системы нулевого приближения (12) будет представляться в виде абсолютного и равномерно сходящегося ряда Ли

$$\tilde{x}' = \exp(tU(x_0))\,x_0 \tag{36}$$

во всей области $[|t| \leqslant T] \times \bar{V}_0(x)$ и представлять в ней аналитическую функцию переменных t, x_0. Тогда, принимая в формуле (13)

$$\bar{z}_j^{(m)} = \exp(tU(x_0))\,x_{0j}, \; j = \overline{1, n}, \tag{37}$$

и учитывая свойство точечности преобразований (37), для решения централизованной системы m-го приближения получим

$$\bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon) = \exp(tU(x_0))\exp(\tau N^{(m)}(x_0))\exp(\varepsilon S^{(m)}(x_0))\,x_{0j}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Применяя теорему 1 к указанному случаю, получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть решение системы нулевого приближения* (12) *представляется рядом Ли* (36) *в замкнутой области* $[t \leqslant T] \times \bar{V}_0(x)$. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\delta > 0$ *можно указать такой интервал* $\mathcal{J}_{\varepsilon_{01}} = [0, \varepsilon_{01}]$, *что при всех* $\varepsilon \in \mathcal{J}_{\varepsilon_{01}}$ *выполняются неравенства* $|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon)| < \delta$, $j = \overline{1, n}$, *для всех точек* $(t, t_0, x_0, \varepsilon) \in [|t| \leqslant T] \times [|t| \leqslant T] \times \bar{V}_0(x) \times [0, \varepsilon_{01}]$, *причем модуль разности* $|x_j'(t, \varepsilon) - \bar{x}_j'^{(m)}(t, \varepsilon)|$, *как функция* ε, *есть величина порядка малости* ε^{m+1}.

1. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 1.— С. 35—44.
2. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Теоретико-групповые аспекты асимптотических методов нелинейной механики // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— Вып. 5.— С. 34—45.
3. *Бибиков Ю. Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.— 232 с.
4. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.; Л. : Гостехиздат, 1950.— 436 с.
5. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Векторные поля, алгебры и группы, порождаемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений, и их свойства.— Киев, 1985.— 63 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.73).

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 01.07.86

УДК 517.9

В. П. Маслов, Г. А. Омельянов

Взаимодействие коротких волн малых амплитуд в слабо дисперсионной плазме. II

Настоящая работа является продолжением работы [1].

1. Альфвеновские волны в косом магнитном поле. Пусть при $t = 0$ заданы две линейные альфвеновские волны

$$U|_{t=0} = \xi_A^+(k_1)\,\Psi_1^0(x)\exp(i\langle k_1, x\rangle/\varepsilon) + \xi_A^+(k_2)\,\Psi_2^0(x)\exp(i\langle k_2, x\rangle/\varepsilon) + \text{к. с.}, \tag{1}$$

где векторы $\xi_A^+(k)$ определены в (7) [1], Ψ_j^0 — ограниченные скалярные функции из $C^\infty(R^3)$.

Будем предполагать, что векторы B_0, k_1, k_2 не лежат в одной плоскости, причем $\langle B_0, k_j\rangle \neq 0$, $j = 1, 2$, и $\langle B_0, k_1 \pm k_2\rangle \neq 0$.

В силу линейности дисперсионных соотношений (8) [1] любая комбинация $l_1S_1 + l_2S_2$ фаз $S_j = \omega_A^+(k_j)\,t + \langle k_j, x\rangle$ альфвеновских волн является резонансной. Тем не менее в косом магнитном поле альфвеновские волны оказываются невзаимодействующими (по $\operatorname{mod} O(\varepsilon)$): главный член асимптотики находится так же, как и в линейной теории, а нелинейность системы (4) [1] приводит лишь к появлению поправок порядка $O(\varepsilon)$.

Теорема 2. *Пусть* $\nu = \mathrm{const} > 0$. *Тогда асимптотическое по* $\operatorname{mod} O(\varepsilon)$ *решение задачи* (4) [1], (1) *имеет вид*

$$U = \xi_A^+(k_1)\,\Psi_1^0(x + (B_0/\sqrt{\rho_0} - V_0)\,t)\exp(iS_1/\varepsilon - \beta_1 t) + \xi_A^+(k_2)\,\Psi_2^0(x + \\ + (B_0/\sqrt{\rho_0} - V_0)\,t)\exp(iS_2/\varepsilon - \beta_2 t) + \text{к. с.}, \qquad (2)$$

где $S_j = \omega_j t + \langle k_j, x\rangle$, $\omega_j = \langle k_j, B_0/\sqrt{\rho_0} - V_0\rangle$, $\beta_j = \alpha\,|k_j|^2/2$, $\alpha \geqslant 0$.

