УДК 517.91/93

Ю. А. Митропольский, акад. (Ин-т математики АН Украины, Киев),
Д. И. Мартынюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т),
В. И. Тынный, асп. (Киев. ун-т)

ПРИВОДИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ *

For the linear system of difference equations $x(t+1) = Ax(t) + P(t)x(t)$, where the matrix $P(t)$ is almost periodic, sufficient conditions are given, which reduce it to a system with a constant matrix.

Вказані достатні умови звідності лінійної системи різницевих рівнянь $x(t+1) = Ax(t) + P(t)x(t)$ з майже періодичною матрицею $P(t)$ до системи зі сталою матрицею.

Рассмотрим систему разностных уравнений

$$x(t+1) = Ax(t) + P(t)x(t), \tag{1}$$

где $x \in R^n$, A, $P(t)$ — $(n \times n)$-мерные матрицы. Будем считать, что собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A действительны, различны и отличны от нуля, поэтому, не нарушая общности, предположим, что матрица A — диагональная $P(t)$-почти периодическая матрица с базисом частот α.

Поставим задачу: найти замену переменных

$$x = (E + u_0(t))y, \tag{2}$$

приводящую систему (1) к системе

$$y(t+1) = A_0 y(t), \tag{3}$$

где A_0 — постоянная матрица.

Отметим, что случай, когда в системе (1) коэффициенты являются квазипериодическими функциями, рассматривался в работах [1 – 3], а аналогичная задача для линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими и почти периодическими коэффициентами — в работах [4 – 9].

Прежде чем доказывать теорему о приводимости системы (1), приведем необходимые в дальнейшем определения и утверждения.

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m, \dots)$ — счетный набор комплексных чисел, $\overline{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m, \dots)$ — счетный набор вещественных положительных чисел, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \dots)$ — счетный набор вещественных рационально несоизмеримых чисел. Обозначим

$$\varphi^m = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m); \quad |\varphi^m| = \max_{1 \le i \le m} |\varphi_i|, \quad \|\varphi^m\| = \sum_{i=1}^{m} |\varphi_m|;$$

$$\Pi(\overline{\rho}) = \{\varphi\colon |\operatorname{Im}\varphi_i| < \rho_i,\ i \ge 1\}, \quad \Pi_0 = \{\varphi\colon \operatorname{Im}\varphi = 0\};$$

$$\Pi(\overline{\rho}^m) = \{\varphi^m\colon |\operatorname{Im}\varphi_i| \le \rho_i,\ i = 1, \dots, m\}.$$

Норму для $(n \times n)$-мерной матрицы $\{F_{ij}(\varphi)\}_{i,j=1}^{n}$, $\varphi \in \Pi(\overline{\rho})$ определим следующим образом:

$$\|F(\varphi)\|_{\overline{\rho}} = \max_{1 \le i \le n} \sum_{i=1}^{n} \sup_{\Pi(\overline{\rho})} |F_{ij}(\varphi)|.$$

* Данная работа выполнена при финансовой поддержке ГКНТ Украины.

***Определение* 1.** *$(n\times n)$-мерная матрица $F(\varphi)$ принадлежит классу $D_1(\theta)$, $\theta>0$, если можно указать положительные монотонно неубывающие последовательности целых чисел $n(k)$ и вещественных чисел $g(k)$, положительную монотонно невозрастающую последовательность a_k, а также последовательность $(n\times n)$-мерных матриц $F_k(\varphi)=F_k(\varphi^{n(k)})$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\ln k}{n(k)g(k)}=0;\quad \overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\dfrac{\ln n(k)}{g(k)}=b<\infty;\quad \sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i\le a<\infty;$

2) $F_1(\varphi)=0$; *для каждого $k\ge 2$ матрица $F_k(\varphi)$ является 2π-периодической по каждой переменной, вещественной при вещественных φ и аналитической в области $\Pi(\overline{\rho}_k^{n(k)})$, где*

$$\overline{\rho}_k^{n(k)}=(\rho_k^1,\rho_k^2,\ldots,\rho_k^{n(k)});$$

$$\rho_k^r=c_0\sum_{i=k}^{\infty}\exp\{-a_r n(i)g(i)\},\quad r=1,\ldots,n(k),\quad c_0>0;$$

