Приведем пример, показывающий, как явно построить вложение $\operatorname{prim} \mathscr{H}(d) \to \to \operatorname{prim} \mathfrak{G}(m, n)$. Пусть $m = 10$, $n = 4$. Тогда последовательность приведений имеет **вид** $(10, 4) \to (6, 4) \to (2, 4) \to (2, 2)$. Рассмотрим в $\mathfrak{G}(10, 4)$ подалгебру $\mathfrak{D}$ матриц вида

$$Z = \left\{ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} A & D_1 & D_2 & & C_{11} & C_{12} & B_{11} & B_{12} \\ 0 & A & Y & & C_{21} & C_{22} & B_{21} & B_{22} \\ & 0 & A & & C_{31} & C_{32} & B_{31} & B_{32} \\ \hline & 0 & & & A & Y & B_{41} & B_{42} \\ & & & & 0 & A & B_{51} & B_{52} \\ \hline & & 0 & & & & A & Y \\ & & & & & & 0 & A \end{array} \right\}$$

(все клетки — размера 2×2; штриховые линии указывают последовательность проведений).

Пусть $I \in \operatorname{prim} \mathscr{H}(2)$, σ — какое-нибудь неприводимое представление с ядром I. Рассмотрим представление ρ подалгебры $\mathfrak{D}$, определенное формулой $\rho(z) = \sigma(A) + \operatorname{tr}(Y + D_1 + C_{21} + C_{32} + B_{41} + B_{52}) E$ (здесь E — единичный оператор). Тогда $\pi = \operatorname{ind}(\rho, \mathfrak{T})$ — неприводимое представление $\mathfrak{G}$ и идеалу I нужно сопоставить идеал $\ker \pi \in \operatorname{prim} \mathfrak{G}(10,4)$.

1. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры.— М. : Мир, 1978.— 407 с.
2. *Duflo M.* Sur la classification des idéaux primitifs dans l'algébre enveloppante d'une algebre de Lie semi-simple // Ann. Math.— 1977.— **105**, N 1.— P. 107—120.
3. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли.— М. : Наука, 1983.— 360 с.
4. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы.— М. : Наука, 1980.— 399 с.
5. *Conze N.* Action d'un groupe algébrique dans léspace des idéaux primitifs d'une algébre enveloppante // J. Algebra.— 1973.— **25**, N 1.— P. 100—105.

Киев. ун-т Получено 16.04.86

УДК 517.956

В. А. Маловичко

К теории уравнений смешанного типа шестого порядка

В ограниченной области $\Omega \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей Γ рассмотрим уравнение шестого порядка

$$Lu(x) \equiv A^*BAu(x) + Cu(x) = f(x), \tag{1}$$

где

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{n} [a^{ij}(x) u_{x_i}]_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a^i(x) u_{x_i} + a(x) u;$$

$$Bu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} [b^{ij}(x) u_{x_i}]_{x_j} + b(x) u; \quad Cu(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x) u_{x_i x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} c^i(x) u_{x_i} + c(x) u;$$

A^* — оператор, формально сопряженный с оператором A; $a^{ij}(x) \in C^5(\bar{\Omega})$; $a^i(x)$, $a(x) \in C^4(\bar{\Omega})$; $b^{ij}(x) \in C^3(\bar{\Omega})$; $b(x)$, $c^{ij}(x) \in C^2(\bar{\Omega})$; $c^i(x) \in C^1(\bar{\Omega})$; $c(x) \in \in C(\bar{\Omega})$; $b(x) \leqslant 0$ в Ω; матрицы $\{a^{ij}(x)\}$, $\{b^{ij}(x)\}$, $\{c^{ij}(x)\}$ симметричны, причем $\sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant 0$, $\sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x) \xi_i \xi_j \geqslant 0$ для всех $x \in \Omega$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^n$ (на знакоопределенность матрицы $\{a^{ij}(x)\}$ никаких условий не налагают).

В работах [1—3] установлены существование слабых и единственность сильных решений краевых задач для некоторых частных случаев уравнения (1). В настоящей работе доказаны существование и единственность сильного решения краевой задачи для уравнения (1).

Обозначим через $(l_1(x), \ldots, l_n(x))$ вектор единичной внешней нормали к границе Γ в точке $x \in \Gamma$ и положим

$$\Gamma_1 = \left\{x \in \Gamma : \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{i=1}^{n} a^{ij}(x) l_i(x) \right| > 0\right\}, \quad \Gamma_2 = \left\{x \in \Gamma : \sum_{i=1}^{n} a^{i}(x) l_j(x) \neq 0\right\},$$

$$\Gamma_3 = \left\{x \in \Gamma : \sum_{i,j=1}^{n} b^{ij}(x) l_i(x) l_j(x) > 0\right\},$$

$$\Gamma_4 = \left\{x \in \Gamma : \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}(x) l_i(x) l_j(x) > 0\right\}, \quad \Gamma_5 = \{x \in \Gamma : c_1(x) \neq 0\},$$

где $c_1(x) = \sum_{i=1}^{n} c^i(x) l_i(x) - \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij}_{x_j}(x) l_i(x)$. Будем предполагать, что $\Gamma_5 \subset \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4$.