Доказательство. Асимптотическое решение задачи (4) [1], (1) будем искать в виде (12) [1]. Повторяя такие же рассуждения, как и в п. 2 [1], находим фазы альфвеновских волн S_1, S_2 и вектор-функции

$$U_l = \xi_A^+(k_l)\,\Psi_l(\tau_l, x, t), \quad l = 1, 2, \qquad (3)$$

с точностью до скалярных множителей $\Psi_l \in \mathfrak{M}_1$.

Нетрудно установить, что при наших предположениях относительно B_0, k_1, k_2 линейные комбинации $l_1 S_1 + l_2 S_2$ удовлетворяют только альфвеновскому корню дисперсионного уравнения (6) [1]. Отсюда $S_3 = \omega_3 t + \langle k_3, x\rangle$, а вектор-функция U_3 имеет вид, аналогичный (3). Здесь $k_3 = l_1 k_1 + l_2 k_2$, $\omega_3 = \omega_A^+(k_3)$, l_1, $l_2 \neq 0$,— некоторые целые числа.

Теперь, рассматривая младшие члены в соотношении (13) [1], приходим к уравнениям (19) [1] и условиям ортогональности правой части (19) [1] векторам $\xi_j^+ = (\zeta_A(k_j), 0, \zeta_A(k_j)/\sqrt{\rho_0})$, $j = 1, 2, 3$. чтем, что векторы $\zeta_A(k_j)$ и $\eta_A^+(k_j)$ параллельны, $\zeta_A(k_j)$ и k_j ортогональны и $\zeta_A(k_3) = l_1\zeta_A(k_1) + l_2\zeta_A(k_2)$. В результате несложных вычислений получаем равенство $\langle \xi_j^*, P_j\mathscr{F}\rangle = \alpha\,|k_j|^2\,|\zeta_A(k_j)|^2 \dfrac{\partial^2}{\partial\tau_j^2}\Psi_j(\tau_j, x, t)$. Таким образом, для альфвеновских волн условия ортогональности (21) [1] эквивалентны уравнениям теплопроводности

$$\frac{d\Psi_j}{dt} = \beta_j \frac{\partial^2\Psi_j}{\partial\tau^2}, \quad \beta_j = \alpha\,|k_j|^2/2, \quad j = 1, 2, 3. \qquad (4)$$

Из (12) [1], (4) и начальных условий (1) находим главный член асимптотического решения (2).

Нам осталось доказать разрешимость уравнения (20) [1]. Учитывая явный вид функций ψ_j, это уравнение можно представить в виде

$$\Lambda\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \omega_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}, k_1\frac{\partial}{\partial\tau_1} + k_2\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right) W(\tau_1, \tau_2, x, t) = \\ = G_1(x, t)\exp(i(\tau_1 + \tau_2)) + G_2(x, t)\exp(i(\tau_1 - \tau_2)) + \text{к. с.}$$

Отсюда $W(\tau_1, \tau_2, x, t) = w_1(x, t)\exp(i(\tau_1 + \tau_2)) + w_2(x, t)\exp(i(\tau_1 - \tau_2) + \text{к.с.}$, где векторы $w_{1,2}$ находятся из уравнений $\Lambda^\pm w_{1,2} = G_{1,2}$. Матрицы $\Lambda^\pm = \Lambda(\omega_1 \pm \omega_2, k_1 \pm k_2)$ вырождены ($\operatorname{rank}\Lambda^\pm = 6$), однако эти уравнения разрешимы в силу легко проверяемого равенства $\langle \xi_A^*(k_1 \pm k_2), G_{1,2}\rangle = 0$, где $\xi_A^*(k_1 \pm k_2)$— нуль-вектор матрицы, сопряженной к $\Lambda^\pm$. Теорема доказана.

2. Взаимодействие альфвеновских волн с течением в сжимаемой плазме. Рассмотрим эволюцию альфвеновских волн в случае, когда некоторая линейная комбинация их волновых векторов ортогональна внешнему полю B_0. Указанная ситуация отличается от разобранной в п. 1, так как при $\langle B_0, k\rangle \to 0$ корни уравнения (6) [1] меняют кратность $\det\Lambda(\omega, k) = \Omega^5\{\nu\rho_0\Omega^2 - |k|^2(P_0 + \nu|B_0|^2)\} = 0$ при $\langle B_0, k\rangle = 0$. Корень $\omega = -\langle V_0, k\rangle$ отвечает частным быстро осциллирующим решениям системы (6) [1] — так называемым волнам течения.

$$U_T = \sum_{j=1}^{4} \xi_T^j(k)\,\Psi^j(x, t)\exp(i(\langle k, x\rangle - \langle V_0, k\rangle\,t)/\varepsilon), \qquad (5)$$

где $\Psi^j(x,t) \in C^\infty(R^3 \times (0,T))$, $\xi_T^l = (\zeta_T^l, 0, \underline{0})$, $\xi_T^{l+2} = (\underline{0}, \pi_T^l, \eta_T^l)$, $\eta_T^l = \sqrt{\rho_0}\zeta_T^l$, $l = 1, 2$, $\zeta_T^1 = B_0$, $\zeta_T^2 = k \times B_0$, $\pi_T^1 = -\sqrt{\rho_0}|B_0|^2$, $\pi_T^2 = 0$, $\underline{0}$ — нулевой вектор из R^3.

