УДК 517.5

В. А. Гнатюк, В. С. Щирба

Некоторые критерии глобальной липшицевости функций

Важным условием, обеспечивающим сходимость многих методов решения задач оптимизации, является условие липшицевости. Для выпуклой функции условие липшицевости эквивалентно ограниченности субдифференциального отображения этой функции (см., например, [1]). В последнее время понятие субдифференциала обобщено на более широкие классы функций. Среди таких обобщений следует выделить субдифференциал Кларка [2] и квазидифференциал (см., например, [3, 4]).

В настоящей работе установлена связь между ограниченностью субдифференциального отображения Кларка и липшицевостью функции, приведено описание квазидифференцируемых липшицевых функций.

Пусть на открытом выпуклом множестве F линейного нормированного пространства X определена непрерывная функция p. Величину

$$p^{\uparrow}_X(u) = \varlimsup_{\substack{x' \to x \\ \alpha \to +0}} \frac{p(x' + \alpha u) - p(x')}{\alpha} \tag{1}$$

называют верхней производной Кларка функции p в точке x по направлению u. Будем предполагать, что для каждой точки $x \in F$ существует такой выпуклый слабый компакт $\partial_{cl} p(x) \subset X^*$, что

$$p^{\uparrow}_x(u) = \max_{\mu \in \partial_{cl} p(x)} \mu(u) \ \forall u \in X. \tag{2}$$

Нижней производной Кларка функции p в точке x по направлению u называют величину $p^{\downarrow}_x(u) = \varliminf\limits_{\substack{x' \to x \\ \alpha \to +0}} \dfrac{p(x' + \alpha u) - p(x')}{\alpha}$. Легко проверить, что $p^{\downarrow}_X(u) \ \min\limits_{\mu \in \partial_{cl} p(x)} \mu(u)$. Множество $\partial_{cl} p(x)$ называют субдифференциалом Кларка функции p в точке x. Заметим, что в случае локально липшицевой функции p субдифференциал Кларка существует в каждой точке множества F (см., например, [3, с. 184]).

Теорема 1. *Функция p удовлетворяет условию Липшица на F тогда и только тогда, когда множество $\partial_{cl} p(F) = \bigcup\limits_{x \in F} \partial_{cl} p(x)$ ограничено. При этом наименьшее число $\mathcal{L}^*$, для которого выполняется условие липшицевости, задается соотношением $\mathcal{L}^* = \sup\limits_{f \in \partial_{cl} p(F)} \| f \|$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\partial_{cl} p(F)$ — ограниченное множество. Покажем что $\mathcal{L}^*$ является константой Липшица для функции p на F, т. е.

$$| p(x_1) - p(x_2) | \leqslant \mathcal{L}^* \| x_1 - x_2 \| \quad \forall x_1, \quad x_2 \in F. \tag{3}$$

С этой целью рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = p(x_1 + t(x_2 - x_1)) - (p(x_2) - p(x_1))\, t. \tag{4}$$

Она определена и непрерывна на $[0, 1]$ и, кроме того, $\Phi(0) = \Phi(1)$. Следовательно существует точка $\tau \in]0,1[$, в которой функция $\Phi(t)$ достигает экстремума. Имеем

$$\Phi_\tau^\uparrow(1) = \overline{\lim_{\substack{t' \to \tau \\ \alpha \to +0}}} \frac{\Phi(t'+\alpha) - \Phi(t')}{\alpha} =$$

$$= \overline{\lim_{\substack{t' \to \tau \\ \alpha \to +0}}} \frac{p(x_1 + (t'+\alpha)(x_2 - x_1)) - p(x_1 + t'(x_2 - x_1))}{\alpha} - (p(x_2) - p(x_1)) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\substack{x' \to x_1 + \tau(x_2 - x_1) \\ \alpha \to +0}}} \frac{p(x' + \alpha(x_2 - x_1)) - p(x')}{\alpha} - (p(x_2) - p(x_1)) =$$

$$= p^\uparrow_{x_1 + \tau(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1) - p(x_2) - p(x_1)) = \max_{\mu \in \partial_{cl} p(x_1 + \tau(x_2 - x_1))} \mu(x_2 - x_1) - (p(x_2) -$$

$$- p(x_1)) \leqslant \max_{\mu \in \partial_{cl} p(F)} \mu(x_2 - x_1) - (p(x_2) - p(x_1)) \leqslant \|x_2 - x_1\| \max_{\mu \in \partial_{cl} p(F)} \|\mu\| -$$

$$- (p(x_2) - p(x_1)) = \mathcal{L}^* \|x_2 - x_1\| - (p(x_2) - p(x_1)). \tag{5}$$

