Таким образом, формулы (52), (53) дают асимптотические решения уравнения (1) соответственно в случаях $k = 2$ и $k = 4$, а формулы (54)—(59) и (60)—(64) — точные решения (1) в случаях $k = 2$ и $k = 4$.

Метод, с помощью которого в работе получены асимптотические и точные решения, может быть успешно применен и для нахождения решений других нелинейных уравнений, инвариантных относительно группы Галилея.

1. *Теория солитонов*: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.— М. : Наука, 1980.— 319 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 500 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— Киев : Вища шк., 1976.— 620 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 09.06.87

УДК 517.544

И. М. Спитковский, П. М. Тишин

О частных индексах треугольных матриц порядка выше 2

Пусть Γ — замкнутый спрямляемый контур, ограничивающий конечносвязную область D^+, D^- ($\ni \infty$) — дополнение к $D^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости. Обозначим через $E_r^{\pm}$, $0 < r \leqslant \infty$, классы Смирнова функций, аналитических в $D^{\pm}$, $\overset{0}{E}{}_r^- = \{\varphi \in E_r^- : \varphi(\infty) = 0\}$. Факторизацией в L_p, $1 < p < \infty$, заданной на Γ $(n \times n)$ — матрицы-функции G, как известно (см., например, [1]), называется ее представление в виде

$$G = G_+ \Lambda G_-^{-1}, \tag{1}$$

где $G_{\pm} \in E_p^{\pm}$, $G_{\pm}^{-1} \in E_q^{\pm}$ (принадлежность матриц-функций каким-либо функциональным классам здесь и ниже понимается поэлементно, $q = p/(p-1)$), $\Lambda(t) = \operatorname{diag}[(t - z_0)^{\varkappa_1}, \ldots, (t - z_0)^{\varkappa_n}]$, z_0 — фиксированная точка области D^+, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — целые числа, называемые частными индексами G. Без ограничения общности можно считать, что $0 \in D^+$, и выбирать $z_0 = 0$. При фиксированном p частные индексы определяются по матрице G однозначно.

Если $G \in L_\infty$, то для нетеровости в L_p векторной краевой задачи Римана с матричным коэффициентом G необходимо и достаточно, чтобы существовала факторизация (1), для которой оператор $G_-^{-1} \Lambda^{-1} P_- G_+^{-1}$ (P_- — определенный на прямой сумме $E_p^+ \dotplus \overset{0}{E}{}_p^-$ проектор параллельно первому слагаемому на второе) ограничен в L_p. Такая факторизация называется Φ-факторизацией в L_p матрицы G.

Вопросам существования факторизации, Φ-факторизации и вычисления частных индексов при различных ограничениях на контур Γ и матрицу-функцию G посвящена обширная литература (см. [1—4] и приведенную там библиографию). Нас будет интересовать случай треугольной матрицы $G \in L_\infty$ с Φ-факторизуемыми в L_p диагональными элементами. В этом случае матрица G также Φ-факторизуема в L_p, а ее факторизацию можно получить с помощью конечного числа алгебраических операций и решений скалярных задач Римана [1]. Тем самым в принципе можно вычислить частные индексы произвольной треугольной матрицы-функции с Φ-факторизуемыми диагональными элементами. Г. Н. Чеботарев [5] (см. также [1]) указал алгоритм вычисления частных индексов при $n = 2$, согласно которому $\varkappa_1 = k_1 + \gamma$, $\varkappa_2 = k_2 - \gamma$, где k_1, k_2 — индексы диагональных элементов, расположенных с нулевым внедиагональным элементом в одной строке и столбце соответственно, $\gamma = 0$ при $k_1 \geqslant k_2 - 1$ и γ может быть любым целым числом из промежутка $[0, k_2 - k_1]$ в противном случае. В работе [1] поставлена задача описания возможных наборов частных индексов треугольных матриц с заданными индексами диагональных элементов при $n > 2$. Решению этой задачи и посвящена настоящая работа. Обозначим через $\mathcal{I}$ матрицу, на побочной диагонали которой расположены единицы, а остальные элементы нули. Матрицы-функции G и $\mathcal{I}G\mathcal{I}$, очевидно, (Φ-) факторизуемы лишь одновременно, а их частные индексы совпадают. Вместе с тем, если G верхнетреугольна, то $\mathcal{I}G\mathcal{I}$ нижнетреугольна, и наоборот. Поэтому достаточно изучить случай верхнетреугольной матрицы-функции G, результаты для нижнетреугольной получаются из него заменой порядка следования диагональных элементов на противоположный.

