УДК 517.952+517.977

В. П. Маслов (Моск. ун-т),
С. Н. Самборский (Univ. Caen, France)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ И БЕЛЛМАНА

We introduce solutions of boundary-value problems for the stationary Hamilton–Jacobi and Bellman equations in functional spaces (semimodules) with a special algebraic structure adapted to these problems. In these spaces, we obtain representations of solutions in terms of "basic" ones and prove a theorem on approximation of these solutions in the case where nonsmooth Hamiltonians are approximated by smooth Hamiltonians. This approach is an alternative to the maximum principle.

Вводяться розв'язки граничних задач для стаціонарних рівнянь Гамільтона–Якобі та Беллмана в функціональних просторах (семімодулях) зі спеціальною алгебраїчною структурою, яка відповідає цим задачам. В означених просторах одержані представлення розв'язків через „базисні", а також теорема про їх апроксимацію при апроксимації негладких гамільтоніанів гладкими. Підхід являє собою альтернативу принципу максимума.

Авторы рады возможности, участвуя в этом издании, выразить свое глубокое и искреннее уважение Юрию Львовичу Далецкому. Впрочем, и само сотрудничество авторов этой статьи возникло благодаря живой инициативе Юрия Львовича.

Введение. Классическая в вариационном исчислении схема получения решений уравнений Гамильтона–Якоби $H(x, Dy(x)) = 0$ с дифференцируемым гамильтонианом H использует интерпретацию решений как „действия" на траекториях гамильтоновой системы $\dot p = H_q$, $\dot q = -H_p$ и может быть изображена следующим образом:

$$\begin{bmatrix}\text{уравнение Гамильтона –}\\ \text{– Якоби} = \text{гамильтониан } H\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\text{гамильтонова система}\\ \text{(ГС)}\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{решение ГС}}$$

$$\xrightarrow{\text{решение ГС}} [\text{траектории ГС}] \to \begin{bmatrix}\text{„действие" на траекториях} =\\ = \text{решение уравнения}\\ \text{Гамильтона – Якоби}\end{bmatrix}. \quad (1)$$

Однако особенностью вариационных задач более нового времени, в частности, имеющих своим источником теорию управления, является недифференцируемость соответствующих им гамильтонианов.

Типичная задача: ищется Inf по параметру $u(\cdot)\colon \mathbb{R} \to \mathcal{U}$ (управляющая функция) функционала

$$(t, x(\cdot), u(\cdot)) \xrightarrow{\Phi} \int_0^t L(x(\tau), u(\tau))\, d\tau + g(x(t))$$

на траекториях $x(\cdot)$ в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих дифференциальному уравнению $\dot x(t) = f(x(t), u(t))$, g — функция на подмножестве $\Gamma \subset \Omega$ (терминал). Аналог функции „действие", так называемая функция Беллмана, т. е. значение $y(x)$ минимума функционала Φ на траекториях, начинающихся в точке $x \in \Omega$, в тех точках, где она дифференцируема, удовлетворяет уравнению Беллмана (в сущности, Гамильтона – Якоби)

$$H(x, Dy(x)) = 0$$

с гамильтонианом

$$H(x, p) = \inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(x, p, u),$$

где

$$\mathcal{H}(x, p, u), = pf(x, u) + L(x, u).$$

Получаемая как Inf семейства функций функция H, как правило, не дифференцируема, поэтому гамильтонова система, отвечающая H, не определена. Классическая схема (1), дополненная слева естественным образом:

$$\begin{bmatrix} \text{исходная задача} = \\ = \text{семейство гамильтонианов} \\ \{\mathcal{H}(\cdot, \cdot, u) \,|\, u \in \mathcal{U}\} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Inf}} \text{схема (1)}, \tag{2}$$

тем самым непосредственно не приложима. Популярный способ обойти возникающую трудность носит название принципа максимума Понтрягина и состоит в рассмотрении семейства гамильтоновых систем, отвечающего семейству гамильтонианов $\{\mathcal{H}(\cdot, \cdot, u) |\ u \in \mathcal{U}\}$ и дополняющего это семейство „правила отбора" в каждый момент t значения $u^*(t)$ так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(q(t), p(t), u) = \mathcal{H}(q(t), p(t), u^*(t)).$$

Эту схему можно изобразить так:

$$\begin{bmatrix} \text{исходная задача} = \\ = \text{семейство гамильтонианов} \\ \{\mathcal{H}(\cdot, \cdot, u) \,|\, u \in \mathcal{U}\} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{семейство гамиль-} \\ \text{тоновых систем} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Inf}}$$

$$\xrightarrow{\text{Inf}} \begin{bmatrix} \text{семейство гамиль-} \\ \text{тоновых систем } + \\ + \text{ принцип максимума} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{решение}}$$

$$\xrightarrow{\text{решение}} \begin{bmatrix} \text{траектории} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \text{действие на траекториях} = \\ = \text{решение уравнения Беллмана} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Видно, что различие схем (2) и (3) состоит в том, что в (2) сначала осуществляется переход к Inf, а затем к гамильтоновой системе, в (3) эти действия происходят в обратном порядке. Очевидное „преимущество" схемы (3) в том, что в ней работают классические понятия решения и дифференцируемости. Очевидный ее недостаток в том, что основной объект (т. е. система, состоящая из дифференциальных уравнений вместе с соотношениями, содержащими операции min или max) никак нельзя назвать естественным математическим объектом: он совмещает в себе удручающе разные математические структуры и вряд ли кто-либо может надеяться на достаточно развитое исчисление таких объектов. Это, разумеется, влечет неудобства и осложнения как на теоретическом уровне, так и при организации вычислений. Вычислительная практика, поэтому, обычно по существу использует схему (2), ссылаясь на принцип максимума как на „теоретическое обоснование". Дискретность вычислений позволяет обойти вопросы корректности этой схемы, связанные с дифференцируемостью. Почему результат таких вычислений верен? Иными словами, почему перестановка двух основных действий (взятие Inf и переход к гамильтоновой системе) не влияет на результат? Ответ связан с особой ролью операции min для уравнений Гамильтона – Якоби и Беллмана. Если в приведенном примере типичной задачи взять два решения y_1 и y_2, отвечающие двум терминалам g_1 и g_2, то $\min(y_1, y_2)$ также является решением этой задачи. Очевидно, что $\lambda + y_1$ — также решение при $\lambda \in \mathbb{R}$.

Таким образом, если ввести операции $\oplus = \min$ и $\odot = +$ в множестве $\mathbb{R} \cup \cup (+\infty)$, то получаемое полукольцо и соответствующие ему функциональные полумодули (т. е. множества функций со значениями в этом полукольце с поточечными операциями) играют для уравнений Гамильтона – Якоби и Беллмана точно ту же роль, что и $\mathbb{R}$ с обычными операциями $\oplus$ и $\cdot$ и векторные пространства для линейных дифференциальных уравнений.

