам решение уравнения (1), а (5) — его производную. В случае $ba^{n-1} < 0$ имеем по крайней мере одно решение с требуемым свойством, а в случае $ba^{n-1} > 0$ — континуум решений. Отсюда следует справедливость и представлений (2), (3).

Изучим вопрос о количестве таких решений в случае $ba^{n-1} < 0$.

Т е о р е м а. *Пусть $ba^{n-1} < 0$ и функция F в окрестности точки O имеет непрерывную частную производную по x. Тогда существует единственное решение уравнения* (1) *с начальным условием* $x(0) = 0$, *обладающее при этом асимптотикой* (2), (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно определить, что теорема будет доказана, если мы убедимся в существовании единственного решения уравнения (9), стремящегося к нулю при $t \to +0$.

Пусть (t, y_1) и $(t, \bar{y}_1)$ — точки замкнутой области, в которой функция $f(t, y_1)$ непрерывна. Принимая во внимание ограничения на F, легко установить неравенство

$$|f(t, y_1) - f(t, \bar{y}_1)| \equiv |(bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n} t^{\varepsilon} \cdot [\Phi(t, y_1, y_2(t, y_1)) -$$

$$-\Phi(t, \bar{y}_1, y_2(t, \bar{y}_1))]| < L_1 t^{\varepsilon}(|y_1 - \bar{y}_1| + |y_2(t, y_1) - y_2(t, \bar{y}_1)|) <$$

$$< L_1 t^{\varepsilon}(|y_1 - \bar{y}_1| + L_2|y_1 - \bar{y}_1|) = Lt^{\varepsilon}|y_1 - \bar{y}_1|, \quad L_1, L_2, L - \text{const}. \tag{10}$$

Если $ba^{n-1} < 0$, то как доказано, существует по крайней мере одно решение $y_1^0(t)$ уравнения (9) со свойством: $|y_1^0(t)| < t^{\varepsilon_1}$, $0 < t < \delta$. Допустим, есть еще одно решение $\bar{y}_1(t)$ уравнения (9), которое стремится к нулю при $t \to +0$. Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $v(t, y_1, \gamma) = (y_1 - y_1^0(t))^2 - \gamma t^{-\varepsilon}$, $0 < t < \delta$, $\gamma > 0$ — параметр и семейство областей $V(\gamma) = V_1 \cap V_2(\gamma)$, где $V_1 = [(t, y_1)\colon 0 < t < \delta,\ |y_1| < \delta_1]$, $V_2(\gamma) = [(t, y_1)\colon 0 < t < \delta,\ v(t, y_1, \gamma) < 0]$. Найдем производную вдоль траекторий уравнения (9) от функции $v(t, y_1, \gamma)$. Так

$$dv/dt = 2t^{-m-1}\Big[((bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n} - ((\alpha - 1)n + \varepsilon)t^m)(y_1 - y_1^0(t))^2 +$$

$$+ (f(t, y_1) - f(t, y_1^0(t)))(y_1 - y_1^0(t)) + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon t^{m-\varepsilon}\Big].$$

Обозначим через $\Omega(\gamma)$ часть границы области $V(\gamma)$, где $v(t, y_1, \gamma) = 0$. На этом множестве, ввиду (10), справедлива оценка

$$dv/dt \leqslant 2\gamma t^{-m-1}\Big[((bn)^{-1}(a\alpha)^{1-n} - ((\alpha-1)n + \varepsilon)t^m)t^{-\varepsilon} + L + \frac{1}{2}\varepsilon t^{m-\varepsilon}\Big].$$

Выражение в квадратных скобках при малом δ строго отрицательно. Следовательно, независимо от величины $\gamma > 0$ на $\Omega(\gamma)$ справедливо неравенство $dv/dt < 0$. Стало быть, все точки $\Omega(\gamma)$ — суть точки строгого входа. Выберем далее γ_0 так, чтобы точка $(\delta, \bar{y}_1(\delta))$ не принадлежала области $V(\gamma_0)$. При убывании t решение $\bar{y}_1(t)$ должно войти в область $V(\gamma_0)$, пройдя точку множества $\Omega(\gamma_0)$. Значит среди точек множества $\Omega(\gamma_0)$ есть точка выхода, что противоречит установленному выше факту. Поэтому неверно допущение о том, что уравнение (9) имеет более одного решения, стремящегося к нулю при $t \to +0$. Теорема доказана.

