[5], рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (5) путем сведения ее к стандартным алгебраическому и дифференциальному, разрешенному относительно производной, периодическим матричным уравнениям Риккати, которые изучались, например, в [6]. Представим матрицу $K(t)$ в виде $K(t) = QK(t)P + QK(t)(I-P) + (I-Q)K(t)P + (I-Q)K(t)(I-P)$, где $I-P$ — ортогональный проектор пространства R^n на $\operatorname{Im} D'$, $I-Q$ — на $\operatorname{Im} D$. Из (5) получаем $(I-Q)K(t)P = 0$, а $K_1(t) = QK(t)P$ удовлетворяет стандартному алгебраическому матричному уравнению Риккати. Налагая условия (например [7], матрица $PW(t)P : \operatorname{Ker} D \to \operatorname{Ker} D$ положительно определена, а пара матриц $(QA(t)P, QB(t))$ полностью управляема), обеспечивающие существование периодического решения алгебраического уравнения Риккати такого, что операторы $K_1(t)$ и $QA(t)P - QS(t)QK_1(t)$, действующие из $\operatorname{Ker} D$ в $\operatorname{Ker} D'$, обратимы $(t \in [0, T])$, можно выразить $QK(t)(I-P)$ в виде линейной функции от $(I-Q)K(t) \times (I-P)$. При этом уравнение для $(I-Q)K(t)(I-P)$ приводится к стандартному периодическому дифференциальному уравнению Риккати, разрешенному относительно производной. Из (6) для определения $Q\varphi(t)$ получаем алгебраическое линейное уравнение, а для определения $(I-Q) \times \varphi(t)$ — дифференциальное линейное уравнение, разрешенное относительно производной, с условием периодичности. Однозначная разрешимость последнего уравнения будет следовать из устойчивости некоторой матрицы, определяемой с помощью уравнения для $(I-Q)K(t)(I-P)$.

1. *Курина Г. А.* Достаточные условия оптимальности управления для линейных систем, не разрешенных относительно производной // Приближенные методы исследования дифференциальных уравнений и их приложения.— Куйбышев, 1982.— С. 98—102.
2. *Курина Г. А.* Управление с обратной связью для линейных систем, не разрешенных относительно производной // Автоматика и телемеханика.— 1984.— № 6.— С. 37—41.
3. *Дмитриев М. Г., Мурадова Н. Д.* Обоснование идеализации математической модели одной задачи периодической оптимизации // Изв. АН ТССР. Сер. физ.-техн., хим. и геолог. наук.— 1980.— № 3.— С. 6—12.
4. *Haddad A. H., Kokotovic P. V.* Note on singular perturbation of linear state regulators // IEEE Trans. Automat. Contr.— 1971.— **16**, N 3.— P. 279—281.
5. *Курина Г. А.* Об операторном уравнении Риккати, не разрешенном относительно производной // IX школа по теории операторов в функциональных пространствах : Тез. докл.— Тернополь : Тернопол. пед. ин-т, 1984.— С. 68.
6. *Hewer G. A.* Periodicity, detectability and the matrix Riccati equation // SIAM J. Contr.— 1975.— **13**, N 6.— P. 1235—1251.
7. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления.— М. : Наука, 1972.— 574 с.

Воронеж. лесотехн. ин-т Получено 25.03.85

УДК 517.5

А. К. Кушпель

Об одном семействе экстремальных подпространств

Пусть X — банахово пространство, $\mathfrak{N}$ — центрально-симметричное множество из X. n-Мерным поперечником по А. Н. Колмогорову называют величину

$$d_n(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_n} \sup_{y \in \mathfrak{N}} \inf_{u \in F_n} \| y - u \|_X, \tag{1}$$

где последний раз точная нижняя грань берется по всем подпространствам размерности не выше n. Линейный поперечник $\mathfrak{N}$ в X есть по определению величина

$$d_n'(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_n} \inf_{Ay \in F_n} \sup_{y \in \mathfrak{N}} \| y - Ay \|_X, \tag{2}$$

где A — линейный непрерывный оператор, действующий из X в F_n. В случае, когда A — линейный непрерывный проектор, отображающий $\mathfrak{N}$ в F_n, величина (2) известна как проекционный n-поперечник и обозначается через $\pi_n^*(\mathfrak{N}, X)$. Подпространство F_n^* называется экстремальным, если оно реализует inf в (1) или (2).