3) $\lim\limits_{k\to\infty}F_k(\varphi)=F(\varphi)$ *при* $\varphi\in\Pi_0$;

4) *существует постоянная $C_F>0$ такая, что для каждого $k>1$ выполняется неравенство*

$$\sup_{\Pi(\overline{\rho}_k^{n(k)})}\|F_k(\varphi)-F_{k-1}(\varphi)\|\le C_F\exp\{-\theta n(k)g(k)\}.$$

***Определение* 2.** *$(n\times n)$-мерная матрица $P(t)$, $t\in R$, принадлежит классу $D_1(\theta,\alpha)$, если найдется матрица $F(\varphi)$ из класса $D_1(\theta)$ такая, что $P(t)=F(\alpha,t)$, $t\in R$.*

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть при некотором $k\ge1$ система разностных уравнений*

$$x(t+1)=A_kx(t)+Q_k(\varphi^{n(k)})x(t),\quad \Delta\varphi^{n(k)}=\alpha^{n(k)},\tag{4}$$

где $x(t)\in C^n$, $\varphi^{n(k)}\in C^m$, удовлетворяет условиям:

1) *матрица A_k — вещественная диагональная матрица с диагональными элементами, удовлетворяющими соотношению*

$$\min_{\alpha\ne\beta}|\lambda_\alpha^k-\lambda_\beta^k|\ge\mu_0+2c_1\sum_{i=k}^{\infty}\exp\{-\theta n(i)g(i)\},\tag{5}$$

где μ_0, c_1 — некоторые положительные постоянные, $\theta>3a+b$;

2) *матрица $Q_k(\varphi^{n(k)})$ — 2π-периодическая по каждой переменной, вещественная при вещественных $\varphi^{n(k)}$, аналитическая в области $\Pi(\overline{\rho}_k^{n(k)})$ и удовлетворяет оценке*

$$\|Q_k\|_{\overline{\rho}_k^{n(k)}}\le c_1\exp\{-\theta n(k)g(k)\};\tag{6}$$

3) *для любого целого $m>0$ и любого целочисленного вектора $\overline{s}^m=(s_1,s_2,\ldots,s_m)$ выполняется неравенство*

$$\left| \sin \frac{\langle \alpha^m, \bar{s}^m \rangle}{2} \right|^{-1} \le c(m)\, m^m \prod_{i=1}^{m} | s_i^0 |, \tag{7}$$

где

$$s_i^0 = \begin{cases} s_i, \ s_i \ne 0, \\ 1, \ s_i = 0, \ i = 1, \dots, m; \ c(m) = \gamma d_1^m m^{d_2}, \end{cases}$$

$\gamma > 1, \ d_1 > 1, \ d_2 > 0.$

Тогда существует постоянная $c_1^0 > 0$ *такая, что при* $c_1 \le c_1^0$ *найдется замена переменных*

$$x = (E + U_k(\varphi^{n(k)}))\, y, \tag{8}$$

приводящая систему (4) *к системе*

$$y(t+1) = A_{k+1}\, y(t) + R_{k+1}\, y(t), \quad \Delta\varphi^{n(k)} = \alpha^{n(k)}, \tag{9}$$

где A_{k+1} — *вещественная диагональная матрица с диагональными элементами, удовлетворяющими соотношению*

$$\min_{\alpha \ne \beta} | \lambda_\alpha^{k+1} - \lambda_\beta^{k+1} | \ge \mu_0 + 2c_1 \sum_{i=k+1}^{\infty} \exp\{-\theta n(i) g(i)\}, \tag{10}$$