1. *Запорожец Г. И.* Исследование однородного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Диф. уравнения.— 1965.— **1**, № 5.— С. 567—581.
2. *Ricceri B.* Solutions lipschitziennez différentielles sous forme implicite // C. r. Acad. Sci. Sér. 1.— 1982.— **295**, N 3.— P. 245—248.
3. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика.— 1971.— № 9.— С. 79—84.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Одес. инж.-строит. ин-т

Получено 08.05.85,
после доработки — 06.11.85

УДК 517.512

К. М. Слепенчук

Теорема тауберова типа на случай суммирования двойных рядов методом Бореля

Если

$$\varphi(x, y) = e^{-x}e^{-y} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{x^k y^l}{k!\,l!} S_{kl} \to S, \quad x, y \to \infty, \tag{1}$$

то говорят, что последовательность $\{S_{kl}\}$ B-суммируема к S.

В настоящей статье устанавливается одна теорема тауберова типа для B-метода суммирования двойных рядов.

Введем обозначения: $\Delta\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k-1\,l} - \alpha_{k\,l-1} + \alpha_{k-1\,l-1}$, $\bar{\Delta}_k\alpha_{kl} = \alpha_{k+1\,l} - \alpha_{kl}$, $\bar{\Delta}_l\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k\,l+1}$, $\Delta_k\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k-1\,l}$, $\Delta_l\alpha_{kl} = \alpha_{kl} - \alpha_{k\,l-1}$.

Теорема. *Если ограниченная последовательность $\{S_{kl}\}$ B-суммируема к S, то она сходится к S при выполнении условий* $\tau_{mn}^{(1)} = m\sum_{l=1}^{n} u_{ml} = O(1)$, $\tau_{mn}^{(2)} = n\sum_{k=1}^{m} u_{kn} = O(1)$, *где* $u_{kl} = \Delta S_{kl}$, $S_{00} = S_{10} = S_{01} = 0$.

Доказательство. Если справедливо (1), то оно справедливо и при $x = m$, $y = n$, т. е. $A_{mn} = e^{-m}e^{-n} \sum_{k,l=1}^{\infty} \frac{m^k n^l}{k!\,l!} S_{kl} \to S$, $m, n \to \infty$.

Положим $a_{mk}^{(1)} = e^{-m}m^k/k!$, $a_{nl}^{(2)} = e^{-n}n^l/l!$. Заметим, что матрицы $\| a_{mk}^{(1)} \|$ и $\| a_{nl}^{(2)} \|$ являются T-матрицами.

Рассмотрим тождество

$$A_{mn} - S_{mn} = \Big(\sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} S_{ml} - S_{mn}\Big) + \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^{(1)} S_{kl} - S_{ml}\Big) =$$

$$= \sigma_{mn}^{(1)} + \sum_{l=1}^{\infty} a_{nl}^{(2)} \sigma_{ml}^{(2)} = \sigma_{mn}^{(1)} + \sigma_{mn}^{(3)}. \tag{2}$$

Заметим, что $S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \tau_{kn}^{(1)}/k$, $S_{mn} = \sum_{l=1}^{n} \tau_{ml}^{(2)}/l$. Если положить $R_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)} \sum_{\iota=l}^{i} 1/\sqrt{\iota}$, $\delta_{nl}^{(2)} = \sum_{i=l}^{\infty} a_{ni}^{(2)}$, то в силу преобразования Абеля