Пусть $X = L_2$ — пространство 2π-периодических функций φ, удовлетворяющих условию $\|\varphi\|_2 = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt\right)^{1/2} < \infty$, $\mathfrak{N} \subset L_2$. В случае, когда $\mathfrak{N} = W_2^r \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi : \|\varphi^{(r)}\|_2 \leqslant 1\}$, где $r > 0$, $d_{2n-1}(W_2^r, L_2) = d_{2n}(W_2^r, L_2) = d'_{2n-1}(W_2^r, L_2) = d'_{2n}(W_2^r, L_2) = \pi_{2n-1}(W_2^r, L_2) = \pi_{2n}(W_2^r, L_2) = n^{-r}$ [1]. При $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, поперечники $d_n(W_2^r, L_2)$, $d'_n(W_2^r, L_2)$, $\pi_n(W_2^r, L_2)$ реализуют суммы Фурье $s_{n-1}(\varphi, t) = a_0(\varphi)/2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k(\varphi)\cos kt + b_k(\varphi)\sin kt$ функции $\varphi \in W_2^r$ (см., например, [1]). В [2] показано, что величины $\pi_{2n}(W_2^r, L_2)$ реализуют интерполяционные полиномиальные сплайны.

В настоящей работе будет построено экстремальное подпространство S_{2n}^K и непрерывный линейный проектор, действующий из W_2^r в S_{2n}^K, реализующие равенство $\pi_{2n}(W_2^r, L_2) = n^{-r}$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\Delta_n = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2\pi\}$ — произвольное разбиение промежутка $[0, 2\pi)$ и $K(\cdot)$ — произвольная непрерывная 2π-периодическая функция. $sk(\cdot)$-Сплайном по разбиению будем называть функцию, представимую в виде

$$sk(\cdot) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i K(\cdot - x_i), \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0, \tag{3}$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ — произвольные действительные числа; sk-сплайны изучались в [3, 4]. Легко видеть, что множество функций, представимых в виде (3), образует линейное пространство, которое обозначим через S_n^k; при этом $\dim S_n^K \leqslant n$.

Если $f(\cdot)$ — произвольная непрерывная 2π-периодическая функция, $f \in C_{2\pi}$, то $sk(\cdot)$-сплайн, удовлетворяющий условиям $sk(x_i) = sk(f, x_i) = f(x_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, будем называть интерполяционным.

Достаточные условия, гарантирующие существование и единственность интерполяционного сплайна $sk(f, \cdot)$ для любой $f \in C_{2n}$, приведены в [4] (см. теорему 1.1, леммы 1.7, 1.8). В частности, для любого разбиения Δ_n и произвольной функции $f \in C_{2\pi}$ существует единственный интерполяционный сплайн $sk(f, \cdot)$, порождаемый функцией $K(t)$ с рядом Фурье $s[K(t)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2(r+1)} \cos kt$.

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция $K(t)$ имеет ряд Фурье вида $s[K(t)] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-2(r+1)} \cos kt$, $r \geqslant 1$. Тогда для любой функции $f \in C_{2\pi}$ существует единственный интерполяционный сплайн $sk(f, t)$ и справедлива оценка*

$$\sup_{f \in W_2^r} \| f(t) - sk(f, t)\|_2 \leqslant \|\Delta_n\|^r \pi^{-r}, \quad \|\Delta_n\| \overset{\mathrm{df}}{=} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_{i-1} - x_i|.$$

