1. *Lindenstrauss J.* Extention of compact operators // Mem. Amer. Math. Soc.— 1964.— N 48.— P. 1—112.
2. *Кадец М. И.* Геометрия нормированных пространств.— Итоги науки и техники. Математический анализ.— М. : ВИНИТИ, 1975, т. 13, с. 85—123.
3. *Yaushara M.* The amalgamation property, the universal homoheneous models and the generic models // Math. scand.— 1974.— N 34.— P. 5—36.
4. *Stern J.* Ultrapowers and local properties of Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1978.— **240**.— P. 231—252.
5. *Heinrich S.* Ultraproducts in Banach spaces theory // J. reine und angew. Math.— 1980.— **313**.— P. 72—104.
6. *Dubinski E., Pelczyński A., Rosenthal H. P.* On Banach spaces X for which $\Pi_2(\mathscr{L}_\infty, X) = B(\mathscr{L}_\infty, X)$ // Stud. math.— 1972.— **44**.— P. 617—648.
7. *Pisier J.* Countre — example a une conjecture de Grothendieck // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. Ser. I.— 1981.— **293**, N 18.— P. 681—683.
8. *Островский М. И.* Свойства Банаха-Сакса, инъективность и растворы подпространств банахова пространства // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1985.— Вып. 44.— С. 69—78.

ВНИИкондиционер, Харьков

Получено 23.09.85

УДК 519.41/47

Н. С. Черников, А. П. Петравчук

Характеризация периодических локально разрешимых групп с разрешимыми и с конечноэкспонентными силовскими π-подгруппами

В настоящей работе исследуются свойства периодических локально разрешимых групп в зависимости от свойств их силовских (т. е. максимальных) π-подгрупп (π — некоторое множество простых чисел). В ней установлено, в частности, что для такой группы разрешимость всех силовских π-подгрупп равносильна наличию конечного ряда характеристических подгрупп с π'-факторами и абелевыми π-факторами (см. теорему 1). Напомним: π-группой называется периодическая группа, все простые делители порядков элементов которой принадлежат π (при $\pi = \varnothing$ 1 — единственная π-группа); через π' обозначается множество всех простых чисел, не входящих в π. Отметим, что ввиду известной теоремы Фейта — Томпсона о разрешимости конечных групп нечетного порядка класс периодических локально разрешимых групп включает в себя все локально конечные группы без элементов порядка 2.

Используем следующие обозначения: $C_G(N)$ — централизатор подгруппы N в группе G, $O_\pi(G)$ — максимальная инвариантная π-подгруппа группы G, $O^\pi(G)$ — пересечение всех инвариантных подгрупп периодической группы G, фактор-группы по которым являются π-группами ($G/O^\pi(G)$ всегда π-группа), p — простое число (иногда выступающее как одноэлементное множество), $O_{p',p}(G)$ определяется из соотношения $O_p(G/O_{p'}(G)) = O_{p',p}(G)/O_{p'}(G)$, $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядков элементов группы G, $|G|$ — порядок конечной группы G, $d(G)$ — ступень разрешимости разрешимой группы G. Если в группе G все π-подгруппы разрешимы и их ступени разрешимости ограничены в совокупности, то $d_\pi(G)$ — максимум этих ступеней. Далее $a(G)$ — экспонента периодической группы G. Если в группе G все π-подгруппы имеют конечные экспоненты, ограниченные в совокупности, то $a_\pi(G)$ — наименьшее общее кратное этих экспонент. Наконец, $l_\pi(G)$ — π-длина группы G (см. определение 2).

Следуя [1], введем определение.

Определение 1. *Возрастающим $\pi'\pi$-рядом группы G будем называть следующий ряд ее характеристических подгрупп:*

$$1 = P_0(G) \subseteq N_0(G) \subseteq P_1(G) \subseteq N_1(G) \subseteq \ldots \subseteq P_i(G) \subseteq N_i(G) \subseteq \ldots,$$

где $N_i(G)/P_i(G) = O_{\pi'}(G/P_i(G))$, $P_{i+1}(G)/N_i(G) = O_\pi(G/N_i(G))$.

