1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М. : Мир, 1973.— 472 с.
2. *Clarke F. H.* Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— **205**.— P. 247—262.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.— М. : Наука, 1981.— 384 с.
4. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 144 с.
5. *Фань-Цзи.* Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры.— М. : Физматгиз, 1963.— С. 31—39.

Каменец.-Подол. пед. ин-т Получено 10.10.85

УДК 517.53

Л. А. Гудзь

О некоторых применениях вещественных дифференциальных уравнений в теории специальных классов аналитических функций

Рассматривается класс P регулярных в круге $E(z:|z|<1)$ функций $p(z)$, удовлетворяющих условиям: $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $S(W,\alpha)=W(z)+\alpha zW'(z)/W(z)$, где $\alpha>0$ и не зависит от z, $W(z)$ — регулярна в E, для любого $z\in E$. $W(z)\neq 0$, $W(0)=1$. Если $\lambda(\alpha)$ неубывающая на сегменте $[a,b]$, $0\leqslant a<b$, положительная функция, для которой $4m+1\leqslant\lambda(b)-\lambda(a)\leqslant 4m+3$, где m — целое или нуль, то регулярное в E решение (если оно существует) $q(z)$, $q(0)=1$, уравнения*

$$\exp\int_a^b \ln S(q,\alpha)\,d\lambda(\alpha)=p(z),\quad p(z)\in P, \tag{1}$$

тоже принадлежит P.

Заметим, что $q(z)\neq 0$ в E, так как из $q(z_0)=0$, $z_0\in E$, следует, что точка z_0 есть простой полюс функции $S(q;\alpha)$ при каждом $\alpha>0$, что невозможно, поскольку $p(z)\in P$.

Докажем теперь, что $\operatorname{Re} q(z)>0$ в E. Полагая $q(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$, где $z=\rho e^{i\varphi}$, $0\leqslant\rho<1$, и обозначая $u=u(\rho,\varphi)$, $v=v(\rho,\varphi)$, $q(z)=u+iv$, на окружности $|z|=\rho$ получаем

$$S(q,\alpha)=u+iv+\alpha(\partial v/\partial\varphi-i\partial u/\partial\varphi)(u+iv)^{-1}. \tag{2}$$

В точке окружности $|z|=\rho$, в которой функция u достигает своего абсолютного минимума на этой окружности, имеем $\partial u/\partial\varphi=0$, $\partial v/\partial\varphi=\rho du^*/d\rho$, где $u^*=u^*(\rho,\varphi_1)$, $\varphi_1=\varphi_1(\rho)$ и $du^*/d\rho$ есть полная производная от u^*, вычисленная в этой точке. Очевидно, $du^*/d\rho\leqslant 0$, поскольку абсолютный минимум монотонно убывает с ростом ρ. Если теперь предположить, что абсолютный минимум на $|z|=\rho$ есть нуль, то из (2) получаем

$$S(q;\alpha)=i\left(v-\frac{\alpha}{V}\frac{du^*}{d\rho}\right),\quad v\neq 0. \tag{3}$$

Из (3) следует $vS(q;\alpha)=i(v^2-\alpha du^*/d\rho)$, где $v^2-\alpha du^*/d\rho>0$. Таким образом,

$$S(q;\alpha)=\left|v-\frac{\alpha}{v}\frac{du^*}{d\rho}\right|e^{i(\pi/2+\delta)},\quad \delta=0 \text{ или } -\pi. \tag{4}$$

На основании (4) имеем

$$\operatorname{Re} p(z)=\operatorname{Re}\exp\int_a^b \ln S(q;\alpha)\,d\lambda(\alpha)=M\cos\theta,$$

где $M = \exp\int\limits_a^b |\ln S(q;\alpha)|\, d\lambda(\alpha)$, $\theta = \frac{\pi}{2}[\lambda(b) - \lambda(a)]$. Так как по условию теоремы $4m + 1 \leqslant \lambda(b) - \lambda(a) \leqslant 4m = 3$, то $2\pi m + \pi/2 \leqslant \theta \leqslant 2\pi m + 3\pi/2$. Отсюда следует, что $\cos\theta \leqslant 0$. Это невозможно, так как $\operatorname{Re} p(z) > 0$. Итак, $u^* > 0$ в E, так как $u = 1$ в точке $z = 0$, а потому $u > 0$ в E, что и требовалось доказать.

Из доказанной теоремы вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Пусть $q(z)$, $q(0) = 1$, есть регулярное в E решение уравнения (если оно существует)*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \exp\int\limits_{a_k}^{b_k} \ln S(q;\alpha)\, d\lambda_k(\alpha) = p(z), \tag{5}$$

где $p(z) \in P$, $0 \leqslant a_k < b_k$; $A_k > 0$, $A_1 + \ldots + A_n = 1$, а $\lambda_k(\alpha)$ — неубывающие на $[a_k, b_k]$ функции, удовлетворяющие условиям $4m_k + 1 \leqslant \lambda_k(b_k) - \lambda_k(a_k) \leqslant 4m_k + 3$, где m_k — целое или нуль, $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $q(z) \in P$.

Здесь можно даже считать $n = \infty$, если предположить существование регулярного в E решения такого уравнения.

Доказательство следствия 1 и его усиления следует из того, что при предположении, что $\operatorname{Re} q = 0$ в некоторой точке E, можно найти такую точку, в которой это равенство справедливо и модуль аффикса самой точки минимальный (он необходимо больше нуля, так как $q(0) = 1$). В этой точке вещественная часть слагаемых не больше нуля, на основании доказанной теоремы, что невозможно, так как $\operatorname{Re} p(z) > 0$.

Следствие 2. *Пусть $q(z)$ есть регулярное в E решение (если оно существует) уравнения $\prod\limits_1^n S(q;\alpha_k)^{\lambda_k} = p(z)$, где $p(z) \in P$, $\alpha_k \geqslant 0$, $\lambda_k > 0$, $4m + 1 \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \leqslant 4m + 3$, m — целое или нуль. Тогда $q(z) \in P$.*

Доказательство следствия 2 легко получается, если в формуле (1) считать функцию $\lambda(\alpha)$ ступенчатой, поскольку там рассматривается интеграл Стильтьеса. Если $q(z)$ есть регулярное в E решение какого-нибудь из указанных выше уравнений, то, полагая $q(z) = zf'(z)/f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, получаем однолистную звездную в E функцию, принадлежащую некоторому подклассу этого класса. Среди этих классов содержится и класс α-выпуклых функций Мокану. В настоящее время эти подклассы изучены мало, поскольку не установлены достаточно общие и простые условия разрешимости соответствующих уравнений.

Результаты данной статьи получены методом, отличным от применяемых в аналогичных исследованиях [1, 2].

1. *Lewandowski Z., Miller S.* γ-Starlike functions // Ann. Univ. M. C. Sklocl.— 1974.— **38**, N 5.— *P*. 53—58.
2. *Miller S.* On a class of starlike functions // Ann. pol. math.— 1976.— **32**, N 1.— P. 77—81.

Киев. политехн. ин-т

Получено 23.10.85