Итак, пусть G — верхнетреугольная матрица-функция, диагональные элементы которой Φ-факторизуемы, а индекс j-го диагонального элемента равен k_j. Положим

$$D(t) = \operatorname{diag}\,]t^{k_1}, \dots, t^{k_n}]. \tag{2}$$

Тогда матрица-функция $D^{-1}G$ верхнетреугольна, имеет Φ-факторизуемые с нулевыми индексами диагональные элементы, и поэтому сама Φ-факторизуема с нулевыми частными индексами и верхнетреугольными факторизационными множителями (см. теорему 4.6 из [1])

$$D^{-1}G = F_+F_-^{-1}. \tag{3}$$

Отсюда $G = (DF_+D^{-1})\,DF_-^{-1}$. Матрица-функция DF_+D^{-1}верхнетреугольна и аналитична в D^+, за исключением возможных полюсов в нуле порядка не выше $k_j - k_i$ на (i, j)-м месте. Следовательно, $DF_+D^{-1} = F_+^{(1)} A$, где A — верхнетреугольная матрица-функция с единицами на главной диагонали, (i, j)-й элемент которой есть при $i < j$ полином от t^{-1} степени не выше $k_j - k_i$, а матрица-функция $F_+^{(1)}$ уже не имеет полюсов в D^+. При этом ненулевые элементы A расположены на тех же местах, что и неаналитические элементы DF_+D^{-1}. Но тогда факторизация (1) матрицы-функции $G = F_+^{(1)}ADF_-^{-1}$ получается из факторизации $X = X_+\Lambda X_-^{-1}$ рациональной матрицы

$$X = AD = (F_+^{(1)})^{-1}DF_+, \tag{4}$$

если положить $G_+ = F_+^{(1)}X_+$, $G_- = F_-X_-$. Частные индексы X и G, следовательно, совпадают. Тем самым установлено, что без ограничения общности можно рассматривать матрицы G, (i, j)-й элемент которых есть 0 при $i > j$ или $k_i > k_j$ и разлагается по целым степеням от k_i до k_j в противном случае.

Рассмотрим сначала вопрос о возможных значениях частных индексов матрицы, все отличные от 0 внедиагональные элементы которой расположены в верхней строке. Этот случай, во-первых, представляет определенный самостоятельный интерес, во-вторых, на нем базируется рассмотрение случая произвольной треугольной матрицы.

Описание возможных значений частных индексов будет дано в терминах отношения порядка на множестве наборов из $\mathbb{Z}^n$, к определению которого мы сейчас переходим.

Определение 1. *Будем говорить, что набор $\{k_i^{(1)}\}$ получается из набора $\{k_i\}$ с помощью элементарной операции (высоты $\mu \in \mathbb{Z}_+$), если при некотором $s \in 2, \dots, n$*

$$k_s > k_1 + \mu, \quad k_s^{(1)} = k_1 + \mu, \quad k_1^{(1)} = k_s - \mu, \quad k_j^{(1)} = k_j, \quad j \neq 1, s. \tag{5}$$

В этом случае будем писать $\{k_i^{(1)}\} = T_{\mu,s}\{k_i\}$.

Определение 2. *Набор $\{k_i\}$ будем считать мажорирующим набор $\{k_i^{(1)}\}$, если $\{k_i^{(1)}\}$ совпадает с $\{k_i\}$ либо получается из $\{k_i\}$ с помощью некоторого числа элементарных операций невозрастающей высоты:*

$$\{k_i^{(1)}\} = T_{m_k, s_k} \ldots T_{m_1, s_1} \{k_i\}, \quad m_1 \geqslant \ldots \geqslant m_k, \tag{6}$$

и записывать этот факт в виде $\{k_i\} \succ \{k_i^{(1)}\}$.