Наличие в среде волн течения приводит к явлению полного резонанса. Дело в том, что в отличие от волн в косом поле попытка построения решения по схеме п. 2 [1] и п. 1 привела бы теперь к неразрешимым в $\mathfrak{M}$ уравнениям.

Перейдем к точной постановке задачи и формулировке результата. Взаимодействие альфвеновских волн и волн течения будем рассматривать в двух ситуациях:

1) при $t = 0$ заданы две альфвеновские волны (1);

2) при $t = 0$ заданы альфвеновская волна и волны течения

$$U|_{t=0} = \xi_A^+(k_1)\psi_1^0(x)\exp(i\langle k, x\rangle/\varepsilon) + \sum_{j=1}^{4}\xi_T^j(k_3)\varphi_3^{(j)}(x)\exp(i\langle k_3, x\rangle/\varepsilon) + \text{к. с.} \tag{6}$$

Здесь $k_3 = k_1 + k_2$, $\Psi_1^0, \Psi_2^0, \Psi_3^0$ — ограниченные скалярные функции из $C^\infty(R^3)$. Предполагается, что векторы B_0, k_1, k_2 не лежат в одной плоскости, $\langle B_0, k_j\rangle \neq 0$, $j=1,2$, $\langle B_0, k_3\rangle = 0$. Для упрощения результирующих формул будем рассматривать среду без диссипации, т. е. положим $\alpha = 0$, а также будем считать, что $|k_1| = |k_2|$ и $\cos(\widehat{k_1 k_2}) = -(\cos(\widehat{k_1 B_0}))^2$. Последнее предположение означает, что векторы скорости альфвеновских волн ортогональны друг другу $\langle\zeta_A(k_1), \zeta_A(k_2)\rangle = 0$.

Введем скалярные функции $\Psi_3^j(\tau, x, t)$, $j = 1, \ldots, 4$, следующим образом:

$$\Psi_3^l(\tau, x, t) = \psi_3^l(x,t)\exp(i\tau) + \text{к. с.},\quad l = 1, 2, 4,$$
$$\Psi_3^3(\tau, x, t) = (\psi_3^3(x,t)\exp(i\tau) + \text{к. с.})/\sqrt{\varkappa}, \tag{7}$$

где

$$\varkappa = 1 + \nu|B_0|^2/P_0,$$

$$\psi_3^{2,4}(x,t) = \frac{1}{2}\{\varphi_3^2(X_+) + \varphi_3^4(X_+) \pm (\varphi_3^2(X_-) - \varphi_3^4(X_-))\},$$

$$\psi_3^{1,3}(x,t) = \frac{1}{2}\{\varphi_3^1(Y_+) + \sqrt{\varkappa}\varphi_3^3(Y_+) \pm (\varphi_3^1(Y_-) - \sqrt{\varkappa}\varphi_3^3(Y_-))\},$$

$$X_\pm = x - V_0 t \pm B_0 t/\sqrt{\rho_0},\quad Y_\pm = \varkappa - V_0 t \pm B_0 t/\sqrt{\varkappa\rho_0}.$$

Далее определим скалярную функцию $\Phi = \Phi(\tau_1, \tau_2, x, t)$ как решение задачи

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Box_\tau \Delta_\tau^{-1}(\beta(\tau_1 + \tau_2, x, t)\Phi),\quad (t, x, \tau_1, \tau_2) \in \pi, \tag{8}$$

$$\Phi|_{t=0} = i(\Psi_1^0(x)\exp(i\tau_1) - \text{к. с.}),$$

$$\frac{\partial^n}{\partial\tau_l^n}\Phi|_{\tau_l=0} = \frac{\partial^n}{\partial\tau_l^n}\Phi|_{\tau_l=2\pi},\quad l = 1, 2,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь

$$\pi = \{(t, x, \tau_1, \tau_2),\ t \in (0,T),\ x \in R^3,\ \tau_j \in (0, 2\pi),\ j = 1, 2\},\quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} +$$

$$+ \langle V_0 - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}B_0, \frac{\partial}{\partial x}\rangle + \beta_1(\tau_1 + \tau_2, x, t)\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} - \frac{\partial}{\partial\tau_2}\right),$$

$$\Box_\tau = \frac{\partial^2}{\partial\tau_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau_2^2},\quad \beta(\tau, x, t) = \frac{\partial}{\partial\tau}\beta_1(\tau, x, t),$$