Это наблюдение позволяет построить такие функциональные пространства (и рассматривать такие сходимости в них), в которых можно провести аппроксимацию негладких гамильтонианов гладкими так, чтобы после применения схемы (2) получить подходящую аппроксимацию решений. В частности, это дает обоснование (без принципа максимума!) используемых в практике вычислительных схем.

Рассмотрение „обобщенных", т. е. недифференцируемых в классическом смысле решений уравнений Гамильтона – Якоби, имеет очень долгую историю (ведь даже для дифференцируемых гамильтонианов решения уравнения Гамильтона – Якоби редко бывают дифференцируемыми). Мы не будем даже пытаться выделять ее эпизоды. Все подходы ведут к одному: решение должно совпадать с функцией Беллмана (или с действием), которая определена самой вариационной задачей и не зависит от того, какой смысл мы будем придавать уравнениям Гамильтона – Якоби или Беллмана и их решениям. Таков же и наш подход. Особенность же нашего подхода состоит в том, что мы переносим главную структурную нагрузку в конструкцию функциональных пространств, в которых рассматриваются уравнения. Таким образом, применение обычных принципов функционального анализа в этих пространствах позволяет получать для решений уравнений Гамильтона – Якоби результаты, аналогичные тем, какие классический функциональный анализ дает для решений линейных дифференциальных уравнений.

Развитие авторами этого подхода в других задачах, связанных с уравнениями Гамильтона – Якоби, может быть найдено, в частности, в [1 – 5].

1. Пространства $M(\Omega)$. Пусть во множестве $\mathcal{R} = \mathbb{R} \bigcup (+\infty)$ введена структура полукольца с помощью операций $\oplus$: $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ и $\odot$: $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, где $a \oplus b = \min(a, b)$, $a \odot b = a + b$ (нейтральными элементами являются $\mathbb{0}$ (т. е. $+\infty$) и $\mathbb{1}$ (т. е. $0 \in \mathbb{R}$)) и метрика

$$\rho(a, b) = |\exp(-a) - \exp(-b)|$$

(подразумевается, что $\exp(-\infty) = 0$).

Пусть Ω — замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, являющаяся замыканием своей внутренности, $\partial\Omega$ — ее граница и $\Phi(\Omega)$ — множество непрерывных отображений из Ω в метрическое пространство $\mathcal{R}$.

***Определение* 1.** *Во множестве $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{R})$ полуограниченных снизу отображений из Ω в $\mathcal{R}$ определим следующее скалярное произведение:*

$$(f, g) = \operatorname*{Inf}_{x \in \Omega} (f(x) + g(x)).$$

Замечание 1. Поскольку Inf является континуальным аналогом min, то его можно рассматривать как „интеграл" и мы будем пользоваться обозначением $\oplus \int_{\Omega} \alpha$ для $\operatorname{Inf}_{x \in \Omega} \alpha(x)$.

Скалярное произведение приобретает привычный вид

$$(f, g) = \oplus \int_{\Omega} f \odot g.$$

***Определение* 2.** *Во множестве $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{R})$ определим следующее соотношение эквивалентности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $(f, \varphi) = (g, \varphi)$ для любого $\varphi \in \Phi(\Omega)$.*

Множество классов эквивалентности, снабженное естественным образом структурой полумодуля, будем обозначать через $M(\Omega)$. Операции в этом множестве — это сложение $\oplus: M(\Omega)\times M(\Omega)\to M(\Omega)$ и умножение на скаляр $\odot: M(\Omega)\times \mathcal{R}\to M(\Omega)$. Корректность определения этих операций на множестве классов эквивалентности очевидна.

***Определение* 3.** *Во множестве $M(\Omega)$ введем слабую сходимость: $f_i\to f$ тогда и только тогда, когда $(f_i,\varphi)\to(f,\varphi)$ в $\mathcal{R}$ для любого $\varphi\in\Phi(\Omega)$.*

В полумодуле $M(\Omega)$ имеется частичный порядок, задаваемый правилом: $f\geq g$, если $(f,\varphi)\geq(g,\varphi)$ для любого $\varphi\in\Phi(\Omega)$.

Если классы эквивалентности f и g имеют непрерывные представители (такой представитель единствен, если он существует), то неравенство для классов эквивалентности эквивалентно поточечному неравенству для этих представителей.

Следующие предложения будут использованы в дальнейшем.

***Предложение* 1.** *Пусть $f\in M(\Omega)$, g — непрерывное отображение из Ω в $\mathcal{R}$ и $f\geq g$, причем f не совпадает с g (т. е. g не принадлежит классу эквивалентности f). Тогда существует непустое открытое подмножество O в Ω и $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, такие, что для всякого представителя f' класса эквивалентности f справедливо неравенство*

$$f'(x)\geq\lambda+g(x)\quad \text{при любом}\quad x\in O.$$

Доказательство. Предположим от противного, что для любого $\lambda>0$ множество

$$\{x\in\Omega\mid\exists f'\in f\ \ \text{такой, что}\ f'(x)<\lambda+g(x)\}$$

плотно в Ω. Тогда $(f,\varphi)\leq(\lambda+g,\varphi)$ для любого $\varphi\in\Phi(\Omega)$ и, поскольку $(f,\varphi)\geq(g,\varphi)$, получаем $(f,\varphi)=(g,\varphi)$, т. е. $f\sim g$, что противоречит условию предложения.

Введем следующее обозначение: для подмножества $A\subseteq\Omega$ и $f\in M(\Omega)$ обозначим через $\|f\|_A$ элемент из $\mathcal{R}$, равный $\operatorname{Inf}_{x\in A}f'(x)$, где f' — любой представитель из класса эквивалентности f.

***Предложение* 2.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

i) *последовательность (f_i) элементов из $M(\Omega)$ сходится в $M(\Omega)$ к $f\in M(\Omega)$ (будем также говорить, что (f_i) слабо сходится к f);*

ii) *для всяких $\varepsilon>0$ и открытого в Ω подмножества O найдется номер $N\in\mathbb{N}$ такой, что для любого $i>N$ справедливо неравенство*

$$\rho(\|f_i\|_O,\|f\|_O)<\varepsilon.$$

Если Ω — компакт, то утверждение ii) *можно заменить на:*

ii)′ *для всяких $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ найдется номер $N\in\mathbb{N}$ такой, что для любого $i>N$ и для любого шара B радиуса δ справедливо неравенство*

$$\rho(\|f_i\|_{B\cap\Omega},\|f\|_{B\cap\Omega})<\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\Phi}$ — подмножество в Φ, состоящее из функций, равных $\mathbb{1}$ в некоторой окрестности O, $\mathbb{0}$ — в окрестности O' такой, что замыкание O принадлежит O' и всюду $\geq\mathbb{1}$. Импликация i) $\Rightarrow$ ii) получается немедленно, если взять $\varphi\in\tilde{\Phi}$, импликация ii) $\Rightarrow$ i) вытекает из свойства

$$\{\text{для всех}\ \varphi\in\tilde{\Phi}\mid(f,\varphi)=(g,\varphi)\}\Rightarrow\{f=g\ \text{в}\ M(\Omega)\}.$$

Для элементов из $M(\Omega)$ можно говорить об их значениях в точках в следующем смысле. Пусть $f \in M(\Omega)$ и $x \in \Omega$. Определим $f(x) \in \mathcal{R}$ по формуле $f(x) = \operatorname{Inf} f'(x)$, где Inf берется по множеству всех представителей f' класса эквивалентности f.