матрицы $U_k(\varphi^{n(k)})$ *и* $R_k(\varphi^{n(k)})$ 2π*-периодические по каждой переменной, вещественные при вещественных* $\varphi^{n(k)}$, *аналитические в области* $\Pi(\bar{\rho}_{k+1}^{n(k)})$ *и удовлетворяют оценкам*

$$\| R_{k+1} \|_{\bar{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \le \frac{c_1}{2} \exp\{-\theta\, n(k+1)\, g(k+1)\}, \tag{11}$$

$$\| U_k \|_{\bar{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \le c_1 c_2 \exp\{-\theta_1\, n(k+1)\, g(k+1)\}, \tag{12}$$

$$\| A_{k+1} - A_k \| \le c_1 \exp\{-\theta\, n(k) g(k)\}, \tag{13}$$

где $c_2 > 0, \ a < \theta_1 < \theta - 2a - b.$

Доказательство. Выберем функцию $U_k(\varphi^{n(k)})$ как решение уравнения

$$U_k(\varphi^{n(k)} + \alpha^{n(k)}) A_k = A_k U_k(\varphi^{n(k)}) + S_{N_k} Q_k(\varphi^{n(k)}) - D_k, \tag{14}$$

где

$$S_{N_k} Q_k = \sum_{\| \bar{s}^{n(k)} \| \le N(k)} Q_{k, \bar{s}^{n(k)}} \exp\{i \langle \varphi^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle\},$$

$$Q_{k, \bar{s}^{n(k)}} = (2\pi)^{-n(k)} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} Q_k \exp\{-i \langle \varphi^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle\} d\varphi^1 \dots d\varphi^{n(k)},$$

$$D_k = \operatorname{diag}\{Q_{k,11}, Q_{k,22}, \dots, Q_{k,nn}\},$$

$$Q_{k,jj} = \frac{1}{(2\pi)^{n(k)}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} Q_{k,jj}(\varphi^{n(k)})\, d\varphi_1 \dots d\varphi_{n(k)},$$

$$N_k = \frac{Q_2}{c_0} n^2(k) g(k) \exp\{a_1 n(k) g(k)\}, \quad \theta_2 > 0.$$

Сделав в системе (4) замену переменных (8) с функцией $U_k(\varphi^{n(k)})$, удовлетворяющей уравнению (14), переходим к системе (9), в которой

$$A_{k+1} = A_k + D_k,$$

$$R_{k+1}(\varphi^{n(k)}) = (E + U_k(\varphi^{n(k)} + \alpha^{n(k)}))^{-1} [Q_k(\varphi^{n(k)}) - S_{N_k} Q_k(\varphi^{n(k)}) +$$
$$+ Q_k(\varphi^{n(k)}) U_k(\varphi^{n(k)}) - U_k(\varphi^{n(k)} + \alpha^{n(k)}) D_k(\varphi^{n(k)})]. \tag{15}$$

В работе [1] показано, что уравнение (14) имеет периодическое решение

$$U_k(\varphi^{n(k)}) = \sum_{\| \bar{s}^{n(k)} \| \le N(k)} U_{k, \bar{s}^{n(k)}} \exp \{ i \langle \varphi^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle \}, \tag{16}$$

при этом

$$U^{\alpha,\beta}_{k, s^{n(k)}} = \frac{Q^{\alpha,\beta}_{k, \bar{s}^{n(k)}}}{\lambda_\beta e^{i \langle \alpha^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle} - \lambda_\alpha}, \tag{17}$$

где $Q^{\alpha,\beta}_{k, \bar{s}^{n(k)}}$ — элементы матрицы $Q_{k, \bar{s}^{n(k)}}$.

С учетом неравенства (7) из (17) получаем оценки

$$\left| u^{\alpha,\beta}_{k, \bar{s}^{n(k)}} \right| \le \frac{\left| Q^{\alpha,\beta}_{k, \bar{s}^{n(k)}} \right|}{\min\limits_{\alpha \ne \beta} | \lambda_\alpha - \lambda_\beta |}, \quad \langle \alpha^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle = 0,$$

$$\left| u^{\alpha,\beta}_{k, \bar{s}^{n(k)}} \right| \le \left| Q^{\alpha,\beta}_{k, \bar{s}^{n(k)}} \right| \left(2 \sin \frac{\langle \alpha^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle}{2} \min_\alpha |\lambda_\alpha| \right)^{-1}, \quad \langle \alpha^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle \ne 0.$$