Определение 2. *Если $G = N_l(G)$ для некоторого l, то будем говорить, что группа G имеет конечную π-длину. Наименьшее число l с этим свойством будем называть π-длиной группы G и обозначать через $l_\pi(G)$.*

Определение 3. *Убывающим $\pi'\pi$-рядом периодической группы G будем называть следующий ряд ее характеристических подгрупп:*

$$G = P_0^*(G) \supseteq N_0^*(G) \supseteq P_1^*(G) \supseteq N_1^*(G) \supseteq \ldots \supseteq P_i^*(G) \supseteq N_i^*(G) \supseteq \ldots,$$

где $N_i^*(G) = O^{\pi'}(P_i^*(G))$, $P_{i+1}^*(G) = O^\pi(N_i^*(G))$.

Напомним, что конечная группа называется π-разрешимой, если она обладает конечным инвариантным рядом с π'-факторами и разрешимыми π-факторами. Если конечная группа G π- или π'-разрешима, то всякая π-подгруппа группы G содержится в некоторой ее холловой π-подгруппе и все холловы π-подгруппы группы G сопряжены в ней (теорема С. А. Чунихина).

В следующей лемме приводятся некоторые элементарные свойства групп конечной π-длины.

Лемма 1. *Для группы G конечной π-длины справедливы следующие утверждения.*

1. *Произвольная подгруппа и произвольная фактор-группа группы G имеют конечную π-длину, не превышающую $l_\pi(G)$.*

2. *В любом конечном инвариантном ряде с π- и π'-факторами группы G число нееединичных π-факторов не меньше чем $l_\pi(G)$.*

3. $l_\pi(G/N) = l_\pi(G)$, *если N — π'-группа.*

4. *Если группа G конечна и π-разрешима, то $l_\pi(G/\Phi(G)) = l_\pi(G)$ ($\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G).*

Доказательство. Утверждения 1—3 настоящей леммы нетрудно доказать, исходя непосредственно из определения π-длины.

Утверждение 4 леммы нетрудно доказать, воспользовавшись схемой доказательства утверждения е) предложения 6.6.4 из [2].

Лемма 2. *Пусть G — группа конечной π-длины l. Тогда в убывающем $\pi'\pi$-ряде группы G $N_l^*(G) = 1$ и этот ряд имеет в точности l нееединичных π-факторов.*

Доказательство проведем индукцией по π-длине группы G. Очевидно, лемма справедлива в случае, когда $l = 0$. Пусть $l > 0$. Нетрудно видеть, что подгруппа $P_1^*(G)$ совпадает с пересечением всех инвариантных подгрупп группы G, фактор-группы по которым являются расширениями π-групп с помощью π'-групп. Далее, очевидно, фактор-группа $G/N_{l-1}(G)$ является таким расширением. Поэтому $N_{l-1}(G) \supseteq P_1^*(G)$ и, значит, $l_\pi(P_1^*(G)) \leqslant l_\pi(N_{l-1}(G)) = l_\pi(G) - 1$. Следовательно, ввиду индуктивного предположения убывающий $\pi'\pi$-ряд подгруппы $P_1^*(G)$ конечен и у него не более чем $l-1$ нееединичных π-факторов. Но убывающий $\pi'\pi$-ряд подгруппы $P_1^*(G)$ — это ряд

$$P_1^*(G) \supseteq N_1^*(G) \supseteq \ldots \supseteq P_i^*(G) \supseteq N_i^*(G) \supseteq \ldots$$

Отсюда следует, что убывающий $\pi'\pi$-ряд группы G конечен и имеет не более чем l нееединичных π-факторов. Ввиду утверждения 2 леммы 1 число π-факторов в этом ряде в точности равно l и, значит, $N_l^*(G) = 1$.

Лемма 3. *Если периодическая группа G обладает локальной системой подгрупп, π-длины которых конечны и ограничены в совокупности, то π-длина группы G конечна и равна максимуму π-длин подгрупп из этой локальной системы.*

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in I$, — локальная система подгрупп группы G, π-длины которых конечны и ограничены в совокупности; c —

максимум π-длин подгрупп G_α. Индукцией по c покажем, что группа G имеет конечную π-длину, не превышающую c. Если $c=0$, то все G_α являются π'-группами. Тогда и G — π'-группа. Следовательно, $l_\pi(G)=0$. Пусть $c>0$. Положим $H_\alpha = N_0^*(G_\alpha)$, $\alpha\in I$, и $H=\bigcup\limits_{\alpha\in I} H_\alpha$. Нетрудно видеть, что включение $G_\alpha \subseteq G_\beta$ влечет включение $H_\alpha \subseteq H_\beta$. Пользуясь этим и учитывая, что подгруппы G_α, $\alpha\in I$, образуют локальную систему группы G, нетрудно убедиться в следующем: подмножество H является инвариантной подгруппой группы G, для которой $\{H_\alpha\}$, $\alpha\in I$ — локальная система. Очевидно, при каждом $\alpha\in I$ $G_\alpha H/H$ — π'-группа. Поэтому с учетом соотношения $G/H=\bigcup\limits_{\alpha\in I}(G_\alpha H/H)$ фактор-группа G/H является π'-группой.