Другое определение значения $f(x)$ в точке $x \in \Omega$ использует аналог δ-образных последовательностей. Назовем последовательность $\delta_{i,x}(\cdot)$ непрерывных функций δ-последовательностью, если:

i) $\oplus \int_{\Omega} \delta_{i,x} = \mathbb{1}$ для любого $i \in \mathbb{N}$;

ii) для любой окрестности A в Ω точки x справедливо

$$\lim_{n \to \infty} \oplus \int\limits_{\Omega \setminus A} \delta_{i,x} = \mathbb{O}.$$

Определим значение $f(x)$ класса $f \in M(\Omega)$ в точке x как такой элемент из $\mathcal{R}$, что

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} (f, \delta_{i,x}).$$

Пусть имеется вложение $i: \Omega' \to \Omega$. Тогда определено отображение сужения $i^*: M(\Omega) \to M(\Omega')$ по следующему правилу: каждому классу f из $M(\Omega)$ соответствует элемент из $M(\Omega')$, равный классу эквивалентности отображения $x \to f(x)$, где $x \in \Omega'$ и $f(x)$ — значение в указанном выше смысле f в точке x.

Очевидным образом пространства $M(\Omega)$ определяются для Ω — k-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$, так что отображение сужения определено и в случае, когда Ω' — подмногообразие в Ω, например в случае $\Omega' \subseteq \partial\Omega$.

Утверждение 1. *Отображение сужения* $i^*: M(\Omega) \to M(\Omega')$ *является непрерывным эндоморфизмом метрических полумодулей над полукольцом* $\mathcal{R}$.

Доказательство становится очевидным, если использовать описанные выше δ-образные последовательности.

Следующее предложение является переформулировкой частного случая более общего утверждения о структуре множества эндоморфизмов из полумодуля непрерывных на Ω функций в полукольцо $\mathcal{R}$, принадлежащего В. Колокольцову и В. Маслову [2].

***Предложение* 3.** *Пусть* Ω *— компакт и последовательность* (f_i) *элементов из* $M(\Omega)$ *равномерно ограничена, т. е. существует* $K \in \mathcal{R}$ *такое, что* $f_i \geq K$. *Тогда из этой последовательности можно выделить сходящуюся в* $M(\Omega)$ *подпоследовательность.*

2. Уравнение Гамильтона – Якоби в пространствах $M(\Omega)$. Пусть L — непрерывное отображение из $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$. На множестве дифференцируемых в Ω $\mathbb{R}$-значных функций L определяет дифференциальное выражение

$$y \to (\mathcal{L}y)(x) = L(x, y(x), Dy(x)),$$

где

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Пусть $\Gamma \subseteq \partial\Omega$.

***Определение* 4.** *Класс* $y \in M(\Omega)$ *назовем слабым решением уравнения* $\mathcal{L}y = F$ *(или соответственно неравенства* $\mathcal{L}y \geq F$*), где* $F \in M(\Omega)$, *равным* $g \in M(\Gamma)$ *на* Γ, *если существует последовательность дифференцируемых в*

Ω функций (y_i) такая, что сужения y_i на Γ слабо сходятся к g, (y_i) слабо сходится к y и $(\mathcal{L}(y_i))$ слабо сходится к F (соответственно, $\lim \mathcal{L}(y_i) \geq F$).

***Определение* 5.** *Класс $y \in M(\Omega)$ назовем решением уравнения $\mathcal{L}y = F$, равным g на Γ, если y — слабое решение, равное g на Γ, и если для любого другого слабого решения y', равного g на Γ, справедливо неравенство $y \geq y'$.*

В дальнейшем будут рассматриваться дифференциальные выражения, порожденные непрерывным отображением $H\colon \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (гамильтонианом), где H удовлетворяет следующему условию.

***Условие* А.** Для всякого $x \in \Omega$ множество

$$\Lambda_x = \{p \in \mathbb{R}^n \mid H(x, p) \leq 0\}$$

выпукло (вообще говоря, нестрого).

Теорема 1. *Пусть дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ удовлетворяет условию А. Тогда множество всех решений уравнения $\mathcal{L}y = 0$ является подполумодулем полумодуля $M(\Omega)$. Если Ω — компакт, то этот подполумодуль замкнут в $M(\Omega)$.*

Приведем сначала ряд очевидных утверждений.

Утверждение 2. *Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — дифференцируемые $\mathbb{R}$-значные функции в Ω и $\varepsilon > 0$. Тогда существует дифференцируемая в Ω функция f' такая, что:*

i) *вне ε-окрестности множества $V = \{x \mid \exists\, i, j\ (i \neq j)\colon f_i(x) = f_j(x)\}$ функция f' совпадает с функцией $\min(f_1, \ldots, f_m)$;*

ii) *производная $Df'(x)$ в любой точке $x \in \Omega$ принадлежит ε-окрестности в $\mathbb{R}^n$ выпуклой оболочки множества $Df_1(x) \cup \ldots \cup Df_m(x)$;*

iii) *для любого $x \in \Omega$ справедливо соотношение $\rho\,(f'(x), \min(f_1(x), \ldots \ldots, f_m(x))) < \varepsilon$.*

Утверждения пп. i) – iii) справедливы и после замены $\min$ на $\max$.

Утверждение 3. *Пусть $\mathcal{U}$ — объединение конечного числа дифференцируемых подмногообразий в Ω и (ε_i) — последовательность чисел, стремящихся к нулю, $(\mathcal{U}_i)$ — последовательность открытых подмножеств таких, что $\mathcal{U}_{i+1} \subseteq \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_i$ и $\mathcal{U}_i$ принадлежит ε-окрестности $\mathcal{U}$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Пусть, далее, (f_i) — такая последовательность элементов из $M(\Omega)$ и f — такой элемент из $M(\Omega)$, что для сужений f_i и f справедливо*

$$\lim_{i \to \infty} f_i|_{\mathcal{U}} = f|_{\mathcal{U}}$$

и при любом $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i \to \infty} f_i|_{\Omega \setminus \mathcal{U}_j} = f|_{\Omega \setminus \mathcal{U}}$$

(пределы взяты в $M(\Omega)$ и $M(\Omega \setminus \mathcal{U}_j)$ соответственно) и $f_i \geq f$ на $\mathcal{U}_j \setminus \mathcal{U}$. Тогда

$$\lim_{i \to \infty} f_i = f \ \text{ в } \ M(\Omega).$$

Утверждение 4. *Пусть $y \in M(\Omega)$ — решение (в смысле определения 5) уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равное g на $\Gamma \subseteq \partial\Omega$. Пусть Γ_1 — замыкание объедине-*

ния конечного числа дифференцируемых подмногообразий в $\partial\Omega$ *и* $g_1 \in M(\Gamma_1)$ *— сужение на* Γ_1 *класса* y. *Тогда* y *является решением уравнения* $\mathcal{L}y = 0$, *равным* g *на* Γ *и* g_1 *на* Γ_1.