Δ_τ^{-1} — оператор, обратный в $\mathfrak{M}_2$ к оператору Лапласа $\Delta_\tau = \partial^2/\partial\tau_1^2 + \partial^2/\partial\tau_2^2$,

$$\beta_1(\tau, x, t) = \langle k_1, k_2 \times B_0\rangle \left\{\Psi_3^2(\tau, x, t) - \Psi_3^4(\tau, x, t) + \frac{\langle k_1, B_0\rangle}{\langle k_1, k_2 \times B_0\rangle}(\Psi_3^1(\tau, x, t) - \right.$$
$$\left. - (1+\varkappa)\Psi_3^3(\tau, x, t)/2\right\}. \qquad (9)$$

Теорема 3. *Пусть* $\nu = \mathrm{const} > 0$. *Асимптотическое по* $\bmod O(\varepsilon)$ *решение задачи* (4) [1], (1) *имеет вид* (2). *Асимптотическое по* $\bmod O(\varepsilon)$ *решение задачи* (4) [1], (6) *при* $\alpha = 0$ *имеет вид*

$$U = \left\{\xi_A^+(k_1)\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \xi_A^+(k_2)\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\}\Phi(\tau_1, \tau_2, x, t)\big|_{\tau_j = S_j/\varepsilon} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{4}\xi_T^j(k_3)\Psi_3^j(S_3/\varepsilon, x, t), \qquad (10)$$

где $S_l = \langle k_l, x\rangle + \omega_A^+(k_l)\,t$, $l = 1, 2$, $S_3 = \langle k_3, x\rangle + \omega_3 t$, $\omega_3 = -\langle V_0, k_3\rangle$, $k_2 = k_3 - k_1$.

Замечание. Для решения задачи (8) справедлив закон сохранения

$$\frac{d}{dt_A}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_2}\right)^2\right\}d\tau_1 d\tau_2 = 0. \qquad (11)$$

Равенство (11) показывает, что энергия альфвеновских волн остается постоянной вдоль траекторий $x = (V_0 - B_0/\sqrt{\rho_0})\,t + x^0$, а волны течения служат только передаточным звеном. В то же время из первого утверждения теоремы следует, что если при $t = 0$ волны течения отсутствуют, то взаимодействие между альфвеновскими волнами не возникает.

Доказательство. Асимптотическое решение задач (4) [1], (1), (6) будем искать в виде двухфазового разложения

$$U = U_0(S_1/\varepsilon, S_2/\varepsilon, x, t) + \varepsilon\{U_1^0(x, t) + U_1(S_1/\varepsilon, S_2/\varepsilon, x, t)\} + O(\varepsilon^2), \quad (12)$$

где $U_1^0(x, t)$ — векторнозначная, а $S_j = S_j(x, t)$ — скалярные функции из $C^\infty(R^3 \times (0, T))$, $j = 1, 2$, $U_l(\tau_1, \tau_2, x, t) \in \mathfrak{M}_2$, $l = 0, 1$.

Подставим (12) в (4) [1] и сгруппируем члены одного порядка по ε

$$\left\{\varepsilon^{-1}\Lambda(D_\omega, D_k)U_0(\tau_1, \tau_2, x, t) + \Lambda(D_\omega, D_k)U_1(\tau_1, \tau_2, x, t) + \right.$$
$$\left. + \Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)U_0(\tau_1, \tau_2, x, t) - \mathscr{F}\right\}\Bigg|_{\tau_j = S_j/\varepsilon} = O(\varepsilon). \qquad (13)$$

Здесь $D_\omega = \dfrac{\partial S_1}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\tau_1} + \dfrac{\partial S_2}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial\tau_2}$, $D_k = \nabla S_1\dfrac{\partial}{\partial\tau_1} + \nabla S_2\dfrac{\partial}{\partial\tau_2}$, вектор-функция $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\tau_1, \tau_2, x, t) \in \mathfrak{M}$ получается в результате подстановки (5) в правую часть (4) [1] и пренебрежения членами $O(\varepsilon)$. Приравниваем нулю члены $O(\varepsilon^{-1})$ в соотношении (13). В силу линейности оператора имеем

$$\left\{\Lambda\left(\frac{\partial S_1}{\partial t}, \nabla S_1\right)\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \Lambda\left(\frac{\partial S_2}{\partial t}, \nabla S_2\right)\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\}U_0(\tau_1, \tau_2, x, t) = 0. \qquad (14)$$