Положим далее $K_\alpha = P_1^*(G_\alpha)$, $\alpha\in I$, и $K=\bigcup\limits_{\alpha\in I} K_\alpha$. Очевидно, включение $H_\alpha\subseteq H_\beta$ влечет включение $K_\alpha\subseteq K_\beta$. Пользуясь этим, нетрудно убедиться, что K — инвариантная подгруппа группы G и H/K — π-группа. Но тогда фактор-группа G/K является расширением π-группы с помощью π'-группы и, значит, $l_\pi(G/K)\leqslant 1$. Далее, ввиду леммы 2 $l_\pi(K_\alpha)=l_\pi(G_\alpha)-1$ в случае, когда $l_\pi(G_\alpha)>0$. Отсюда вытекает, что при произвольном α $l_\pi(K_\alpha)\leqslant c-1$. Следовательно, по индуктивному предположению $l_\pi(K)\leqslant \leqslant c-1$. Но тогда $l_\pi(G)\leqslant c$ и, значит, ввиду утверждения 1 леммы 1 $l_\pi(G)=c$.

Лемма 4. *Пусть G — конечная π-разрешимая группа такая, что $l_\pi(G/N)<l_\pi(G)$, если $N\neq 1$. Тогда $O_{\pi'}(G)=\Phi(G)=1$. Далее, группа G имеет в точности один минимальный нормальный делитель. Последний, во-первых, для некоторого $p\in\pi$ является элементарной абелевой p-группой и равен $O_{p',p}(G)$, во-вторых, дополняем в группе G и, в-третьих, совпадает со своим централизатором в ней.*

Доказательство. Ввиду утверждений 3 и 4 леммы 1, очевидно, $O_{\pi'}(G)=\Phi(G)=1$. Далее, рассуждая как в п. c) доказательства предложения 6.6.9 из [2], можно показать, что группа G имеет в точности один минимальный нормальный делитель (обозначим его через N) и последний дополняем в ней. Так как группа G π-разрешима и $O_{\pi'}(G)=1$, то, очевидно, N — элементарная абелева p-группа для некоторого $p\in\pi$. Тогда ввиду единственности N, очевидно, $O_{p'}(G)=1$ и, значит, $O_{p',p}(G)=O_p(G)$. Далее, ввиду включения $\Phi(O_p(G))\subseteq\Phi(G)=1$ (см., например, [2], предложение 3.3.3) подгруппа $O_p(G)$ элементарная абелева. Теперь, рассуждая как в п. d) доказательства предложения 6.6.9 из [2], убеждаемся, что $N=O_p(G)=C_G(N)$.

Лемма 5. *Пусть G — конечная π-разрешимая группа, $\pi_1,\ldots,\pi_n$ — какие-нибудь множества простых чисел, дающие в объединении π. Тогда $l_\pi^*(G)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n} l_{\pi_i}(G)$.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Будем считать, что G — контрпример минимального порядка. Пусть $\overline{G}$ — фактор-группа группы G и $|\overline{G}|<|G|$. Покажем, что $l_\pi(\overline{G})<l_\pi(G)$. Действительно, так как $|\overline{G}|< <|G|$, то $l_\pi(\overline{G})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n} l_{\pi_i}(\overline{G})\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n} l_{\pi_i}(G)<l_\pi(G)$. Поэтому вследствие леммы 4 $O_{\pi'}(G)=1$ и для некоторого $p\in\pi$ $O_{p'}(G)=1$, $O_{p',p}(G)=O_p(G)\neq 1$. Будем считать, что $p\in\pi_1$. Тогда $O_{\pi_1'}(G)\subseteq O_{p'}(G)$ и, значит, $O_{\pi_1'}(G)=1$.