Доказательство *теоремы* 1. Пусть y_1 и y_2 — два решения уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равные соответственно g_1 на Γ_1 и g_2 на Γ_2, где $\Gamma_i \subset \partial\Omega$ и $g_i \in M(\Gamma_i)$. По определениям 4–5 существуют последовательности дифференцируемых функций $(y_{1,i})_{i\in\mathbb{N}}$ и $(y_{2,i})_{i\in\mathbb{N}}$, слабо сходящиеся к y_1 и y_2 соответственно. Рассмотрим последовательность f_i' дифференцируемых в Ω функций, построенную следующим образом. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ пусть выбрана функция f_i', существование которой обеспечивает утверждение 2, примененное к паре $(f_1, f_2) = (y_{1,i}, y_{2,i})$ и $\varepsilon = 1/i$. Заметим при этом, что на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ справедливо неравенство

$$\rho(f_i'(x), \min(y_{1,i}(x), y_{2,i}(x))) < \frac{1}{i}.$$

Эта последовательность имеет следующие свойства:

i) последовательность $(f_i')_{i\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к $y_1 \oplus y_2 \in M(\Omega)$; это вытекает из предложения 2 и утверждения 2, п. iii);

ii) последовательность $(\mathcal{L}(f_i'))_{i\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к нулю; это вытекает из п. ii) утверждения 1 и утверждения 3, примененного к множествам $\mathcal{U}_i$ — ε-окрестностям множеств

$$\bigcup_{j\ge i}\{x \mid y_{1,j}(x) = y_{2,j}(x)\} \quad \text{при} \quad \varepsilon = \frac{1}{i};$$

iii) последовательность сужений $(f_i|_{\Gamma\cup\Gamma_1})_{i\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к $g' \in M(\Gamma\cup\Gamma_1)$, равному сужению на $\Gamma\cup\Gamma_1$ класса $y_1 \oplus y_2$.

Таким образом, $y_1 \oplus y_2$ является слабым решением уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равным y' на $\Gamma\cup\Gamma_1$. Покажем, что $y_1 \oplus y_2$ является решением. Если $y' \in M(\Omega)$ является слабым решением $\mathcal{L}y = 0$, равным g' на $\Gamma\cup\Gamma_1$, и удовлетворяет неравенству $y' \ge y_1 \oplus y_2$, причем $y' \ne y_1 \oplus y_2$, то в некоторой точке $x \in \Omega$ справедливо $y'(x) > (y_1 \oplus y_2)(x) = y_1(x) \oplus y_2(x)$.

Пусть $(y_i')_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность дифференцируемых функций, задающих по определению 4 решение y'. Применим описанную в утверждении 2 процедуру сглаживания с операцией max к последовательности пар $(y_i', y_{1,i})$ и $(y_i', y_{2,i})$. Получаемые слабые пределы h_1 и h_2 являются слабыми решениями уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равным g на Γ и, соответственно, g_1 на Γ_1. Вместе с тем найдется такая точка x, что справедливо по меньшей мере одно из неравенств

$$h_1(x) > y_1(x) \quad \text{или} \quad h_2(x) > y_2(x),$$

что противоречит максимальности y_1 и y_2 среди слабых решений. Таким образом, решения уравнения $\mathcal{L}y = 0$ образуют подполумодуль полумодуля $M(\Omega)$. Покажем, что при условии компактности Ω этот подполумодуль замкнут в $M(\Omega)$. Пусть (f_i) — последовательность решений, слабо сходящаяся к классу $f \in M(\Omega)$. В частности, при каждом i это означает, что f_i является слабым пределом последовательности дифференцируемых функций $(f_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$, фигурирующих в определении 4. Зафиксируем $i \in \mathbb{N}$. Выбрав последовательности положительных чисел (ε_k) и (δ_l), стремящиеся к нулю, можно утверждать в силу предложения 2, что для любых натуральных k и l существует номер $N(k,l)$ такой, что

$$\rho(\|f_i\|_{B\cap\Omega}, \|f_{i,j}\|_{B\cap\Omega}) < \varepsilon_k$$

для любого шара B радиуса δ_l и для $j > N(k,l)$. Считая, что $N(k,l) > N(k',l')$ при $k+l > k'+l'$, выбираем следующую подпоследовательность $(f'_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$: пусть

$$N'_j = \max_{k+l\le j}\{N(k,l)\}, \quad f'_{i,j} = f'_{i,N'_j}.$$

Тогда для этой последовательности справедливо следующее:

i) $f'_{i,j}$ слабо сходится к f_i при $j\to\infty$;

ii) для любых натуральных k, l выполняется неравенство

$$\rho(\|f_i\|_{B\cap\Omega}, \|f'_{i,j}\|_{B\cap\Omega}) < \varepsilon_k$$

для любого шара B радиуса δ_l и для $j > N(k,l)$.

Утверждение 5. *Пусть $(\varphi_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ — двойная последовательность элементов из $M(\Omega)$, (φ_i) — подпоследовательность элементов из $M(\Omega)$, сходящаяся в $M(\Omega)$ к $\varphi\in M(\Omega)$. Пусть $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательности положительных чисел, стремящиеся к нулю, и $N' : \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — отображение со следующим свойством: для любых $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$ из неравенства $j > N'(k,l)$ следует неравенство*

$$\rho(\|\varphi_i\|_{B\cap\Omega}, \|\varphi_{i,j}\|_{B\cap\Omega}) < \varepsilon_k$$

для любого шара B радиуса δ_l. Тогда последовательность $\varphi'_i = \varphi_{i,i}$ сходится в $M(\Omega)$ к φ.

Для доказательства утверждения достаточно воспользоваться предложением 3 и неравенством треугольника для метрики ρ.

Применяя это утверждение к последовательности $(f'_{i,j})$, получаем, что $f'_{i,i}$ сходится в $M(\Omega)$ к f. Рассмотрим теперь двойную последовательность $(\mathcal{L}(f'_{i,j}))_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}}$ и применим к ней то же самое рассуждение. Поскольку последовательность $(\mathcal{L}(f'_{i,j}))_{j\in\mathbb{N}}$ слабо сходится к нулю по определению решения, то, вновь выбирая подпоследовательность дифференцируемых функций $(f''_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ последовательности $(f'_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ при каждом i и пользуясь утверждениями 4 и 5, получаем последовательность дифференцируемых функций $(f'_i = f''_{i,i})_{i\in\mathbb{N}}$, сходящуюся в $M(\Omega)$ к f и для которой $\mathcal{L}(f'_i)$ сходится в $M(\Omega)$ к нулю при $i\to\infty$. Таким образом, f является слабым решением уравнения $\mathcal{L}y = 0$. Доказательство того, что f является решением, легко получается рассуждением от противного при фиксировании значений f на границе и полностью аналогично тому, как это было сделано при доказательстве первой части теоремы. Теорема доказана.