Непосредственно из определения усматривается, что $\succ$ действительно является отношением частичного порядка.

Теорема 1. *Числа* $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ *являются частными индексами некоторой матрицы-функции* G *с ненулевыми внедиагональными элементами лишь в верхней строке и индексами диагональных элементов* $k_1, \ldots, k_n$ *тогда и только тогда, когда некоторая перестановка набора* $\{\varkappa_i\}$ *мажорируется (в смысле отношения* $\succ$*) набором* $\{k_i\}$.

Доказательство. Необходимость. Процедура построения матриц из представления (3) такова (см. [1]), что F_+ наследует от G равенство нулю внедиагональных элементов всех строк, начиная со второй. Но тогда этим же свойством обладает и определяемая формулой (4) матрица X. Таким образом, все сводится к рассмотрению матриц вида

$$\nabla(t) = \begin{pmatrix} 1 & Q_{12}t^{-\mu_2} & \ldots & Q_{1,n-1}t^{-\mu_{n-1}} & Q_{1,n}t^{-\mu_n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} D(t), \tag{7}$$

где D определяется формулой (2), Q_{1j} — полиномы, $0 \leqslant \mu_j \leqslant k_j - k_1$ при $k_j > k_1$ и $\mu_j = 0$ в противном случае $(j = 2, \ldots, n)$. Понижая при необходимости μ_j, можно добиться того, чтобы у ненулевого Q_{1j} был отличен от 0 свободный член b_j. Считая эту процедуру выполненной, выберем среди чисел μ_j наибольшее — μ_{j_0} (если таких несколько, то любое из них). Если $\mu_{j_0} = 0$, то представление (5) дает факторизацию матрицы ∇, так что наборы $\{\varkappa_j\}$ и $\{k_j\}$ совпадают с точностью до перестановки.

Пусть теперь $\mu_{j_0} > 0$. Тогда полиномы Q_{1j_0} и $z^{\mu_{j_0}}$ взаимно просты, так что существуют полиномы f_0 и f_1 такие, что $f_0(z) Q_{1j_0}(z) + f_1(z) z^{\mu_{j_0}} = b_{j_0}$. Положим $D_1(t) = \mathrm{diag}\,[t^{k_1^{(1)}}, \ldots, t^{k_n^{(1)}}]$, где $k_j^{(1)}$ определяются формулами (5) при $s = j_0$, $\mu = \mu_{j_0}$. Матрицы-функции

$$\nabla_+ = \begin{pmatrix} \dfrac{Q_{1j_0}}{b_{j_0}} & 0 & \ldots & -f_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{t^{\mu_{j_0}}}{b_{j_0}} & 0 & \ldots & f_0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & -\dfrac{Q_{12}t^{\mu_{j_0}-\mu_2}}{b_{j_0}} & \ldots & 1 & \ldots & -\dfrac{Q_{1n}t^{\mu_{j_0}-\mu_n}}{b_{j_0}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$\nabla_-(t) = [D_1(t)]^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \dots & b_{j_0} t^{-\mu_{j_0}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{t^{\mu_{j_0}}}{b_{j_0}} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} D(t)$$

(ненулевые внедиагональные элементы расположены лишь в строке и столбце с номером j_0) аналитичны и невырождены в $\overline{D}^+$ и $\overline{D}^-$ соответственно. Поэтому частные индексы ∇ совпадают с частными индексами матрицы

$$\nabla_1 = \nabla_+^{-1} \nabla \nabla_-^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & f_0 \dfrac{Q_{12}}{t^{\mu_2}} & \dots & f_0 \dfrac{(Q_{1j_0} - b_{j_0})}{t^{\mu_{j_0}}} + f_1 & \dots & f_0 \dfrac{Q_{1n}}{t^{\mu_n}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} D_1(t).$$

Матрица ∇_1 имеет ту же структуру (7), что и ∇, причем все показатели μ_j, кроме μ_{j_0}, у них совпадают, а μ_{j_0} уменьшилось по крайней мере на единицу. Наборы же индексов диагональных элементов ∇ и ∇_1 связаны соотношением $\{k_j^{(1)}\} = T_{\mu_{j_0}, j_0}\{k_j\}$.