Задача. В области Ω найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x) = 0, \ x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_j}(x) l_i(x) = 0, \ x \in \Gamma_1, \ Au(x) = 0, \ x \in \Gamma_3. \tag{2}$$

Введем обозначения: W — множество функций, непрерывных в $\bar{\Omega}$ вместе со всеми производными, входящими в оператор L, и удовлетворяющих условиям (2); H_+ — гильбертово пространство, полученное замыканием множества W по норме

$$\| u \|_+ = \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b^{ij} (Au)_{x_i} (Au)_{x_j} - b(Au)^2 + \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2 \right] dx \right\}^{1/2};$$

H_- — пространство с негативной нормой $\| \cdot \|_-$ [4], построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+.

Лемма. *Если выполняется условие*

$$-c(x) - c^*(x) \geqslant \alpha > 0, \ x \in \Omega, \tag{3}$$

где $c^*(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_{x_i x_j}(x) - \sum_{i=1}^{n} c^i_{x_i}(x) + c(x)$, *то для любых функций* $u(x)$, $v(x) \in W$ *справедливы энергетические неравенства*

$$\alpha_1 \| u \|_+ \geqslant \| Lu \|_- \geqslant \beta_1 \| u \|_+, \tag{4}$$

$$\alpha_2 \| v \|_+ \geqslant \| L^* v \|_- \geqslant \beta_2 \| v \|_+, \tag{5}$$

где L^* *—оператор, формально сопряженный с оператором* L; α_1, α_2, β_1, β_2 *— некоторые положительные постоянные, независящие от* $u(x)$, $v(x)$.

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $-u(x) Lu(x)$, $u(x) \in W$, приходим к равенству

$$-\int_{\Omega} uLu dx = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^{n} b^{ij} (Au)_{x_i} (Au)_{x_j} - b(Au)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} c^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - \frac{1}{2}(c + c^*) u^2 \right] dx. \tag{6}$$

Применяя к левой части равенства (6) неравенство Шварца, получаем правое неравенство (4).

Левое неравенство (7) доказывается так:

$$\|Lu\|_- = \sup_{v\in H_+} \frac{(v, Lu)_{L_2(\Omega)}}{\|v\|_+} = \sup_{v\in W} \frac{1}{\|v\|_+} \int_\Omega vLudx =$$

$$= \sup_{v\in W} \frac{1}{\|v\|_+} \int_\Omega \Big[\sum_{i,j=1}^n b^{ij} (Au)_{x_i} (Av)_{x_j} - b (Au) (Av) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} - \frac{1}{2} (c + c^*) uv\Big] dx \leqslant \alpha_1 \|u\|_+.$$

Неравенства (8) доказываются аналогично.

Определение. *Функцию* $u(x) \in H_+$ *назовем сильным решением задачи* (1), (2), *если существует последовательность функций* $u_k(x) \in W$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\|_+ = \lim\limits_{k\to\infty} \|Lu_k - f\|_- = 0$.

Следствием неравенств (4), (5) является следующая теорема.

Теорема. *Если выполняется условие* (3), *то для любой функции* $f(x) \in L_2(\Omega)$ *сильное решение* $u(x) \in H_+$ *задачи* (1), (2) *существует и единственно.*

1. *Маловичко В. А.* Об одной краевой задаче для уравнения шестого порядка с неотрицательной характеристической формой // Мат. физика.— 1982.— Вып. 31.— С. 96—99.
2. *Маловичко В. А.* О первой краевой задаче для одного дифференциального уравнения 4-го порядка // Сиб. мат. журн.— 1983.— **34**, № 1.— С. 125—129.
3. *Маловичко В. А.* Первая краевая задача для уравнения четвертого порядка с неотрицательной характеристической формой // Диф. уравнения.— 1983.— **19**, № 4.— С. 712—714.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 20.02.86,
после доработки — 28.04.86

УДК 518.7

Нгуен-Бьюнг

Об одной задаче оптимизации

Рассматривается метод регуляризации задачи оптимизации на множестве решений уравнения типа Гаммерштейна с максимальными монотонными операторами в банаховых пространствах.

1. Пусть $\varphi(x)$ — некоторый вещественный функционал, определенный на некотором множестве S банахова пространства X. Общая задача оптимизации формулируется так: найти

$$x_0 \in S : \varphi(x_0) = \min_{x\in S} \varphi(x). \tag{1}$$

Если φ есть собственно выпуклый, слабо полунепрерывный снизу функционал, имеющий производную A по Гато, и S — замкнутое выпуклое множество, то задача (1) эквивалентна задаче нахождения решения x_0 вариационного неравенства [1]: найти

$$x_0 \in S : \langle A(x), x - x_0\rangle \geqslant 0 \;\; \forall x \in S. \tag{2}$$

Исследованию этой общей задачи, при явном задании множества S, посвящено огромное количество работ. Если S задано неявно, например в виде