3. Базисные решения.

Определение 6. *Назовем базисным решением уравнения $\mathcal{L}y = 0$, соответствующим точке $\mathfrak{z}\in\partial\Omega$, решение этого уравнения, равное $\mathbb{1}\in\mathcal{R}$ (т. е. $0\in\mathbb{R}$) в точке $\mathfrak{z}$.*

Будем предполагать в дальнейшем, что дифференциальное выражение $\mathcal{L}$ (или порождающий его гамильтониан H) удовлетворяет следующему условию.

Условие В. *Для любого $\mathfrak{z}\in\partial\Omega$ существует слабое решение неравенства $\mathcal{L}(y)\ge 0$, отличное от $\mathbb{0}\in\mathcal{R}$ (т. е. от ∞) в точке $\mathfrak{z}$.*

Пусть A — множество и $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — семейство элементов из $M(\Omega)$. Будем говорить, что это семейство интегрируемо (в смысле идемпотентного интегрирования), если существует такой элемент из $M(\Omega)$, обозначаемый далее $\oplus\int_{\alpha\in A} f_\alpha$, что для любого $\varphi \in \Phi(\Omega)$ верно равенство

$$\left(\oplus\int_{\alpha\in A} f_\alpha, \varphi\right) = \operatorname*{Inf}_{\alpha\in A}(f_\alpha, \varphi).$$

Утверждение 6. *Пусть $\{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$ — интегрируемое семейство элементов из $M(\Omega)$ и для каждого $x \in \Omega$ $f_\alpha(x)$ — значение $f_\alpha(x)$ в точке x (как это определено в п. 1). Тогда $\oplus\int_{\alpha\in A} f_\alpha$ является классом эквивалентности отображения*

$$x \to \operatorname*{Inf}_{\alpha\in A} f_\alpha(x).$$

из Ω в $\mathcal{R}$.

Доказательство очевидно.

Теорема 2. *Пусть Ω — компакт и $\mathcal{L}$ — дифференциальное выражение, удовлетворяющее условиям* A *и* B. *Тогда:*

i) *для любого $\mathfrak{z} \in \partial\Omega$ существует базисное решение $W(\cdot, \mathfrak{z})$, соответствующее точке $\mathfrak{z}$;*

ii) *если $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ и y — решение уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равное g на Γ, то*

$$y = \oplus\int_{\mathfrak{z}\in\Gamma} W(\cdot, \mathfrak{z}) \odot g(\mathfrak{z}), \tag{4}$$

в частности, выполнено „условие совместности"

$$g(x) - g(\mathfrak{z}) \le W(x, \mathfrak{z}); \tag{5}$$

iii) *если $\Gamma \subseteq \partial\Omega$ и $g \in M(\Gamma)$ удовлетворяет „условию совместности"* (5), *то формула* (4) *дает решение уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равное g на Γ.*

Доказательство. Вначале докажем следующее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть $y \in M(\Omega)$ является слабым решением неравенства $\mathcal{L}(y) \ge 0$ и $y(\mathfrak{z}) = \mathbb{1}$. Тогда y является также и слабым решением уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и выберем:

i) дифференцируемую функцию y_i из последовательности $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, определяющей слабое решение y неравенства $\mathcal{L}y = 0$ (определение 4), удовлетворяющую неравенству

$$\rho\,(\|y\|_{B\cap\Omega}, \|y_j\|_{B\cap\Omega}) < \varepsilon$$

для $j > i$ и для любого шара B радиуса δ (в силу предложения 3);

ii) покрытие области Ω шарами $B_\delta(x_k(\delta))$ с центрами в точках $x_k(\delta)$ и радиуса δ, $k \in \{1, \dots, m\}$, с расстояниями между $x_k(\delta)$ и $x_{k'}(\delta)$, бо́льшими, чем некоторое $\delta' < \delta/2$ при $k \ne k'$.

Для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$ выберем:

i) вектор $\gamma_k \in \mathbb{R}^n$ такой, что вектор $\gamma_k + Dy_i(x_k(\delta))$ принадлежит границе множества $\Lambda_{x_k}(\delta)$ (см. условие A);

ii) такую дифференцируемую функцию $h_{k,\delta}\colon \Omega \to \mathbb{R}$, что:

ii1) $h_{k,\delta}$ отлична от нуля только в шаре $B_{\delta'}(0)$ радиуса δ' с центром в нуле;

ii2) в $B_{\delta'}(0)$ существует точка, в которой производная $Dh_{k,\delta}$ функции $h_{k,\delta}$ равна γ_k и

ii3) $\operatorname{Max}|h_{k,\delta}(x)| \le \varepsilon$.

Пусть теперь для $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ функция $\Phi_{i,\lambda_1,\dots,\lambda_m}(\cdot): \Omega \to \mathbb{R}^n$ определена по правилу

$$\Phi_{i,\lambda_1,\dots,\lambda_m}(x) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k h_k(x - x_k).$$

Рассмотрим дифференцируемую функцию

$$\bar{y}_i(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = y_i(x) + \Phi_{i,\lambda_1,\dots,\lambda_m}(x),$$

зависящую от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Если все значения этих параметров нулевые, то $\bar{y}_i = y_i$ и в силу того, что последовательность $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ слабо сходится к решению неравенства $\mathcal{L}y = 0$ и выбора i, $D(\bar{y}_i(x, 0, \dots, 0))$ принадлежит ε-окрестности множества Λ_x при всяком $x \in \Omega$.

Для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$ выберем такое значение параметра λ_k, что существует такая точка $x'_k \in B_\delta(x_k(\delta))$, в которой $D(\bar{y}_i(x'_k, \lambda_1, \dots, \lambda_m))$ принадлежит ε-окрестности множества $\partial\Lambda_{x'_k}$, а при всех остальных $x \in \Omega$ $D(\bar{y}_i(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m))$ принадлежит ε-окрестности множества Λ_x. В силу выбора функции Φ_i это можно всегда сделать, и причем так, что значения параметров λ_k не превышают по модулю 1.

Фиксируя выбранные таким образом значения $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, получаем, что функции $\bar{y}_i(x) = \bar{y}_i(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $i \in \mathbb{N}$, имеют следующие свойства:

i) $\max|y_i(x) - \bar{y}_i(x)| < \varepsilon$ (т. е. $\lim \bar{y}_i = y$ в $M(\Omega)$);

ii) $\rho(\|\mathcal{L}(\bar{y}_j)\|_{B\cap\Omega}, \mathbb{0}) < \varepsilon$ для любого $j > i$ и шара B радиуса δ (т. е. $\lim \mathcal{L}(y_i) = 0$ в $M(\Omega)$).

Таким образом, y является слабым решением уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равным $\mathbb{1}$ в точке $x \in \partial\Omega$, и утверждение 7 доказано.