Аналогично можно показать, что

$$\Phi_\tau^\uparrow(-1) \leqslant \mathcal{L}^* \|x_1 - x_2\| - (p(x_1) - p(x_2)), \tag{6}$$

$$\Phi_\tau^\downarrow(1) \geqslant p(x_1) - p(x_2) - \mathcal{L}^* \|x_1 - x_2\|, \tag{7}$$

$$\Phi_\tau^\downarrow(-1) \geqslant p(x_2) - p(x_1) - \mathcal{L}^* \|x_1 - x_2\|. \tag{8}$$

Теперь понятно, что если τ — точка минимума, то соотношение (3) следует из очевидных неравенств $\Phi_\tau^\uparrow(1) \geqslant 0$, $\Phi_\tau^\uparrow(-1) \geqslant 0$ и неравенств (5), (6). Если же τ — точка максимума, то соотношение следует из неравенств $\Phi_\tau^\downarrow(1) \leqslant 0$, $\Phi_\tau^\downarrow(-1) \leqslant 0$, (7) и (8).

Необходимость. Пусть $\mathcal{L}$ — произвольная константа Липшица для функции p на F. Из соотношений (1) и (2) непосредственно следует, что $\mu(u) \leqslant \mathcal{L}\|u\|$ $\forall \mu \in \partial_{cl} p(F)$, $\forall u \in X$. Поэтому $\mathcal{L}^* = \sup_{\mu \in \partial_{cl} p(F)} \|\mu\| =$
$= \sup_{\mu \in \partial_{cl} p(F)} \sup_{u \neq 0} \frac{\mu(u)}{\|u\|} \leqslant \mathcal{L}$. Тогда $\partial_{cl} p(F)$ — ограниченное множество и в силу неравенства (3) $\mathcal{L}^*$ — наименьшая константа Липшица для функции p на F. Теорема доказана.

Пусть теперь функция p квазидифференцируема на F, т. е. существует производная по направлениям p_x' функции p в каждой точке $x \in F$ и для некоторых выпуклых слабых компактов $\underline{\partial p(x)}$, $\overline{\partial p(x)}$ из X^* выполняется равенство

$$P_x'(u) = \max_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \mu(u) + \min_{\nu \in \overline{\partial p(x)}} \nu(u) \quad \forall u \in X.$$

Напомним, что расстоянием между множествами $\underline{\partial p(x)}$ и $-\overline{\partial p(x)}$ в смысле метрики Хаусдорфа называется величина $\rho(\underline{\partial p(x)}, -\overline{\partial p(x)}) = \max\{d(\underline{\partial p(x)}, -\overline{\partial p(x)}), d(-\overline{\partial p(x)}, \underline{\partial p(x)})\}$, где $d(\underline{\partial p(x)}, -\overline{\partial p(x)}) = \sup_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \inf_{\nu \in -\overline{\partial p(x)}} \|\mu - \nu\|$, $d(-\overline{\partial p(x)}, \underline{\partial p(x)}) = \sup_{\nu \in -\overline{\partial p(x)}} \inf_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \|\nu - \mu\|$.

Теорема 2. *Функция p удовлетворяет условию Липшица на F тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}^* = \sup_{x \in F} \rho(\underline{\partial p(x)}, -\overline{\partial p(x)}) < +\infty$. При этом число $\mathcal{L}^*$ является наименьшей константой Липшица для функции p на F.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathcal{L}^* < +\infty$. Для функции $\Phi(t)$, определенной равенством (4), находим

$$\Phi'_\tau(1) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\Phi(\tau+\alpha) - \Phi(\tau)}{\alpha} =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \frac{p(x_1 + \tau(x_2 - x_1) + \alpha(x_2 - x_1)) - p(x_1 + \tau(x_2 - x_1))}{\alpha} -$$