Положим теперь $\overline{G}=G/O_{\pi_1}(G)$. Очевидно, $l_{\pi_1}(\overline{G})=l_{\pi_1}(G)-1$ с учетом соотношения $O_{\pi_1'}(G)=1$. Покажем, что и $l_\pi(\overline{G})=l_\pi(G)-1$. Действительно, $l_\pi(G/O_\pi(G)) \leqslant l_\pi(\bar{G})$ ввиду включения $O_{\pi_1}(G) \leqslant O_\pi(G)$. Далее, так как $O_{\pi'}(G) = 1$, то $l_\pi(G/O_\pi(G)) = l_\pi(G) - 1$. Таким образом, $l_\pi(G) - 1 = l_\pi(G/O_\pi(G)) \leqslant l_\pi(\bar{G}) < l_\pi(G)$ и потому $l_\pi(\bar{G}) = l_\pi(G) - 1$. Следовательно, $l_\pi(G) - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} l_{\pi_i}(\bar{G}) = (l_{\pi_1}(G) - 1) + \sum_{i=2}^{n} l_{\pi_i}(\bar{G})$ и, значит, $l_\pi(G) \leqslant l_{\pi_1}(G) + \sum_{i=2}^{n} l_{\pi_i}(\bar{G})$. Последнее невозможно, поскольку $l_{\pi_i}(\bar{G}) \leqslant l_{\pi_i}(G)$, $i = 2, \ldots, n$. Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть G — конечная разрешимая группа и $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — какие-нибудь множества простых чисел, дающие в объединении $\pi(G)$. Тогда $d(G) \leqslant \sum_{i=1}^{n} l_{\pi_i}(G)\, d_{\pi_i}(G)$.*

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 1.2.2 из [3].

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение, объединяющее основные результаты работ [3—5].

Предложение 1. *Пусть G — конечная p-разрешимая группа, $d_p(G)$ и $p^{e_p(G)}$ — соответственно ступень разрешимости и экспонента силовской p-подгруппы группы G. Тогда $l_p(G) \leqslant e_p(G)$ при условии, что p не есть простое число Ферма или $d_2(G) \leqslant 1$. Если p — простое число Ферма, то $l_p(G) \leqslant 2e_p(G)$. Для всех p $l_p(G) \leqslant d_p(G)$.*

Лемма 7. *В каждом из следующих трех случаев π-длина конечной π-разрешимой группы G не превышает ступени разрешимости ее холловой π-подгруппы*: а) *π не содержит чисел 2 и 3*; б) *силовская 2-подгруппа группы G абелева*; в) *холлова π-подгруппа группы G абелева.*

Доказательство. Пусть лемма неверна. Будем считать, что G — контрпример минимального порядка. Тогда $l_\pi(G) > d_\pi(G)$, но для всякой отличной от группы G ее фактор-группы $\bar{G}$ выполняются неравенства $l_\pi(\bar{G}) \leqslant d_\pi(\bar{G}) \leqslant d_\pi(G) < l_\pi(G)$. Далее, ввиду леммы 4 группа G обладает в точности одним минимальным нормальным делителем N, причем $N = C_G(N)$ и $N = O_{p',p}(G) = O_p(G)$ для некоторого $p \in \pi$. Пусть H — какая-нибудь холлова π-подгруппа группы G, K — последний неединичный член ряда коммутантов подгруппы H, $K_{p'}$ — холлова p'-подгруппа группы K. Очевидно, $K_{p'} \subseteq C_G(N)$. Но $C_G(N) = N$. Следовательно, $K_{p'} = 1$ и, значит, K — p-группа. Легко видеть, что подгруппа H неабелева. Действительно, в противном случае, очевидно, $H = N$ и, следовательно, $l_\pi(G) = 1$, что невозможно.

Покажем, что $K \subseteq N$. Заметим прежде всего, что в случае, когда $p \leqslant 3$, силовская 2-подгруппа группы G абелева. Пусть сначала $p = 2$. Тогда ввиду равенства $N = G_G(N)$ 2-подгруппа N является силовской 2-подгруппой группы G и потому содержит подгруппу K. Пусть $p \geqslant 3$. Так как подгруппа K абелева и, очевидно, инвариантна в некоторой силовской p-подгруппе группы G, то ввиду утверждения в) леммы 9.5.1 из [6] $K \subseteq O_{p',p}(G)$, т. е. $K \subseteq N$.