Продолжим доказательство теоремы 2. Пусть функция $\bar{y}: \Omega \to \mathcal{R}$ определена в каждой точке $x \in \Omega$ как Sup множества значений в этой точке всех слабых решений уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равных $\mathbb{1}$ в точке $\mathfrak{z} \in \partial\Omega$. Будем также обозначать через $\bar{y}$ соответствующий класс из $M(\Omega)$, содержащий функцию $\bar{y}$. Рассмотрим покрытие Ω шарами радиуса $\delta = 1/i$ с центрами в точках x_k, $k = 1, \dots, m$, и для каждого x_k пусть y_k — такое решение уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равное $\mathbb{1}$ в $\mathfrak{z}$, что

$$\rho(y_k(x_k), \bar{y}(x_k)) < \frac{1}{i}.$$

Пусть $(y_{k,j})_{j \in \mathbb{N}}$ $\left(\lim\limits_{j \to \infty} y_{k,j} = y_k\right)$ — последовательность дифференцируемых функций, фигурирующих в определениях 4, 5 решения уравнения $\mathcal{L}y = 0$. Пусть j_k — такое значение индекса j, что

$$\rho(\|y_{k,j}\|_{B_k\cap\Omega}, \|y\|_{B_k\cap\Omega}) < \frac{1}{i}$$

при $j \ge j_k$, где B_k — шар радиуса $1/i$ с центром в x_k. Для конечного при каждом i множества дифференцируемых функций $\{y_{k,j_k} | k = 1, \dots, m_i\}$ и $\varepsilon_i > 0$

построим дифференцируемую функцию $\overline{y}_i$ со свойствами, указанными в утверждении 2. При $\varepsilon_i \to 0$ для $i \to \infty$, пользуясь утверждением 3 и предложением 3, получаем последовательность дифференцируемых функций $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$, имеющую свойства:

i) $$\lim_{i \to \infty} \overline{y}_i = \overline{y} \quad \text{в} \quad M(\Omega);$$

ii) $$\lim_{i \to \infty} \mathcal{L}(\overline{y}_i) = \mathbb{1} \quad \text{в} \quad M(\Omega);$$

iii) $$\lim_{i \to \infty} \overline{y}_i(\mathfrak{z}) = \mathbb{1} \quad \text{в} \quad \mathcal{R}.$$

Таким образом, $\overline{y}$ является базисным решением уравнения $\mathcal{L}y = 0$, равным $\mathbb{1}$ в $\mathfrak{z}$, и п. i) теоремы доказан.

Замечание 2. Если множество Γ — конечный набор точек из $\partial\Omega$, то интеграл (4) совпадает с линейной (в смысле полумодуля $M(\Omega)$) комбинацией решений, которая по теореме 1 также является решением. Мы хотим получить аналогичный результат для интеграла (4), используя конечные интегральные суммы, предельный переход и основываясь на замкнутости множества решений для компактного Ω согласно теореме 1. Однако семейство $\{W(\cdot, \mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \Gamma\}$ не имеет, вообще говоря, непрерывной зависимости в $M(\Omega)$ от параметра $\mathfrak{z}$.

Пример. Уравнение $\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = 0$ в области $\Omega = \{|x_i| \le 1,\ x_2 \le x_1^2,\ i = 1, 2\}$.

Пусть

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^2,\ -1 \le x_1 \le 0\}.$$

Тогда если $\mathfrak{z} \ne (0, 0)$, то $W(\cdot, \mathfrak{z}) = \mathbb{1}$ в $\mathfrak{z}$ и $\mathbb{O}$ в остальных точках, а если $\mathfrak{z} = (0, 0)$, то $W(\cdot, \mathfrak{z}) = \mathbb{1}$ в точках $(x_1, 0)$, где $x_1 \ge 0$ и $\mathbb{O}$ в остальных.

Поэтому процедура предельного перехода от конечных сумм, соответствующих конечному набору точек $\mathfrak{z} \in \Gamma$, к интегралу требует определенного внимания к выбору этих точек, как, например, это сделано в следующем утверждении.

Утверждение 8. *Пусть $\{F(\cdot, \mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \Gamma\}$ — семейство элементов из $M(\Omega)$, равномерно ограниченных по $\mathfrak{z}$, т. е. существует $K \in \mathcal{R}$ такое, что $F(\cdot, \mathfrak{z}) \ge K$. Пусть*

$$\mathcal{U}_k = \{B_{k,j} \mid j = 1, \dots, k\}$$

— покрытие Γ шарами радиуса δ_k,

$$\mathcal{V}_k = \{\mathcal{D}_{k,j} \mid j = 1, \dots, N_k\}$$

— покрытие Ω шарами радиуса δ'_k такие, что δ_k и δ'_k стремятся к нулю при $k \to \infty$. Пусть в каждом шаре $B_{k,j}$ выбрано конечное подмножество точек $A_{k,j}$ так, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} \max_{\substack{j \in \{1, \dots, k\} \\ j' = \{1, \dots, N_k\}}} \rho\left(\operatorname*{Inf}_{\mathfrak{z} \in B_{k,j}} \|F(\cdot, \mathfrak{z})\|_{\mathcal{D}_{k,j'}},\ \bigoplus_{\mathfrak{z} \in A_{k,j}} \|F(\cdot, \mathfrak{z})\|_{\mathcal{D}_{k,j'}} \right) = 0.$$

Тогда интеграл $\oplus\int_{\mathfrak{z} \in \Gamma} F(\cdot, \mathfrak{z})$ равен пределу в $M(\Omega)$ при $k \to \infty$ интегральных сумм

$$\bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{\mathfrak{z} \in A_{k,j}} F(\cdot, \mathfrak{z}).$$

Доказательство. Отметим сначала следующее свойство метрики ρ :

$$\rho\left(\bigoplus_{i=1}^{n} a_i, \bigoplus_{i=1}^{n} b_i\right) \leq \max_{0 \leq i \leq n} \rho(a_i, b_i), \quad a_i \in \mathcal{R}, \quad b_i \in \mathcal{R}.$$

Применяя это свойство, предложение 3 и утверждение 6, получаем

$$\rho\left(\left\|\oplus\int_{\Gamma} F(\cdot, \mathfrak{z})\right\|_{\mathcal{D}_{k,j}}, \left\|\bigoplus_{j=1}^{k} \bigoplus_{\mathfrak{z} \in A_{k,j}} F(\cdot, \mathfrak{z})\right\|_{\mathcal{D}_{k,j'}}\right) =$$

$$= \rho\left(\min_{1 \leq j \leq k} \operatorname{Inf}_{\mathfrak{z} \in B_{k,j}} \|F(\cdot, \mathfrak{z})\|_{\mathcal{D}_{k,j'}}, \min_{1 \leq j \leq k} \bigoplus_{\mathfrak{z} \in A_{k,j}} \|F(\cdot, \mathfrak{z})\|_{\mathcal{D}_{k,j'}}\right) \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq j \leq k} \rho\left(\operatorname{Inf}_{\mathfrak{z} \in B_{k,j}} \|F(\cdot, \mathfrak{z})\|_{\mathcal{D}_{k,j'}}, \bigoplus_{\mathfrak{z} \in A_{k,j}} \|F(\cdot, \mathfrak{z})\|_{\mathcal{D}_{k,j'}}\right).$$

Последнее выражение стремится к нулю равномерно по $j' \in \{1, \ldots, N_k\}$ при $k \to \infty$, что доказывает утверждение 8.