Раскладывая $U_0(\tau_1, \tau_2, x, t)$ в ряд Фурье по переменным τ_1, τ_2, убеждаемся, что для рассматриваемой задачи нетривиальное решение (14) существует, если $S_j = \omega_j t + \langle k_j, x\rangle$ — фазы альфвеновских волн, т. е. $\omega_j = \omega_A^+(k_j)$, $j = 1, 2$. Представим решение (14) в виде

$$U_0 = U_0^{1,2}(\tau_1, \tau_2, x, t) + U_0^3(\tau_1 + \tau_2, x, t), \qquad (15)$$

где $U_0^3(\tau_3, x, t) \in \mathfrak{M}_1$, а разложение $U_0^{1,2} \in \mathfrak{M}_2$ в ряд Фурье по τ_1, τ_2 не содержит экспонент с показателями $l(\tau_1 + \tau_2)$, $l = 0, \pm 1, \ldots$ Тогда из (5) получаем

$$\left\{\Lambda(\omega_1, k_1)\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \Lambda(\omega_2, k_2)\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\} U_0^{1,2}(\tau_1, \tau_2, x, t) = 0,$$
$$\Lambda(\omega_3, k_3)\frac{\partial}{\partial\tau_3} U_0(\tau_3, x, t) = 0, \tag{16}$$

где $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $k_3 = k_1 + k_2$, $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$.

Ядро стоящего в левой части (16) оператора одномерно, так что для $U_0^{1,2}$ получаем формулу

$$U_0^{1,2} = \left\{\xi_A^+(k_1)\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \xi_A^+(k_2)\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\}\Phi(\tau_1, \tau_2, x, t), \tag{17}$$

где Φ — некоторая скалярная функция из $\mathfrak{M}_2$.

По нашим предположениям, вектор k_3 ортогонален B_0, поэтому $\operatorname{rank}\Lambda(\omega_3, k_3) = 2$. Отсюда находим волны течения U_0^3 с точностью до скалярных множителей $\Psi_3^j(\tau_3, x, t) \in \mathfrak{M}_1$:

$$U_0^3 = \sum_{j=1}^{4}\xi_T^j(k_3)\Psi_3^j(\tau_3, x, t). \tag{18}$$

Перейдем к определению функций Φ и Ψ_3^j. Представим младший член разложения (12) в виде, аналогичном (15): $U_1 = U_1^{1,2}(\tau_1, \tau_2, x, t) + U_1^3(\tau_1 + \tau_2, x, t)$, где $U_1^3(\tau_3, x, t) \in \mathfrak{M}_1$, разложение $U_1^{1,2} \in \mathfrak{M}_2$ в ряд Фурье по τ_1, τ_2 не содержит экспонент с показателями $l(\tau_1 + \tau_2)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Теперь, приравняв нулю члены $O(1)$ соотношения (13), придем к уравнениям

$$\left\{\Lambda(\omega_1, k_1)\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \Lambda(\omega_2, k_2)\frac{\partial}{\partial\tau_2}\right\} U_1^{1,2}(\tau_1, \tau_2, x, t) = -\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \times$$
$$\times U_0^{1,2}(\tau_1, \tau_2, x, t) + \mathscr{F}^{1,2}(\tau_1, \tau_2, x, t), \tag{19}$$

$$\Lambda(\omega_3, k_3)\frac{\partial}{\partial\tau_3} U_1^3(\tau_3, x, t) = -\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) U_0^3(\tau_3, x, t) + \mathscr{F}^3(\tau, x, t). \tag{20}$$

Здесь $\mathscr{F}^3 = P_3\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{1,2} = (I - P_3)\mathscr{F}$, P_3 — проектор на множество функций от переменных $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2, x, t$. Ядро стоящего в левой части (19) оператора одномерно.

Нетрудно доказать, что для разрешимости в $\mathfrak{M}_2$ уравнения (19) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\langle \xi_1^*\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \xi_2^*\frac{\partial}{\partial\tau_2}, \quad \left\{\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) U_0^{1,2} - \mathscr{F}^{1,2}\right\}\rangle = 0,$$

где $\xi_j^* = (\zeta_A(k_j), 0, \zeta_A(k_j)/\sqrt{\rho_0})$, $j = 1, 2$.

Ранг матрицы $\Lambda(\omega_3; k_3)$ равен двум, поэтому для разрешимости (20) в $\mathfrak{M}_1$ необходимо и достаточно выполнения условий ортогональности

$$\langle \xi_{3,j}^*, \left\{\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) U_0^3 - \mathscr{F}^3\right\}\rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5, \tag{21}$$

где $\xi_{3,j}^*$ — нуль-векторы сопряженной к $\Lambda(\omega_3, k_3)$ матрицы $\xi_{3,j}^* = \xi_T^l(k_3)$ при $l = 1, 2, 4$, $\xi_{3,3}^* = (\underline{0}, -\nu|B_0|/P_0, B_0)$, $\xi_{3,5}^* = (\underline{0}, 0, k_3)$.