Так как $K \subseteq N$ и $d(H/K) = d(H) - 1$, то $d(H/N) \leqslant d(H) - 1$. Следовательно, $d_\pi(G/N) \leqslant d_\pi(G) - 1$ и, значит, $l_\pi(G/N) \leqslant d_\pi(G/N) \leqslant d_\pi(G) - 1$. Но поскольку N — π-группа, то, очевидно, $l_\pi(G/N) \geqslant l_\pi(G) - 1$. Противоречие.

Следствие 1. *Пусть G — конечная разрешимая группа. Если $d_\pi(G) \leqslant d_{\pi'}(G)$, то $d(G) \leqslant [d_\pi(G)]^2 + 3\,[d_{\pi'}(G)]^2$.*

Доказательство. Положим $\pi_1 = \pi \setminus \{2, 3\}$, $\pi_2 = \pi' \setminus \{2, 3\}$, $\pi_3 = \{2\}$, $\pi_4 = \{3\}$. Используя предложение 1 и лемму 7, нетрудно убедиться, что $l_{\pi_1}(G) \leqslant d_\pi(G)$ и $l_{\pi_i}(G) \leqslant d_{\pi'}(G)$, $i = 2, 3, 4$. Поэтому ввиду леммы 5

$$d(G) \leqslant \sum_{i=1}^{4} l_{\pi_i}(G)\, d_{\pi_i}(G) \leqslant [d_\pi(G)]^2 + 3\,[d_{\pi'}(G)]^2.$$

Лемма 8. *π-Длина конечной π-разрешимой группы G не превышает утроенной ступени разрешимости ее холловой π-подгруппы* (*т. е.* $l_\pi(G) \leqslant 3d_\pi(G)$).

Доказательство. Положим $\pi_1 = \pi \setminus \{2, 3\}$, $\pi_2 = \pi \cap \{2\}$ и $\pi_3 = \pi \cap \{3\}$. Пользуясь леммами 5 и 7 и предложением 1, получим $l_\pi(G) \leqslant \sum_{i=1}^{3} l_{\pi_i}(G) \leqslant \sum_{i=1}^{3} d_{\pi_i}(G) \leqslant 3d_\pi(G)$.

Лемма 9. *Если в конечной π-разрешимой группе G холлова π-подгруппа нильпотентна, то* $l_\pi(G) = \max_{p\in\pi} l_p(G)$.

Доказательство. Докажем неравенство $l_\pi(G) \leqslant \max_{p\in\pi} l_p(G)$. В самом деле, пусть оно не выполняется. Будем считать, что G — минимальный контрпример к нему. Заметим, что $l_\pi(\bar{G}) < l_\pi(G)$, если $\bar{G}$ — фактор-группа группы G и $|\bar{G}| < |G|$. Действительно, $l_\pi(\bar{G}) \leqslant \max_{p\in\pi} l_p(\bar{G}) \leqslant \max_{p\in\pi} l_p(G) < l_\pi(G)$. Следовательно, ввиду леммы 4 группа G обладает в точности одним минимальным нормальным делителем N, причем $N = C_G(N)$ и $N = O_q(G)$ для некоторого $q \in \pi$.

Пусть H — какая-нибудь холлова π-подгруппа группы G. Так как подгруппа H нильпотентна и $N = C_H(N)$, то, очевидно, она является q-группой. Но тогда $\pi = \{q\}$. Противоречие.

Итак, $l_\pi(G) \leqslant \max_{p\in\pi} l_p(G)$. Далее, всякий π-фактор группы G нильпотентен. Поэтому, как легко видеть, ее возрастающий $\pi'\pi$-ряд можно уплотнить для любого $p \in \pi$ до инвариантного ряда с p- и p'-факторами, у которого число неединичных p-факторов не превышает $l_\pi(G)$. Отсюда вытекает, что $l_p(G) \leqslant l_\pi(G)$, $p \in \pi$. Следовательно, $\max_{p\in\pi} l_p(G) \leqslant l_\pi(G)$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G — периодическая локально разрешимая группа. Если все силовские π-подгруппы группы G разрешимы* (*соответственно имеют конечные экспоненты*), *то их ступени разрешимости* (*экспоненты*) *ограничены в совокупности*.