Используя неравенство для коэффициентов Фурье аналитической функции, неравенства из [3, 8]

$$\sum_{\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n)} \| \bar{s} \|^n \exp \{ -2\delta \| \bar{s} \| \} \le \left(\frac{1+e}{e} n \right)^n \delta^{-2n}, \tag{18}$$

$$\sum_{\| \bar{s} \| \le N} \left| \sin \frac{\langle \omega, \bar{s} \rangle}{2} \right|^{-1} \le c_0 2^{4n+2} N^{n+1}, \tag{19}$$

если

$$\left| \sin \frac{\langle \omega, \bar{s} \rangle}{2} \right|^{-1} \le c_0 \| \bar{s} \|^n,$$

а также оценки (6), (7), получаем

$$\| U_k - \bar{U}_k \|_{\bar{\rho}^{n(k)}_{k+1}} \le \frac{1}{2 \min\limits_\alpha | \lambda_\alpha |} \sum_{0 < \| \bar{s}^{n(k)} \| \le N(k)} \| Q_{k, \bar{s}^{n(k)}} \| \left| \sin \frac{\langle \alpha^{n(k)}, \bar{s}^{n(k)} \rangle}{2} \right|^{-1} \times$$
$$\times \exp \left\{ \sum_{i=1}^{n(k)} | s_i | \rho^i_{k+1} \right\} \le \frac{\| Q_k \|_{\bar{\rho}^{n(k)}_k}}{2 \min\limits_\alpha |\lambda_\alpha|} \times$$
$$\times \sum_{0 < \| \bar{s}^{n(k)} \| \le N(k)} c(n(k))\, n(k)^{n(k)} \prod_{i=1}^{n(k)} | s^0_i | \exp \{ -| s_i | \delta_{k,i} \} \le$$
$$\le c_1 c_2 \exp \{ -\theta_1 n(k+1) g(k+1) \}, \tag{20}$$

где $\delta_{k,r} = \delta_{k,r} - \delta_{k+1,r}$, $\theta_1 < \theta - 2a - b$, c_2 — положительная постоянная. Принимая во внимание оценки (5), (6), получаем

$$\| \overline{U}_k \|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} = \frac{\| \overline{Q}_k \|}{2 \min\limits_{\alpha \neq \beta} \| \lambda_\alpha^k - \alpha_\beta^k \|} \leq \frac{\| Q_k \|_{\overline{\rho}_k^{n(k)}}}{\mu_0} \leq \frac{c_1}{\mu_0} \exp \{-\theta n(k) g(k)\}. \quad (21)$$

Из оценок (20) и (21) следует неравенство (12); если постоянную c_1 выбрать достаточно малой: $c_1 < c_1^0$, то для каждого $k \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$\| \overline{U}_k \|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \leq \frac{1}{2}. \quad (22)$$

Оценивая разность $Q_k - S_{N(k)} Q_k$, с учетом неравенств (6), (7) получаем

$$\| Q_k - S_{N(k)} Q_k \|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \leq \| Q_k \|_{\overline{\rho}_k^{n(k)}} \sum_{\| \overline{s}^{n(k)} \| \geq N(k)} \exp \{-\delta_{k,1} \| \overline{s}^{n(k)} \|\} \leq$$

$$\leq \| Q_k \|_{\overline{\rho}_k^{n(k)}} \left(\frac{2 + 2l}{\delta_{k,1}} \right)^{n(k)} \exp \{-\delta_{k,1} N(k)\} \leq c_1 \left(\frac{2 + 2l}{\delta_{k,1}} \right)^{n(k)} \times$$

$$\times \exp \{(a_1 - \theta_2) n^2(k) g(k) - \theta n(k) g(k)\} \leq \frac{c_1}{8} \exp \{-\theta n (k+1) g(k+1)\}. \quad (23)$$

С учетом (6), (12), (22), (23) находим

$$\| R_{k+1} \|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \leq \frac{c_1}{2} \exp \{-\theta n(k+1) g(k+1)\}$$