$$-(p(x_2) - p(x_1)) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{p(x_\tau + \alpha(x_2 - x_1)) - p(x_\tau)}{\alpha} - (p(x_2) - p(x_1)) =$$

$$= p'_{x_\tau}(x_2 - x_1) - (p(x_2) - p(x_1)) = \max_{\mu \in \underline{\partial p(x_\tau)}} \mu(x_2 - x_1) +$$

$$+ \min_{\nu \in \overline{\partial p(x_\tau)}} \nu(x_2 - x_1) - (p(x_2) - p(x_1)), \tag{9}$$

$$\Phi'_\tau(-1) = \max_{\mu \in \underline{\partial p(x_\tau)}} \mu(x_1 - x_2) + \min_{\nu \in \overline{\partial p(x_\tau)}} \nu(x_1 - x_2) - (p(x_1) - p(x_2)), \tag{10}$$

где $\tau \in]0, 1[$ — точка экстремума функции $\Phi(t)$, $x_\tau = x_1 + \tau(x_2 - x_1)$.

Если τ — точка минимума, то $\Phi'_\tau(1) \geqslant 0$ и $\Phi'_\tau(-1) \geqslant 0$. Отсюда и из соотношений (9), (10) следует

$$p(x_2) - p(x_1) \leqslant \max_{\mu \in \underline{\partial p(x_\tau)}} \mu(x_2 - x_1) + \min_{\nu \in \overline{\partial p(x_\tau)}} \nu(x_2 - x_1) = \bar{\mu}(x_2 - x_1) +$$

$$+ \min_{\nu \in \overline{\partial p(x_\tau)}} \nu(x_2 - x_1) = \min_{\nu \in -\overline{\partial p(x_\tau)}} (\bar{\mu} - \nu)(x_2 - x_1) \leqslant \|x_1 - x_2\| \inf_{\nu \in \overline{\partial p(x_\tau)}} \|\bar{\mu} - \nu\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_1 - x_2\| \sup_{\mu \in \underline{\partial p(x_\tau)}} \inf_{\nu \in -\overline{\partial p(x_\tau)}} \|\mu - \nu\| \leqslant \|x_1 - x_2\| \rho(\underline{\partial p(x_\tau)}, -\overline{\partial p(x_\tau)}) \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{L}^* \|x_1 - x_2\| \tag{11}$$

(здесь $\bar{\mu}$ — элемент множества $\underline{\partial p(x_\tau)}$, на котором реализуется $\max\limits_{\mu \in \underline{\partial p(x_\tau)}} \mu(x_2 - x_1)$),

$$p(x_1) - p(x_2) \leqslant \mathscr{L}^* \|x_2 - x_1\|. \tag{12}$$

Из неравенств (11), (12) следует, что функция p удовлетворяет условию Липшица на F с константой $\mathscr{L}^*$. Аналогичным образом то же самое можно установить и в случае, когда τ — точка максимума функции $\Phi(t)$.

Необходимость. Пусть функция p удовлетворяет условию Липшица на F с константой $\mathscr{L}$. Тогда

$$-\mathscr{L}\|u\| \leqslant (p(x + \alpha u) - p(x))/\alpha \leqslant \mathscr{L}\|u\| \; \forall x \in F, \quad \forall u \in X.$$

Поэтому

$$-\mathscr{L}\|u\| \leqslant \max_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \mu(u) + \min_{\nu \in \overline{\partial p(x)}} \nu(u) \leqslant \mathscr{L}\|u\|.$$

Учитывая теорему Фань-Цзи [5], отсюда получаем

$$\mathscr{L} \geqslant \sup_{\|u\| \leqslant 1} \left(\max_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \mu(u) + \min_{\nu \in \overline{\partial p(x)}} \nu(u) \right) = \sup_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \sup_{\|u\| \leqslant 1} \inf_{\nu \in -\overline{\partial p(x)}} (\mu(u) -$$

$$-\nu(u)) = \sup_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \inf_{\nu \in -\overline{\partial p(x)}} \sup_{\|u\| \leqslant 1} (\mu - \nu)(u) = \sup_{\mu \in \underline{\partial p(x)}} \inf_{\nu \in -\overline{\partial p(x)}} \|\mu - \nu\| =$$

$$= d(\underline{\partial p(x)}, -\overline{\partial p(x)})$$

и $\mathscr{L} \geqslant d(-\overline{\partial p(x)}, \underline{\partial p(x)})$. Следовательно, $\sup \rho(\underline{\partial p(x)}, -\overline{\partial p(x)}) < +\infty$ и $\mathscr{L}^*$ — наименьшая константа Липшица для функции p на множестве F. Теорема доказана.

1. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ.— М. : Мир, 1973.— 472 с.
2. *Clarke F. H.* Generalized gradients and applications // Trans. Amer. Math. Soc.— 1975.— **205**.— P. 247—262.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.— М. : Наука, 1981.— 384 с.
4. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума.— М. : Наука, 1982.— 144 с.
5. *Фань-Цзи.* Теоремы о минимаксе // Бесконечные антагонистические игры.— М. : Физматгиз, 1963.— С. 31—39.

Каменец.-Подол. пед. ин-т Получено 10.10.85

УДК 517.53

Л. А. Гудзь

О некоторых применениях вещественных дифференциальных уравнений в теории специальных классов аналитических функций

Рассматривается класс P регулярных в круге $E(z:|z|<1)$ функций $p(z)$, удовлетворяющих условиям: $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $S(W,\alpha)=W(z)+\alpha zW'(z)/W(z)$, *где* $\alpha>0$ *и не зависит от* z, $W(z)$ — *регулярна в* E, *для любого* $z\in E$. $W(z)\neq 0$, $W(0)=1$. *Если* $\lambda(\alpha)$ *неубывающая на сегменте* $[a,b]$, $0\leqslant a<b$, *положительная функция, для которой* $4m+1\leqslant\lambda(b)-\lambda(a)\leqslant 4m+3$, *где* m — *целое или нуль, то регулярное в* E *решение (если оно существует)* $q(z)$, $q(0)=1$, *уравнения*

$$\exp\int_a^b \ln S(q,\alpha)\,d\lambda(\alpha)=p(z),\quad p(z)\in P, \tag{1}$$

тоже принадлежит P.

Заметим, что $q(z)\neq 0$ в E, так как из $q(z_0)=0$, $z_0\in E$, следует, что точка z_0 есть простой полюс функции $S(q;\alpha)$ при каждом $\alpha>0$, что невозможно, поскольку $p(z)\in P$.

Докажем теперь, что $\operatorname{Re} q(z)>0$ в E. Полагая $q(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$, где $z=\rho e^{i\varphi}$, $0\leqslant\rho<1$, и обозначая $u=u(\rho,\varphi)$, $v=v(\rho,\varphi)$, $q(z)=u+iv$, на окружности $|z|=\rho$ получаем

$$S(q,\alpha)=u+iv+\alpha(\partial v/\partial\varphi-i\partial u/\partial\varphi)(u+iv)^{-1}. \tag{2}$$

В точке окружности $|z|=\rho$, в которой функция u достигает своего абсолютного минимума на этой окружности, имеем $\partial u/\partial\varphi=0$, $\partial v/\partial\varphi=\rho du^*/d\rho$, где $u^*=u^*(\rho,\varphi_1)$, $\varphi_1=\varphi_1(\rho)$ и $du^*/d\rho$ есть полная производная от u^*, вычисленная в этой точке. Очевидно, $du^*/d\rho\leqslant 0$, поскольку абсолютный минимум монотонно убывает с ростом ρ. Если теперь предположить, что абсолютный минимум на $|z|=\rho$ есть нуль, то из (2) получаем

$$S(q;\alpha)=i\left(v-\frac{\alpha}{V}\frac{du^*}{d\rho}\right),\quad v\neq 0. \tag{3}$$

Из (3) следует $vS(q;\alpha)=i(v^2-\alpha du^*/d\rho)$, где $v^2-\alpha du^*/d\rho>0$. Таким образом,

$$S(q;\alpha)=\left|v-\frac{\alpha}{v}\frac{du^*}{d\rho}\right|e^{i(\pi/2+\delta)},\quad \delta=0 \text{ или } -\pi. \tag{4}$$

На основании (4) имеем

$$\operatorname{Re} p(z)=\operatorname{Re}\exp\int_a^b \ln S(q;\alpha)\,d\lambda(\alpha)=M\cos\theta,$$