В частности, при $x_i = i\pi/n$, $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$, выполняется равенство

$$\sup_{f \in W_2^r} \| f(t) - sk(f, t)\|_2 = n^{-r}. \tag{4}$$

Доказательство. Положим $\rho(t) = f(t) - sk(f, t)$. Из неравенства Шмидта [5, с. 383] следует

$$\int\limits_{[x_i, x_{i+1})} |\rho(t)|^2 dt \leqslant h_i^2 \pi^{-2} \int\limits_{[x_i, x_{i+1})} |\rho'(t)|^2 dt, \quad h_i = x_{i+1} - x_i. \tag{5}$$

Суммируя неравенства (5) по i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, находим

$$\| \rho(t) \|_2 \leqslant \| \Delta_n \| \pi^{-1} \| \rho'(t) \|_2. \tag{6}$$

Для дальнейшего потребуется неравенство Харди — Литлвуда и Полиа [6, с. 119]

$$\| (\varphi(t))^{(\mu)} \|_2 \leqslant \| \varphi(t) \|_2^{1-\mu\nu^{-1}} \| (\varphi(t))^{(\nu)} \|_2^{\mu\nu^{-1}}, \quad 0 < \mu \leqslant \nu. \tag{7}$$

При $\mu = 1$ из (7) находим

$$\| \rho'(t) \|_2 \leqslant \| \rho(t) \|_2^{1-r} \| (\rho(t))^{(r)} \|^{r^{-1}}. \tag{8}$$

Из оценок (6) и (8) следует

$$\| \rho(t) \|_2 \leqslant \| \Delta_n \|^r \pi^{-r} \| \rho^{(r)}(t) \|_2. \tag{9}$$

Теорема 4.3 из [4] в наших обозначениях утверждает, что для произвольного разбиения Δ_n и произвольного sk-сплайна, порождаемого функцией $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2(r+1)} \cos kt$, $r \geqslant 1$, выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} ((f(t) - sk(t))^{(r)})^2 \, dt \geqslant \int_0^{2\pi} ((f(t) - sk(f, t))^{(r)})^2 \, dt, \tag{10}$$

где $sk(f, t)$ — сплайн, интерполирующий f в узлах разбиения Δ_n. Если $sk(t) \equiv 0$, то из (10) получаем $\| (f(t))^{(r)} \|_2^2 \geqslant \| (\rho(t))^{(r)} \|_2^2$. Так как $f \in W_2^r$, то $\| f^{(r)} \|_2 \leqslant 1$ и, стало быть,

$$\| (\rho(t))^{(r)} \|_2 \leqslant 1. \tag{11}$$

Оценки (9) и (11) позволяют заключить, что

$$\| \rho(t) \|_2 \leqslant \| \Delta_n \|^r \pi^{-1} \quad \forall f \in W_2^r. \tag{12}$$

В случае, когда $x_i = i\pi/n$, $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$, из (12) получаем

$$\| \rho(t) \|_2 \leqslant n^{-r} \quad \forall f \in W_2^r. \tag{13}$$

Далее, так как функция $f_n(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \pi^{-1/2} n^{-r} \sin nt$ принадлежит классу W_2^r и $f_n(i\pi/n) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$, то

$$\| \rho(t) \|_2 = \| f_n(t) - sk(f_n, t) \|_2 = \| f_n(t) \|_2 = n^{-r}. \tag{14}$$

Сопоставление соотношений (13) и (14) доказывает соотношение (4). Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что оператор, действующий по формуле $f(\cdot) \to sk(f, \cdot)$, $f \in W_2^r$, является непрерывным линейным проектором, реализующим поперечник $\pi_{2n}(W_2^r, L_2)$.

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Сазанов А. А.* Асимптотика поперечников классов функций, определяемых дифференциальным оператором // Приближение функций полиномами и сплайнами.— Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985.— С. 127—139.
3. *Кушпель А. К.* Экстремальные свойства сплайнов и поперечники классов периодических функций в пространстве $C_{2\pi}$.— Киев, 1984.— 41 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.25).
4. *Кушпель А. К.* sk-Сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$.— Киев, 1985.— 47 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.51).
5. *Харди Г., Литлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1948.— 456 с.
6. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями.— Киев : Наук. думка, 1982.— 250 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.03.86