Вычислим указанные скалярные произведения. Нетрудно убедиться, что (21) при $j = 5$ выполнено без каких-либо дополнительных предположений, а остальные условия ортогональности приводят к уравнениям

$$\Delta_\tau \left\{ \frac{d}{dt_A} + \beta_1 \left(\frac{\partial}{\partial \tau_1} - \frac{\partial}{\partial \tau_2} \right) \right\} \Phi - \Box_\tau (\beta\Phi) = 0, \qquad (22)$$

$$\frac{d\Psi_3^1}{dt_0} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \langle B_0, \frac{\partial}{\partial x} \rangle \Psi_3^3 = 0, \quad \frac{d\Psi_3^2}{dt_0} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \langle B_0, \frac{\partial}{\partial x} \rangle \Psi_3^4 = 0, \qquad (23)$$

$$\frac{d\Psi_3^3}{dt_0} - \frac{1}{\varkappa \sqrt{\rho_0}} \langle B_0, \frac{\partial}{\partial x} \rangle \Psi_3^1 = 0, \quad \frac{d\Psi_3^4}{dt_0} - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}} \langle B_0, \frac{\partial}{\partial x} \rangle \Psi_3^2 = 0,$$

где операторы Δ_τ, $\Box_\tau$ и коэффициенты $\varkappa, \beta_1, \beta$ определены в (7), (8), полная производная d/dt_A определена в (23) [1], $d/dt_0 = \partial/\partial t + \langle V_0, \partial/\partial x \rangle$.

Оператор Лапласа Δ_τ в пространстве $\mathfrak{M}_2$ обратим, поэтому (8) есть непосредственное следствие уравнения (22).

Рассмотрим (22), (23) при начальных условиях (1). В этом случае $\Psi_3^j|_{t=0} = 0$, поэтому $\Psi_3^j \equiv 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$ и (22) сводится к уравнению $d\Phi/dt_A = 0$. Решая это уравнение, приходим к первому утверждению теоремы. Для задач (4) [1], (6) из условия периодичности и (6), (17), (18) для главного члена асимптотического разложения получаем формулу (10), т. е. второе утверждение теоремы.

3. В з а и м о д е й с т в и е а л ь ф в е н о в с к и х в о л н, т е ч е н и я и м а г н и т н о г о з в у к а. Рассмотрим задачу о взаимодействии альфвеновских волн в случае, когда их волновые векторы лежат в одной плоскости с внешним полем B_0. В отличие от разобранной в п. 2 ситуации теперь, наряду с ортогональной B_0 комбинацией k_1, k_2, имеется и параллельная B_0 комбинация волновых векторов. Выберем, для определенности, векторы k_1, k_2 следующими: $|k_1| = |k_2|$ и $\cos(\widehat{k_1, B_0}) = -\cos(\widehat{k_2, B_0}) \neq \pm 1$, причем $k_1 \neq -k_2$, $\langle k_j, B_0 \rangle \neq 0$, $j = 1, 2$. Тогда сумма $k_3 = k_1 + k_2$ ортогональна B_0, а разность $k_4 = k_1 - k_2$ параллельна B_0. Отметим, что при параллельных k и B_0 кратность корней дисперсионного уравнения отлична от рассмотренных выше:

$$\det \Lambda(\omega, k) = \Omega \left\{ \Omega^2 - \frac{1}{\rho_0} |B_0|^2 |k|^2 \right\}^2 \{ \nu\rho_0\Omega^2 - P_0 |k|^2 \} = 0.$$

Пусть $|B_0|^2 \neq P_0/\nu$, тогда второму корню этого уравнения $\omega_s^\pm = -\langle V_0, k \rangle \pm |B_0||k|/\sqrt{\rho_0}$ отвечает так называемый магнитный звук [2, 3], т. е. частные решения системы (5) [1] вида

$$U_1^\pm = \{ \xi_{s1}^\pm(k) \Psi_1(x, t) + \xi_{s2}^\pm(k) \Psi_2(x, t) \} \exp(i(\langle k, x \rangle + \omega_s^\pm t)/\varepsilon),$$

где $\Psi_j \in C^\infty$ — некоторые скалярные функции $\xi_{sj}^\pm = (\zeta_s^j, 0, \pm \eta_s^j)$. Для рассматриваемой задачи $\zeta_s^1(k_4) = k_1 \times B_0$, $\zeta_s^2(k_4) = \zeta_s^1(k_4) \times B_0$, $\eta_s^j = \sqrt{\rho_0}\zeta_s^j$.