Повторяя конечное число раз описанную процедуру, мы придем к матрице ∇_N вида (6), для которой $\mu_2 = \dots = \mu_n = 0$. Ее частные индексы совпадают с индексами диагональных элементов $k_1^{(N)}, \dots, k_n^{(N)}$. Следовательно, набор частных индексов исходной матрицы ∇ также (с точностью до перестановки) совпадает с $\{k_j^{(N)}\}_{j=1}^n$. Но каждый из наборов $\{k_j^{(i)}\}_{j=1}^n$ получается из $\{k_j^{(i-1)}\}_{j=1}^n$ с помощью элементарной операции, высота которой есть максимальный порядок полюса элементов верхней строки ∇_{i-1} и поэтому не возрастает с ростом i. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Пусть некоторая перестановка (обозначим ее $\{k_i'\}$) набора $\{\varkappa_i\}$ мажорируется набором $\{k_i\}$. Тогда имеет место соотношение (6).

Введем матрицы

$$X_j(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & t^{-\mu_j} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{\mu_j} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(элементы $t^{\pm\mu_j}$ расположены в s_j-м столбце и строке соответственно) и положим

$$X = X_k \dots X_1 D. \tag{8}$$

Покажем, что набор частных индексов матрицы X совпадает с $\{\varkappa_i\}$. Для этого определим наборы $\{k_i^{(j)}\}$ следующим рекуррентным образом: $k_i^{(0)} = k_i$, $\{k_i^{(j)}\} = T_{\mu_j, s_j}\{k_i^{(j-1)}\}$. Пусть $D_j = \operatorname{diag}[t^{k_1^{(j)}}, \dots, t^{k_n^{(j)}}]$, $j = 0, \dots, k$, $Y_j = D_j^{-1} X_j D_{j-1}$. Легко убедиться, что $\det Y_j = -1$ и входящие в элементы Y_j степени t неположительны. Но тогда матрица Y_j аналитична вместе с обратной в области D^-. Последовательно подставляя в (8) D_jY_j вместо X_jD_{j-1}, $j=1,\dots,k$, получаем $X=D_kY_k\dots Y_1$. Последнее равенство доставляет факторизацию $X=X_+\Lambda X_-^{-1}$ матрицы X, если считать $X_+=I$ и $\Lambda=D_k$.

Далее, все полюса рациональной матрицы-функции $X_k\dots X_1$ сосредоточены в нуле и могут быть лишь у элементов ее первой строки $x_{11},\dots,x_{1n}$. Предположим, что x_{11} не обращается в нуль на Γ. Обозначив через r_j главную часть ряда Маклорена функции x_{1j}, $j=2,\dots,n$, положим $z_j=x_{11}^{-1}r_j$ и

$$\nabla=\begin{pmatrix}1 & z_2 & \dots & z_n\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $Y_+=X_k\dots X_1\nabla^{-1}$ полиномиальна, имеет постоянный определитель, а поэтому аналитична вместе с обратной в области D^+. Отсюда матрица $\nabla D=Y_+^{-1}X$ имеет те же частные индексы, что и X, т. е. $\{\varkappa_i\}$. Вместе с тем у этой матрицы все ненулевые внедиагональные элементы расположены в первой строке.

Элемент x_{11} не может быть тождественно равен нулю, так как все коэффициенты матриц X_j положительны. Следовательно, если x_{11} и обращается в нуль на Γ, то лишь в конечном числе точек. Этот случай сводится к уже рассмотренному случаю отсутствия нулей на Γ заменой аргумента t на λt при подходящем выборе постоянной λ. Теорема 1 доказана.