при достаточно малом c_1. Легко заметить, что функция R_{k+1} является аналитической, периодической и вещественной. Очевидно, что матрица $A_{k+1} = R_k + D_k$ является вещественной диагональной с диагональными элементами, удовлетворяющими неравенству

$$\min_{\alpha \neq \beta} | \lambda_\alpha^{k+1} - \lambda_\beta^{k+1} | \geq \min_{\alpha \neq \beta} | \lambda_\alpha^k - \lambda_\beta^k | - \min_{\alpha \neq \beta} | d_\alpha^k - d_\beta^k | \geq$$

$$\geq \min_{\alpha \neq \beta} | \lambda_\alpha^k - \lambda_\beta^k | - 2 \| Q_k \|_{\overline{\rho}_k^{n(k)}} \geq \mu_0 + 2c_1 \sum_{i=k}^{\infty} \exp \{-\theta n(i) g(i)\}, \quad (24)$$

и очевидна оценка (13), что и завершает доказательство леммы 1.

Теорема. *Предположим, что система* (1) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *матрица* A *вещественная диагональная с диагональными элементами, удовлетворяющими условию* $\min\limits_{\alpha \neq \beta} |\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \geq r_0 > 0$;

2) $P(t) \in D_1(\theta, \alpha)$, *причем* $\theta > 3a + b$;

3) *для любого целого* $m > 0$ *и любого ненулевого целочисленного вектора* $\overline{s}^m = (s_1, \ldots, s_m)$ *выполняется неравенство* (7).

Тогда существует постоянная $M_0 > 0$ *такая, что при* $C_F \leq M_0$ *найдется замена переменных* $x = (E + U_0(t)) y$ *с функцией* $U_0(t) \in D_1(\theta_1, \alpha)$, *приводящая систему* (1) *к системе* $y(t+1) = A_0 y(t)$, *где* A_0 — *постоянная матрица.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность систем

$$x(t+1) = A x(t) + F_k(\varphi^{n(k)}) x(t); \quad \Delta \varphi^{n(k)} = \alpha^{n(k)}. \quad (25)$$

Сделав в системе (25) замену переменных

$$x = (E + V_k(\varphi^{n(k-1)}))\, \bar{x}_k, \tag{26}$$

получим систему

$$\begin{cases} \bar{x}_k(t+1) = A_k x_k(t) + Q_k(\varphi^{n(k)})\bar{x}_k(t), \\ \Delta\varphi^{n(k)} = \alpha^{n(k)}, \end{cases} \tag{27}$$

где $A_k \in d_k$, $Q_k \in H(k, \bar{\rho}_k^{n(k)})$, а матрица V_k является 2π-периодической по каждой переменной, вещественной при вещественных $\varphi^{n(k-1)}$ и аналитической в области $\Pi(\bar{\rho}_k^{n(k-1)})$.

Положим в (25), (26) $k = 1$ и $V_1 = 0$, $u_1 = 0$. Тогда система

$$x(t+1) = Ax(t) + F_1(\varphi^{n(1)})x(t), \quad \Delta\varphi^{n(1)} = \alpha^{n(1)}$$

заменой переменных $x = (E + V_1)\,\bar{x}_1 = \bar{x}_1$ приводится к системе

$$\bar{x}_1(t+1) = A_1 \bar{x}_1(t) + Q_1(\varphi^{n(1)})\,\bar{x}_1(t), \quad \Delta\varphi^{n(1)} = \alpha^{n(1)},$$

где $A_1 = A$; $Q_1(\varphi^{n(1)}) = 0$. Выбираем постоянную c_1 настолько малой, чтобы выполнить неравенство

$$r_0 \geq 4c_1 \sum_{i=1}^{\infty} \exp\{-\theta n(i) g(i)\}.$$

Отсюда $A_1 \in d_1$, $Q_1 \in H(1, \bar{\rho}_1^{n(1)})$.