Доказательство. Пусть лемма неверна и H_i, $i = 1, 2, \ldots$ — конечные π-подгруппы группы G такие, что $d(H_i) < d(H_{i+1})$ (соответственно $a(H_i) < a(H_{i+1})$). Обозначим через G_k, $k = 1, 2, \ldots$, подгруппу, порожденную $H_1, \ldots, H_k$. Возьмем холлову π-подгруппу S_2 группы G_2, содержащую H_1, холлову π-подгруппу S_3 группы G_3, содержащую S_2, и т. д. Тогда $d(H_k) \leqslant d(S_k)$ (соответственно $a(H_k) \leqslant a(S_k)$), $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ — неразрешимая π-подгруппа (π-подгруппа бесконечной экспоненты). Противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *В периодической локально разрешимой группе G все силовские π-подгруппы разрешимы* (*соответственно имеют конечные экспоненты*) *тогда и только тогда, когда она обладает конечным рядом характеристических подгрупп, каждый фактор которого является либо абелевой π-группой, либо π'-группой* (*соответственно либо p-группой для $p \in \pi$ конечной экспоненты, либо π'-группой*).

Доказательство. Достаточность очевидна. Необходимость. Заметим прежде всего, что ввиду леммы 10 для группы G определена величина $d_\pi(G)$ (соответственно $a_\pi(G)$). Пусть H — произвольная конечная подгруппа группы G. Тогда ввиду леммы 8 $l_\pi(H) \leqslant 3d_\pi(H) \leqslant 3d_\pi(G)$ (соответственно ввиду предложения 1 и леммы 5 $l_\pi(H) \leqslant \sum_{i=1}^{n} l_{p_i}(H) \leqslant \sum_{i=1}^{m} 2k_i + \sum_{i=m+1}^{n} k_i$, $m \geqslant 0$, для чисел k_i из разложения $a_\pi(G) = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$, где $p_1, \ldots, p_m$ — все числа Ферма, входящие в него). Поэтому ввиду леммы 3 $l_\pi(G) \leqslant 3d_\pi(G)$ (соответственно

$$l_\pi(G) \leqslant \sum_{i=1}^{n} l_{p_i}(G) \leqslant \sum_{i=1}^{m} 2k_i + \sum_{i=m+1}^{n} k_i\Big). \qquad (1)$$

Далее, очевидно, любая конечная π-секция группы G разрешима ступени $\leqslant d_\pi(G)$ (имеет конечную экспоненту $\leqslant a_\pi(G)$) и потому произвольный π-фактор группы G разрешим (имеет конечную экспоненту). Следовательно, группа G обладает конечным рядом характеристических подгрупп с π'-факторами и разрешимыми (конечноэкспонентными) π-факторами. Этот ряд можно уплотнить до конечного ряда характеристических подгрупп с π'-факторами и абелевыми π-факторами (соответственно до конечного ряда характеристических подгрупп с π'-факторами и примарными π-факторами: действительно, с учетом соотношения (1) для каждого p_i, $i = 1, \ldots, n$, группа G обладает конечным рядом характеристических подгрупп с p_i'- и p_i-факторами и потому, как нетрудно убедиться, обладает конечным рядом характеристических подгрупп с π'-факторами и p_i-факторами, $i = 1, \ldots, n$). Теорема доказана.

Примечание 1. В доказательстве теоремы 1 установлено, что при ее условиях $l_\pi(G) \leqslant 3d_\pi(G)$ $\Big($соответственно $l_\pi(G) \leqslant \sum_{i=1}^{m} 2k_i + \sum_{i=m+1}^{n} k_i\Big)$. Используя в нем вместо леммы 8 лемму 7 и предложение 1, можно показать, что $l_\pi(G) \leqslant d_\pi(G)$ в случае, когда все силовские π-подгруппы группы G разрешимы и при этом выполняется хотя одно из следующих четырех условий: а) $\pi = \{p\}$; б) $\{2, 3\} \cap \pi = \varnothing$; в) $d_2(G) \leqslant 1$; г) $d_\pi(G) \leqslant 1$.

Следствие 2. *Пусть G — периодическая локально разрешимая группа, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — какие-нибудь множества простых чисел, дающие в объединении $\pi(G)$. Если для каждого π_i все силовские π_i-подгруппы группы G разрешимы, то и сама группа разрешима.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 в группе G найдется конечный инвариантный ряд с π_i'-факторами и абелевыми π_i-факторами, $i = 1, \ldots, n$. Учитывая это, соотношение $\pi(G) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi_i$ и используя известную теорему Шрейера об изоморфных уплотнениях конечных инвариантных рядов групп (см., например, [1], теорема 3.1.2), убеждаемся, что группа G обладает конечным инвариантным рядом, каждый фактор которого является абелевой π_i-группой для некоторого i, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, группа G разрешима.