Перейдем теперь к общему случаю верхнетреугольной матрицы. Введем в связи с этим еще одно отношение порядка на $\mathbb{Z}^n$.

Определение 3. *Будем говорить, что набор* $\{k'_i\}_{i=1}^n$ *слабо мажорируется набором* $\{k_i\}_{i=1}^n$, *если существует последовательность наборов* $\{k_i^{(j)}\}_{i=n-j}^n$, $j=0,\dots,n-1$, *такая, что* $k_n^{(0)}=k_n$, $k_i^{(n-1)}=k'_i$, $i=1,\dots,n$, *и* $\{k_{n-j-1},\ \{k_i^{(j)}\}_{i=n-j}^n\}\succ\{k_i^{(j+1)}\}_{i=n-j-1}^n$, $j=0,\dots,n-2$. *При выполнении этих условий будем записывать* $\{k_i\}\succ^*\{k'_i\}$.

Теорема 2. *Числа* $\varkappa_1,\dots,\varkappa_n$ *являются частными индексами некоторой верхнетреугольной матрицы-функции* G *с индексами диагональных элементов* $k_1,\dots,k_n$ *тогда и только тогда, когда некоторая перестановка набора* $\{\varkappa_i\}$ *слабо мажорируется набором* $\{k_i\}$.

Доказательство. Как отмечалось ранее, можно ограничиться рассмотрением матриц вида ∇D, где D определяется формулой (2), а ∇ — рациональная верхнетреугольная матрица с единицами на главной диагонали и полюсами лишь в нуле. Представим эту матрицу в виде $\nabla=\nabla_1\dots\nabla_n$, где ∇_i обладает теми же свойствами, что ∇, и, кроме того, все отличные от нуля ее внедиагональные элементы расположены в i-й строке. Иными словами, $\nabla_i=\operatorname{diag}[I,\nabla_i^{(0)}]$, где $\nabla_i^{(0)}$ — матрица порядка $n-i+1$ и той же структуры, что первый множитель правой части формулы (7).

Пусть $M=\operatorname{diag}[t^{m_1},\dots,t^{m_n}]$, $m_j\in\mathbb{Z}$. В соответствии с блочной структурой ∇_i положим $M=\operatorname{diag}[M_1,M_2]$. Тогда факторизация произведения ∇_iM имеет вид $\operatorname{diag}[I,A_+]\operatorname{diag}[M_1,M'_2]\operatorname{diag}[I,A_-]$, где A_+ — полиномиальная матрица с постоянным определителем. При этом согласно теореме 1 наборы показателей диагональных элементов M'_2 и M_2 связаны лишь отношением порядка $\succ$.

Далее, при $j<i$ $\nabla_j\operatorname{diag}[I,A_+]=\operatorname{diag}[I,A_+]\nabla'_j$, где ∇'_j — матрица той же структуры, что и ∇_j. Поэтому факторизация ∇D может быть получена последовательно факторизацией $\nabla_{n-1}D$ $(=B_+^{(1)}D^{(1)}B_-^{(1)})$, заменой $\nabla_{n-2}B_+^{(1)}$ на $B_+^{(1)}\nabla'_{n-2}$, факторизацией $\nabla'_{n-2}D^{(1)}$ $(=B_+^{(2)}D^{(2)}B_-^{(2)})$, заменой $\nabla_{n-3}B_+^{(1)}B_+^{(2)}$ на $B_+^{(1)}B_+^{(2)}\nabla'_{n-3}$ и т. д. Понятно, что при этом можно получить все те и только те наборы частных индексов, которые указаны в формулировке теоремы.

Полученное описание (теорема 2) возможных значений частных индексов при больших n труднообозримо. Приведем такое описание лишь при $n = 3$.