Продолжим доказательство теоремы 2. Применяем утверждение 8 к семейству $\{W(\cdot, \mathfrak{z}) \odot g(\mathfrak{z}) \mid \mathfrak{z} \in \Gamma\}$, имеющему требуемое в этом утверждении свойство ввиду компактности Ω, выбирая подходящие множества $A_{i,j}$. При каждом фиксированном k сумма вида

$$\bigoplus_{1 \leq j \leq k} \bigoplus_{\mathfrak{z}_m \in A_{k,j}} W(\cdot, \mathfrak{z}_m) \odot g(\mathfrak{z}_m)$$

является, согласно теореме 1, решением. Предел в $M(\Omega)$ этих решений по теореме 1 является решением, совпадающим с интегралом (4).

Таким образом, интеграл (4) задает класс, являющийся решением уравнения $\mathcal{L}(y) = 0$, сужение этого класса на Γ совпадает с g, если предполагать выполнение „условия совместности". Однако априори он может не совпадать с решением, равным g на Γ. Чтобы заключить, что интеграл (4) действительно является решением, равным g на Γ, следует показать, что значение всякого слабого решения, совпадающего с g на Γ, не превышают ни в какой точке значений в этой точке интеграла (4).

Предположим, что это не так и существует класс $\varphi \in M(\Omega)$, являющийся слабым решением уравнения $\mathcal{L} y = 0$, сужение которого на Γ совпадает с g, такой, что

$$\varphi(x) > \oplus \int_{\mathfrak{z} \in \Gamma} W(x, \mathfrak{z}) \odot g(\mathfrak{z})$$

в некоторой точке $x \in \Omega$. Тогда согласно утверждению 6 найдется такая точка $\mathfrak{z}_0 \in \Gamma$, что

$$\varphi(x) > W(x, \mathfrak{z}_0) \odot g(\mathfrak{z}_0).$$

Из этого неравенства вытекает, что класс $\varphi(\cdot) - g(\mathfrak{z}_0)$, являющийся слабым решением $\mathcal{L}(y) = 0$, равным $\mathbb{1}$ в $\mathfrak{z}_0$, имеет в точке x значение, превышающее $W(\cdot, \mathfrak{z}_0)$, что противоречит определению $W(\cdot, \mathfrak{z}_0)$ как базисного решения, соответствующего точке $\mathfrak{z}_0$. Таким образом, п. iii), а следовательно, п. ii) и вся теорема доказаны.

4. Аппроксимации.

Теорема 3. *Пусть*

$$\{ H_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid i = 1, 2, \dots \}$$

— последовательность гамильтонианов, удовлетворяющих условию A *и равномерно на* $\Omega \times \mathbb{R}^n$ *сходящихся к гамильтониану* $H : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *причем* $H_i \le H$ *при всех* i. *Пусть* $\mathfrak{z} \in \partial\Omega$, H *удовлетворяет условию* B *и* $W_i(\cdot, \mathfrak{z})$, $W(\cdot, \mathfrak{z})$ *— базисные решения уравнений* $H_i(x, Dy(x)) = 0$, $H(x, Dy(x)) = 0$, *соответствующие точке* $\mathfrak{z}$ *(существующие по теореме 2). Тогда решение* $W(\cdot, \mathfrak{z})$ *является пределом в* $M(\Omega)$ *базисных решений* $W_i(\cdot, \mathfrak{z})$ *при* $i \to \infty$.

Доказательство. Пусть $(\psi_{i,j})_{j \in \mathbb{N}}$ — последовательность дифференцируемых функций из определения 5 решения $W(\cdot, \mathfrak{z})$. Предположим от противного, что $W(\cdot, \mathfrak{z})$ не является пределом в $M(\Omega)$ решений $W_i(\cdot, \mathfrak{z})$ уравнений $H_i(x, Dy(x)) = 0$. Это означает, что существуют: число $\lambda > 0$; последовательность положительных чисел $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$, стремящаяся к нулю при $i \to \infty$, монотонно возрастающие отображения $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $l: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, шар B_0 в $\mathbb{R}^n$ радиуса $\delta > 0$ такие, что:

i) $$\rho(\| \psi_{k(i),j} \|_{B_0 \cap \Omega}, \| W_{k(i)}(\cdot, \mathfrak{z}) \|_{B_0 \cap \Omega}) < \varepsilon_{k(i)}$$

при $j > l(k(i))$;

ii) $$\rho(\| \psi_{k(i),j} \|_{B_0 \cap \Omega}, \| W(\cdot, \mathfrak{z}) \|_{B_0 \cap \Omega}) > \lambda$$

при $j > l(k(i))$.

Рассмотрим последовательность $(W_{k(i)}(\cdot, \mathfrak{z}))_{i \in \mathbb{N}}$ и, применяя к ней предложение 3, выделим сходящуюся подпоследовательность $(W_{k'(i)}(\cdot, \mathfrak{z}))_{i \in \mathbb{N}}$, предел которой обозначим через θ. Пусть $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю, $\delta > 0$. По определению решения $W_{k'(i)}(\cdot, \mathfrak{z})$ и согласно преложению 2 для каждого i существует номер $N(i)$ такой, что для любого шара B радиуса δ и для $j > N(k'(i))$ справедливо неравенство

$$-\gamma_i \le \| H_i(\cdot, D\psi_{k'(i),j}(\cdot)) \|_{\Omega \cap B} < \gamma.$$

Из этого неравенства, условия равномерности по $(x, p) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ и стремления к H функций H_i вытекает

$$\| H_i(\cdot, D\psi_{k'(i),j}(\cdot)) \|_{\Omega \cap B} \to 0$$

при $i \to \infty$, $j > N(k'(i))$.

Пусть $M(i) = \max\{ N(k'(i)), l(k'(i)) \}$. Тогда последовательность $(\theta_i = \psi_{k'(i),M(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ имеет свойства:

i) (θ_i) слабо сходится к θ;

ii) $H_i(\theta_i, D\theta_i)$ слабо сходится к 0;

iii) $\theta_i(\mathfrak{z}) \to 0$ при $i \to \infty$ (в $\mathbb{R}$);

iv) $\rho(\| \theta_i \|_{B_0 \cap \Omega}, \| W_{k'(i)}(\cdot, \mathfrak{z}) \|_{B_0 \cap \Omega}) > \lambda$;

v) $\rho(\| \theta_i \|_{B_0 \cap \Omega}, \| W_{k'(i)}(\cdot, \mathfrak{z}) \|_{B_0 \cap \Omega}) < \varepsilon_{k'(i)}$.