Предполагаем, что при некотором $k \geq 1$ замена переменных (26) приводит систему (25) к системе (27), в которой $A_k \in d_k$, $Q_k \in H(k, \bar{\rho}_k^{n(k-1)})$, а матрица V_k 2π-периодическая по каждой переменной, вещественная при вещественных $\varphi^{n(k-1)}$ и аналитическая в области $\Pi(\bar{\rho}_k^{n(k-1)})$. Тогда система (27) удовлетворяет всем условиям леммы 1 и при достаточно малом c_1 существует замена переменных

$$\bar{x}_k = (E + u_k(\varphi^{n(k)}))\,\bar{x}_{k+1},$$

приводящая систему (27) к системе

$$\bar{x}_{k+1}(t+1) = A_{k+1}\,\bar{x}_{k+1}(t) + R_{k+1}(\varphi^{n(k)})\,\bar{x}_{k+1}(t), \quad \Delta\varphi^{n(k)} = \alpha^{n(k)}.$$

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = Ax(t) + F_k(\varphi^{n(k)})x(t) + (F_{k+1}(\varphi^{n(k+1)}) - F_k(\varphi^{n(k)}))x(t), \ \Delta\varphi^{n(k)} = \alpha^{n(k)}.$$

Используя замену

$$x = (E + V_{k+1}(\varphi^{n(k)}))\,\bar{x}_{k+1},$$

где

$$V_{k+1}(\varphi^{n(k)}) = (E + V_k(\varphi^{n(k-1)}))(E + U_k(\varphi^{n(k)})),$$

получаем систему

$$\bar{x}_{k+1}(t+1) = A_k \bar{x}_{k+1}(t) + Q_{k+1}(\varphi^{n(k+1)})\,\bar{x}_{k+1}(t); \quad \Delta\varphi^{n(k+1)} = \alpha^{n(k+1)},$$

в которой

$$R_{k+1}(\varphi^{n(k+1)}) = R_{k+1}(\varphi^{n(k)}) + (E+V_{k+1}(\varphi^{n(k)}+\alpha^{n(k)}))^{-1} \times$$
$$\times (F_{k+1}(\varphi^{n(k+1)}) - F_k(\varphi^{n(k)}))(E+V_{k+1}(\varphi^{n(k)})).$$

Аналогично [8], справедливы оценки

$$\left\| E + V_{k+1} \right\|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \le \prod_{i=1}^{\infty} (1 + c_1 c_2 \exp\{-\theta_1 n(i) g(i)\}) = p_1,$$

$$\left\| (E + V_{k+1})^{-1} \right\|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \le \prod_{i=1}^{\infty} (1 + 2c_1 c_2 \exp\{-\theta_1 n(i) g(i)\}) = p_2,$$

$$\left\| Q_{k+1} \right\|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \le c_1 \exp\{-\theta n(k+1) g(k+1)\}, \tag{28}$$

$$\left\| V_{k+1}(\varphi^{n(k)}) - V_k(\varphi^{n(k-1)}) \right\|_{\overline{\rho}_{k+1}^{n(k)}} \le p_1 c_1 c_2 \exp\{-\theta_1 n(k+1) g(k+1)\}.$$

Из (28) следует равномерная сходимость последовательности $V_k(\varphi) = V_k(\varphi^{n(k)})$, $\varphi \in \Pi_0$. Обозначим $V_0(\varphi) = \lim_{k\to\infty} V_k(\varphi)$; $U_0(t) = V_0(\alpha t)$, $A_0 = \lim_{k\to\infty} A_k$.

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = Ax(t) + F_k(\alpha^{n(k)})x(t) + (F(\alpha t) - F_k(\alpha^{n(k)}t))x(t). \tag{29}$$

Используя замену

$$x = (E + V_k(\alpha^{n(k-1)}t))y$$

убеждаемся, что замена переменных $x = (E + U_0(t))y$ приводит систему уравнений (1) в виду $y(t+1) = A_0 y(t)$.

1. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости линейных систем разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Вычисл. и прикл. математика. – 1974. – Вып. 23. – С. 116 – 127.
2. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Приводимость линейных систем разностных уравнений с гладкой правой частью // Там же. – 1976. – Вып. 27. – С. 34 – 40.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 213 с.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
5. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу о построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Математическая физика. – Киев: Наук. думка, 1967. – С. 185 – 198.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 6. – С. 42 – 59.
7. *Самойленко А. М.* О приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Там же. – 1968. – **20**, № 2. – С. 279 – 281.
8. *Филлипов М. Г.* К вопросу о приводимости систем линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами // Асимптотические методы и их применение в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 132 – 137.
9. *Баскаков А. Г.* Теорема о приводимости линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 4. – С. 416 – 421.

Получено 12. 04. 93