Теорема 3. *Частные индексы верхнетреугольной матрицы-функции 3-го порядка с индексами диагональных элементов* k_1, k_2, k_3 *равны* $k_1 + \gamma_1$, $k_2 - \gamma_1 + \gamma_2$, $k_3 - \gamma_2$, *где для целых неотрицательных чисел* γ_1, γ_2 *возможны следующие значения*: $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ *при* $k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3$; $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 < k_3 - k_2$ *при* $k_1 \geqslant k_3 > k_2$; $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 < k_2 - k_1$ *при* $k_2 > k_1 \geqslant k_3$; $\gamma_1 < k_2 - k_1$, $\gamma_1 - \gamma_2 \geqslant k_2 - k_3$ *либо* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1 < k_3 - k_1$ *при* $k_2 \geqslant k_3 > k_1$; $\gamma_2 < k_3 - k_2$, $\gamma_2 - \gamma_1 \geqslant k_1 - k_2$ *либо* $\gamma_1 \leqslant \gamma_2 < k_3 - k_1$ *при* $k_3 > k_1 \geqslant k_2$; $\gamma_1 \leqslant \frac{1}{3}(k_3 + k_2 - 2k_1)$, $\gamma_2 \leqslant k_3 - k_1 - \frac{1}{3}(k_3 + k_2 - 2k_1)$ *при* $k_3 > k_2 > k_1$.

Таким образом, при $n = 3$ и неубывающей последовательности индексов диагональных элементов набор частных индексов подчиняется лишь условиям $\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j = \sum_{j=1}^{n} k_j$, $\min_{1\leqslant j\leqslant n} \varkappa_j \geqslant \min_{1\leqslant j\leqslant n} k_j$, $\max_{1\leqslant j\leqslant n} \varkappa_j \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} k_j$. Эти условия, как известно [1], необходимы при любом n. Однако уже при $n = 4$ они перестают быть достаточными. Например, при $k_1 = 0$, $k_2 = 3$, $k_3 = 4$, $k_4 = 7$ невозможен набор частных индексов $\{6, 6, 1, 1\}$.

1. *Литвинчук Г. С., Спитковский И. М.* Факторизация матриц-функций. Ч. 1 и 2.— Одесса, 1984.— 460 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 2410-84 Деп.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.— М. : Наука, 1968.— 756 с.
3. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений.— М. : Наука, 1970.— 379 с.
4. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики / ВИНИТИ.— 1975.— **7**.— С. 5—162.
5. *Чеботарев Г. И.* Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка // Успехи мат. наук.— 1956.— **11**, вып. 3.— С. 192—202.

Одесса Получено 27.09.85

УДК 517.982

Е. В. Токарев

Инъективные банаховы пространства в классах финитной эквивалентности

Обозначим через $\mathscr{B}$ класс всех бесконечномерных банаховых пространств и рассмотрим класс $\mathscr{K} \subset \mathscr{B}$.

$X \in \mathscr{B}$ назовем *$\mathscr{K}$-инъективным*, если для любого $Y \in \mathscr{K}$, содержащего подпространство, изометричное X (символически: $X \hookrightarrow Y$), найдется проектор единичной нормы из Y на X.

Класс всех $\mathscr{K}$-инъективных банаховых пространств обозначим через $\mathfrak{P}_1(\mathscr{K})$. Класс $\mathfrak{P}_1(\mathscr{B})$, обозначаемый обычно $\mathfrak{P}_1$, интенсивно изучался в связи с вопросами расширения операторов: легко видеть, что $X \in \mathfrak{P}_1$, если и только если любой оператор T, отображающий X в произвольное $Y \in \mathscr{B}$, можно без увеличения нормы продолжить до оператора из Z ($X \hookrightarrow Z$) в Y. Обзор результатов исследования $\mathscr{B}$-инъективных банаховых пространств и связанных с ними вопросов содержится в работе Линденштраусса [1].

Настоящая работа обобщает исследования [1] на случай $\mathscr{K}$-инъективных банаховых пространств, где $\mathscr{K}$ — некоторый *класс финитной эквивалентности*. Приведем точное определение этого понятия.

Следуя [2], скажем, что $X \in \mathscr{B}$ *финитно представимо* в $Y \in \mathscr{B}$ (запись: $X \leqslant_f Y$), если для любого конечномерного подпространства $X_n \hookrightarrow X$ и каж-