Как и в п. 2, пренебрегая процессами диссипации, рассмотрим систему (4) [1] в двух ситуациях:

1. При $t = 0$ заданы две альфвеновские волны и магнитный звук

$$U|_{t=0} = \xi_A^+(k_1) \Psi_1^0(x) \exp(i\langle k_1, x \rangle/\varepsilon) + \xi_A^+(k_2) \Psi_2^0(x) \exp(i\langle k_2, x \rangle/\varepsilon) + \\ + (\xi_{s,1}^+(k_4) \varphi_4^1(x) + \xi_{s,2}^+(k_4) \varphi_4^2(x)) \exp(i\langle k_4, x \rangle/\varepsilon) + \text{к. с.} \qquad (24)$$

2. При $t = 0$ заданы альфвеновская волна и течение

$$U|_{t=0} = \xi_A^+(k_1) \Psi_1^0(x) \exp(i\langle k_1, x \rangle/\varepsilon) + \sum_{j=1}^{4} \xi_T^j(k_3) \varphi_3^j(x) \exp(i\langle k_3, x \rangle/\varepsilon) + \text{к. с.} \qquad (25)$$

Здесь φ_n^j, φ_l^0 — ограниченные скалярные функции из $C^\infty(R^3)$.

Теорема 4. *Асимптотическое по* mod $O(\varepsilon)$ *решение задачи* (4), [1], (24) *при* $\alpha = 0$ *имеет вид*

$$U = \xi_A^+(k_1)\Psi_1^0(X)\exp(iS_1/\varepsilon) + \xi_A^+(k_2)\Psi_2^0(X)\exp(iS_2/\varepsilon) + \{\xi_{s,1}^+(k_4)[\varphi_4^1(X)\times$$
$$\times\cos at + |B_0|\varphi_4^2\sin at] + \xi_{s,2}^+(k_4)[\varphi_4^2(X)\cos at - |B_0|^{-1}\varphi_4^1(X)\sin at]\}\times$$
$$\times\exp(iS_4/\varepsilon) + \text{к. с.},$$

где $S_j = \omega_j t + \langle k_j, x\rangle$, $\omega_l = \omega_A^+(k_l)$, $l = 1, 2$, $\omega_4 = \omega_s^+(k_4)$, $X = x + (B_0/\sqrt{\rho_0} - V_0)t$, $a = |B_0||k_4|^2/2\rho_0$.

Решение задачи (4) [1], (25) имеет более сложный вид. Для его описания введем функции $\Psi_4^j = \Psi_4^j(\tau, x, t) \in \mathfrak{M}_1$ как решение задачи

$$\frac{d\Psi_4^1}{dt_A} + a|B_0|\frac{\partial^2\Psi_4^2}{\partial\tau^2} = \frac{2}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^{2\pi}\beta(\tau + 2y, x, t)\Phi(\tau + y, y, x, t)\,dy,$$
$$\frac{d\Psi_4^2}{dt_A} + \frac{a}{|B_0|}\frac{\partial^2\Psi_4^1}{\partial\tau^2} = 0, \quad \Psi_4^1|_{t=0} = 0, \quad \Psi_4^2|_{t=0} = 0, \tag{26}$$

где d/dt_A — полная производная вдоль альфвеновских характеристик (23) [1] функция $\beta(y, x, t) = \partial\beta_1(y, x, t)/\partial y$ определяется по формуле (9) с учетом равенства $\langle k_1, k_2 \times B_0\rangle = 0$, причем $\varkappa$ и Ψ_3^l те же, что и в (9). Скалярная функция $\Phi = \Phi(\tau_1, \tau_2, x, t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{d\Phi}{dt} = \hat{\mathscr{L}}_\tau\{2\beta(\tau_1 + \tau_2, x, t)\Phi - \beta_1(\tau_1 + \tau_2, x, t)\Psi_4^1(\tau_1 - \tau_2, x, t)\},$$

$$(\tau_1, \tau_2, x, t) \in \Pi, \quad \Phi|_{t=0} = i(\Psi_1^0(x)\exp(i\tau_1) - \text{к. с.}), \ \frac{\partial^n}{\partial\tau_e^n}\Phi|_{\tau_l=0} =$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial\tau_l^n}\Phi|_{\tau_l=2\pi}, \quad l = 1, 2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{27}$$

где $\hat{\mathscr{L}}_\tau = \Box_\tau(\partial/\partial\tau_1 + \partial/\partial\tau_2)^{-2}$, коэффициенты β, β_1 и операторы d/dt, $\Box_\tau$ определены в (8), $(\partial/\partial\tau_1 + \partial/\partial\tau_2)^{-2}$ — оператор, обратный к $(\partial/\partial\tau_1 + \partial/\partial\tau_2)^2$ в пространстве функций из $\mathfrak{M}_2$ таких, что их разложение в ряд Фурье не содержит экспонент с показателями $l(\tau_1 - \tau_2)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Нетрудно установить, что решение линейной неоднородной системы (26), (27) существует, единственно и бесконечно дифференцируемо. При этом Ψ_4^i, Φ имеют нулевое среднее по переменным τ_1, τ_2, а разложение Φ в ряд Фурье не содержит экспонент с показателями $l(\tau_1 \pm \tau_2)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Кроме того, для решения (26), (27) справедлив закон сохранения

$$\frac{d}{dt_A}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\tau_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\tau_2}\right)^2 d\tau_1 d\tau_2 + \int_0^{2\pi}(\Psi_4^1)^2 d\tau + |B_0|^2\int_0^{2\pi}(\Psi_4^2)^2 d\tau\right\} = 0.$$