Из свойств i) – iii) следует, что θ является слабым решением уравнения

$\mathcal{L}(y)=0$, обращающимся в 0 в точке $\mathfrak{z}$, поэтому из iv) вытекает $\|\theta_i\|_O < \|W(\cdot,\mathfrak{z})\|_O$ в некоторой окрестности $O\subset\Omega$, так как $W(\cdot,\mathfrak{z})$ — максимальное из слабых решений, обращающихся в 0 в точке $\mathfrak{z}$. Но тогда из v) вытекает при достаточно большом i, что

$$\rho\left(\|W_{k'(i)}(\cdot,\mathfrak{z})\|_{B_0\cap\Omega}, \|W(\cdot,\mathfrak{z})\|_{B_0\cap\Omega}\right) > \frac{\lambda}{2},$$

а при этом

$$\left(\|W_{k'(i)}(\cdot,\mathfrak{z})\|_{B_0\cap\Omega}\right) < \|W(\cdot,\mathfrak{z})\|_{B_0\cap\Omega}.$$

Покажем, что последние два неравенства противоречат определению $W_{k'(i)}(\cdot,\mathfrak{z})$ как базисного решения (т. е. максимального из слабых решений, обращающихся в 0 в точке $\mathfrak{z}$). Для этого достаточно показать, что $W(\cdot,\mathfrak{z})$ является слабым решением уравнения $H_{k'(i)}(y,Dy)=0$. Действительно из условия $H_i\le H$ и определения $W(\cdot,\mathfrak{z})$ как решения $\mathcal{L}(y)=0$ немедленно следует, что при любом i $W(\cdot,\mathfrak{z})$ является слабым решением неравенства $H_i(y,Dy)\ge\ge 0$, обращающимся в $\mathbb{1}$ в точке $\mathfrak{z}$.

Согласно утверждению 7 $W(\cdot,\mathfrak{z})$ является слабым решением и уравнения $H_i(y,Dy)=0$, обращающимся в $\mathbb{1}$ в точке $\mathfrak{z}$. Получаемое противоречие доказывает теорему.

Замечания. **3.** Условия теоремы 3 на последовательность H_i таковы, что для любой непрерывной функции H, удовлетворяющей условию А, найдутся дифференцируемые функции H_i, удовлетворяющие условию А, а также и всем остальным условиям теоремы. Они могут быть получены „процедурой сглаживания", пригодной для всех гамильтонианов.

4. Условие равномерности по (x,p) стремления функций H_i к функции H не может быть отброшено, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть

$$\Omega=[-1,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2,\quad H_i(x,p)=-p_1+\frac{1}{i}p_2;$$

$\varphi:[-1,1]\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция, убывающая на $[-1,0]$, возрастающая на $[0,1]$, $\varphi(0)=0$;

$$M=\max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{d\varphi}{dx}\right|$$

и $\psi:[0,1]\to\mathbb{R}$ — дифференцируемая функция такая, что для любого $x\in\in[0,1]$

$$\frac{d\varphi}{dx}\ge\frac{M}{i}.$$

Тогда функция $\theta(x_1,x_2)=\psi(x_1)+\varphi(x_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial\theta}{dx_1}-\frac{1}{i}\left|\frac{\partial\theta}{dx_2}\right|\ge 0$$

и, следовательно, является слабым решением уравнения $H_i(y,Dy)=0$, обращающимся в 0 в точке $\mathfrak{z}(0,0)$. Отсюда видно, что при всяком i базисное решение $W_i(\cdot,\mathfrak{z})$, соответствующее точке $\mathfrak{z}=(0,0)$ уравнения $H_i(y,Dy)=0$, совпадает с элементом из $M(\Omega)$, принимающим значения 0 в $\mathfrak{z}$ и ∞ во всех остальных точках.

В то же время легко видеть, что базисное решение $W(\cdot, \mathfrak{z})$ уравнения

$$-\frac{\partial y}{dx_1} = 0$$

равно 0 в точке $\mathfrak{z}(0, 0)$, принимает значение 0 в точках из $[-1, 1] \times \{0\}$ и ∞ — в остальных. Значит, $W(\cdot, \mathfrak{z})$ не является пределом в $M(\Omega)$ (или в каком-либо другом известном пространстве) базисных решений $W_i(\cdot, \mathfrak{z})$.

Благодаря теоремам 2 и 3, общая задача о нахождении решений уравнения Гамильтона – Якоби или Беллмана сводится к нахождению базисных решений в случае дифференцируемых гамильтонианов и последующему предельному переходу. Приведем в заключение формулу, дающую такие решения в виде функции „действие", доказательство вытекает из общих известных соображений гамильтонова формализма.

***Предложение* 4.** *Пусть H — дважды дифференцируемый гамильтониан в компактной области Ω, удовлетворяющий условиям A и B. Предположим, что граница $\partial\Omega$ — дифференцируемое многообразие. Пусть также*

$$\dot{p} = -H_q(q, p), \qquad \dot{q} = H_p(q, p), \tag{6}$$

— соответствующая гамильтонова система $\Omega \times \mathbb{R}^n$ и функция

$$(q, p) \to \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} - H(q, p)$$

ограничена снизу. Тогда базисное решение $W(\cdot, \mathfrak{z})$ совпадает с классом эквивалентности в $M(\Omega)$, определенным функцией

$$W(x, \mathfrak{z}) = \operatorname{Inf}\left(\int_0^t p(\tau, p_0, \mathfrak{z}) \frac{\partial H}{\partial p}(p(\tau, p_0, \mathfrak{z}), q(\tau, p_0, \mathfrak{z}))\, d\tau\right),$$

где Inf *берется по всем $t \geq 0$ и по множеству всех траекторий $(q(\cdot, p_0, \mathfrak{z}), p(\cdot, p_0, \mathfrak{z}))$ системы* (6) *с начальными данными $p(0) = p_0$, $q(0) = \mathfrak{z}$, удовлетворяющими условию $H(\mathfrak{z}, p_0) = 0$ и $q(t, p_0, \mathfrak{z}) = x$; $W(x, \mathfrak{z}) = \mathbb{O}$, если таких траекторий не существует.*

1. *Маслов В. П.* Новый принцип суперпозиции для оптимизационных проблем // Успехи мат. наук. – 1989. – **225**. – С. 39–48.
2. *Колокольцов В., Маслов В. П.* Идемпотентный анализ как аппарат теории управления // Функцион. анализ и его прил. – 1989. – **23**, № 1. – С. 1–11; 1990. – № 4. – С. 300–307.
3. *Idempotent* analysis / Maslov V. P., Samborski S. N. (Eds.) // Advanced in Soviet Mathematics. – American Math. Soc. – 1992. – **13**. – 210 p.
4. *Maslov V. P., Samborski S. N.* Boundary value problems for stationary Hamilton–Jacobi and Bellman equations // Lect. Notes in Control and Informat. Sci. – Springer, 1993. – **197**. – P. 456–465.
5. *Samborski S.* Lagrange problem from the point of view of idempotent analysis // Proceedings of Newton Institute. – Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 1996.

Получено 11.12.96