Следствие 3. *Пусть G — локально разрешимая периодическая группа, у которой множество $\pi(G)$ конечно. Группа G тогда и только тогда разрешима, когда для каждого $p \in \pi(G)$ все ее силовские p-подгруппы разрешимы.*

Следующая теорема содержится в теореме 1.

Теорема 2. *Локально разрешимая группа конечной экспоненты обладает конечным рядом характеристических подгрупп с примарными факторами.*

Из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4 [7]. *Неединичная локально разрешимая группа конечной экспоненты обладает отличной от единицы нормальной p-подгруппой для некоторого простого p.*

Теорема 3. *Пусть G — периодическая локально разрешимая группа, все силовские p-подгруппы которой при любом p из некоторого множества π простых чисел имеют конечные экспоненты, ограниченные числом p^c для подходящего натурального c, не зависящего от p. Тогда, если в группе G все силовские π-подгруппы локально нильпотентны, то она обладает конечным рядом характеристических подгрупп, каждый фактор которого является либо локально нильпотентной π-группой, либо π'-группой.*

Доказательство. Действительно, ввиду предложения 1 и лемм 9 и 3 $l_\pi(G) \leqslant 2c$ (или даже $l_\pi(G) \leqslant c$, если множество $\pi(G)$ не содержит простых чисел Ферма) и, значит, группа G обладает конечным рядом характеристических подгрупп с π- и π'-факторами. Остается заметить, что произвольный π-фактор группы G локально нильпотентен.

Следствие 5. *Пусть G — периодическая локально разрешимая группа, у которой при любом $p \in \pi(G)$ порядок произвольного p-элемента не превышает p^c для некоторого натурального c, не зависящего от p; $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — какие-нибудь множества простых чисел, дающие в объединении $\pi(G)$. Если для каждого π_i все силовские π_i-подгруппы группы G локально нильпотентны, то группа G обладает конечным рядом характеристических подгрупп с локально нильпотентными факторами.*

Следствие 5 нетрудно доказать пользуясь теоремой 3 и теоремой Шрейера, использовавшейся уже в доказательстве следствия 3.

Примечание 2. В доказательстве теоремы 1 установлено, что при ее условиях $l_\pi(G) \leqslant 2c$ или даже $l_\pi(G) \leqslant c$, если $\pi(G)$ не содержит простых чисел Ферма.

Примечание 3. Лемма 10, теоремы 1 и 3 и неравенства, отмеченные в примечаниях 1 и 2, сохраняют силу, если требования периодичности и локальной разрешимости группы G ослабить до требования ее локальной конечности и локальной π-разрешимости.

Примечание 4. В настоящей работе обоснованы все результаты, анонсированные в [8].

1. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups.— New York etc. : Springer, 1982.— 481 p.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I.— Berlin etc. : Springer, 1967.— 793 S.
3. *Hall P., Higman G.* On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem // Proc. London Math. Soc.— 1956.— **6**, N 21.— P. 1—42.
4. *Брюханова Е. Г.* 2-длина и 2-период конечной разрешимой группы // Алгебра и логика.— 1979.— **18**, № 1.— С. 9—31.
5. *Брюханова Е. Г.* Связь между 2-длиной и производной длиной силовской 2-подгруппы в конечной группе // Мат. заметки.— 1981.— **29**, № 2.— С. 161—170.
6. *Huppert B., Blackburn N.* Finite groups. II.— Berlin etc. : Springer, 1982.— 531 p.
7. *Журтов А. Х.* О локально-разрешимых группах конечного показателя // Структурные свойства алгебраических систем.— Нальчик : Кабардино-Балк. ун-т, 1981.— С. 39—41.
8. *Черников Н. С., Петравчук А. П.* Некоторые условия разрешимости и радикальности периодических локально разрешимых групп // X Всесоюз. симпоз. по теории групп (Гомель, 9—12 сент. 1986 г.): Тез. докл.— Минск: Ин-т математики АН БССР, 1986.— С. 255.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 11.07.86