Теорема 5. *Асимптотическое по* mod $O(\varepsilon)$ *решение задачи* (4) [1], (25) *при* $\alpha = 0$ *имеет вид*

$$U = \xi_A^+(k_1)\left(\frac{\partial}{\partial\tau_1} + \frac{\partial}{\partial\tau_2}\right)\Phi(\tau_1, \tau_2, x, t)|_{\tau_l = S_l/\varepsilon} + \sum_{j=1}^4 \xi_T^j(k_3)\Psi_3^j\times$$
$$\times\left(\frac{S_3}{\varepsilon}, x, t\right) + \xi_{s,1}^+(k_4)\Psi_4^1\left(\frac{S_4}{\varepsilon}, x, t\right) + \xi_{s,2}^+(k_4)\Psi_4^2\left(\frac{S_4}{\varepsilon}, x, t\right),$$

где Ψ_3^j *определены в* (7), *фазы* S_1, S_2, S_3 *определены в теореме* 4, $S_3 = \langle k_3, x\rangle - \langle V_0, k_3\rangle t$.

Доказательство теорем 4, 5 проводится так же, как и в п. 2. Отметим только, что в отличие от задачи (4) [1], (6) наличие волн течения приводит здесь к возникновению полного резонанса, в результате которого образуются как «цуги» альфвеновских волн, так и цуги волн магнитного звука.

1. *Маслов В. П., Омельянов Г. А.* Взаимодействие коротких волн малой амплитуды в слабо дисперсионной плазме. I // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 4.— С. 464—472.
2. *Кадомцев Б. В.* Коллективные явления в плазме.— М. : Наука, 1976.— 238 с.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.* Электродинамика сплошных сред.— М. : Наука, 1982.— 620 с.

Моск. ин-т электрон. машиностроения Получено 19.03.87

УДК 517.944:519.46

Ю. А. Митропольский, М. В. Шульга

Асимптотические и точные решения многомерного нелинейного уравнения типа Шредингера

1. Рассмотрим нелинейное многомерное уравнение типа Шредингера

$$i\partial U/\partial x_0 + \lambda\Delta U + \varepsilon\,|U|^k U = 0, \quad k = 2, 4, \tag{1}$$

где $U = U(x)$, $x = (x_0 \equiv t, x_1, x_2, x_3)$, $U(x) = U_1(x) + iU_2(x)$, $\varepsilon > 0$, $\lambda = -1/2m$, ε — малый параметр, x — действительный вектор.

Это уравнение широко встречается в квантовой механике, теории плазмы и теоретической биофизике. К настоящему времени детально исследовано только одномерное уравнение (1). Построению солитонных решений одномерного уравнения (1) с квадратичной нелинейностью посвящено много работ (см., например, [1]).

В настоящей работе построены некоторые классы приближенных и точных решений уравнения (1). Непосредственно применить асимптотический метод [2, 3] к многомерному нелинейному уравнению (1) не представляется возможным.

Для построения решений (1) воспользуемся подстановкой

$$U = \varphi(\omega) f(x), \tag{2}$$

где φ — неизвестная функция, зависящая от трех новых переменных $\omega = \omega(x) = \{\omega_1(x), \omega_2(x), \omega_3(x)\}$, и $f(x)$ — некоторая известная функция. Новые переменные ω и функция $f(x)$ являются первыми интегралами некоторой системы дифференциальных уравнений Лагранжа. Явный вид системы Лагранжа будет дан ниже, и он зависит от симметрийных свойств уравнения (1).

С помощью подстановки (2) из (1) получаем редуцированное уравнение для φ относительно новых переменных $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Полученное таким путем уравнение имеет размерность на единицу меньше, чем исходное уравнение (1). Это редуцированное уравнение аналогичным образом можно свести к уравнению, размерность которого снова будет на единицу меньше. В конце концов приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), и уже к ним применяем либо асимптотические методы [1, 2], либо решаем их точно.

Итак, описав в общих чертах алгоритм получения приближенных и точных решений, остановимся более подробно на его применении к уравнению (1).

2. Для нахождения новых переменных ω и функции $f(x)$ используем групповые свойства (1). Уравнение (1) при произвольном k инвариантно от-