УДК 517.949.2

Х. М. Гулов, асп.,
Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

The problem of existence of integral sets for a system of difference equations is studied. We obtain sufficient conditions for the existence of integral sets, their stability, and study the behavior of the trajectories of the system, which start in a sufficiently small neighborhood of the integral set.

Досліджується питання існування інтеральних множин систем різницевих рівнянь. Одержані достатні умови існування інтегральних множин, їх стійкості, а також вивчена поведінка траєкторій досліджуваної системи, що починається в достатньо малому околі інтегральних множин.

Объектом исследования данной работы является система разностных уравнений вида

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= a_k(\varphi_k, x_k, \varepsilon), \\ x_{k+1} &= A_k(\varphi_k, x_k, \varepsilon)\, x_k + b_k(\varphi_k, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1}$$

в которой $\varphi = (\varphi^1, \ldots \varphi^m)$, $x = (x^1, \ldots x^n)$, матричные функции $A_k(\varphi, x)$ и векторные функции $a_k(\varphi, x)$, $b_k(\varphi)$ периодические по φ^ν, $\nu = 1, \ldots, m$, с периодом 2π, определенные в области

$$\varphi \in \mathfrak{T}_m, \quad \| x \| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x^j)^2 \right)^{1/2} \leq d, \quad d > 0, \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \tag{2}$$

$\mathfrak{T}_m$ — m-мерный тор.

Говорят [1 – 6], что система уравнений (1) имеет интегральное множество, если для любого $k \in \mathbb{Z}$ существует функция $u_k(\varphi)$: $\mathfrak{T}_m \to R^n$, имеющая свойство: если решение $\{\varphi_k(\varphi_0, x_0), x_k(\varphi_0, x_0)\}$, $\varphi_0 = \varphi_{k_0}(\varphi_0, x_0)$, $x_0 = x_{k_0}(\varphi_0, x_0)$ при некотором $k_0 \in \mathbb{Z}$ удовлетворяет соотношению $x_{k_0}(\varphi_0, x_0) = u_{k_0}(\varphi_0)$, то при всех $k \in \mathbb{Z}$ справедливо равенство $x_k = u_k(\varphi_k(\varphi_0, u_{k_0}(\varphi_0)))$.

Очевидно, последовательность функций $\{u_k(\varphi)\}$, $k \in \mathbb{Z}$, определяет интегральное множество системы (1), если она является решением системы функционально разностных уравнений

$$u_{k+1}(a_k(\varphi, u_k(\varphi), \varepsilon)) = A_k(\varphi, u_k(\varphi), \varepsilon)\, u_k(\varphi) + b_k(\varphi, \varepsilon). \tag{3}$$

Рассмотрим вопрос существования интегральных множеств системы (1) в предположении, что $b_k(\varphi, \varepsilon) = 0$, т. е. при $\varepsilon = 0$ эта система имеет тривиальное интегральное множество $x \equiv 0$. В дальнейшем мы установим условия, при выполнении которых система (1) имеет интегральное множество при $\varepsilon > 0$, и покажем, что это множество непрерывно зависит от параметра ε в предположении, что такую зависимость от ε имеют и функции, определяющие уравнения (1).

Вспомогательные утверждения. Рассмотрим систему уравнений

$$\varphi_{k+1} = a_k(\varphi_k), \quad x_{k+1} = A_k(\varphi_k)\, x_k + b_k(\varphi_k), \tag{4}$$

в которой $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, $x \in R^n$, $a_k(\varphi)$, $b_k(\varphi)$, $A_k(\varphi)$ — 2π-периодические по φ^ν,

$\nu = 1, \ldots, m$, функции. Обозначим через $\varphi_k(k_0, \varphi)$ произвольное решение $\varphi_{k_0}(k_0, \varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$ первого из уравнений (4) и предположим, что отображение $\varphi \to a_k(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, взаимно однозначно отображает $\mathcal{T}_m$ в $\mathcal{T}_m$ при каждом $k \in \mathbb{Z}$. Нетрудно убедиться, что при любых целых k и q справедливо равенство

$$\varphi_k(q, \varphi_q(k_0, \varphi)) = \varphi_k(k_0, \varphi) \tag{5}$$

для любых фиксированных $k_0 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Рассмотрим линейную относительно x_k систему разностных уравнений

$$x_{k+1} = A_k(\varphi_k(k_0, \varphi))\, x_k + b_k(\varphi_k(k_0, \varphi)), \tag{6}$$

зависящую от $k_0 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ как от параметров.

Предположим, что последовательность вектор-функций $b_k(\varphi)$ ограничена и существует функция Грина $G(k, s, k_0, \varphi)$ задачи об ограниченных при всех $k \in \mathbb{Z}$ решениях уравнений (6). Тогда

$$x_k = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k_0, \varphi)\, b_s(\varphi_s(k_0, \varphi)) \tag{7}$$

представляет собой семейство ограниченных при всех $k \in \mathbb{Z}$ решений системы (6), зависящих от $k_0 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ как от параметров. Отметим, что указанная функция Грина удовлетворяет соотношению

$$G(k, s, k_0, \varphi_{k_0}(k, \varphi)) = G(k, s, k, \varphi). \tag{8}$$

Семейство ограниченных решений (7) заполняет интегральное множество

$$x = u_k(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k, \varphi)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi)). \tag{9}$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть последовательность вектор-функций* $b_k(\varphi)$ *ограничена и, кроме того, существует функция Грина* $G(k, s, k_0, \varphi)$, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \| G(k, s, k_0, \varphi) \| < K < \infty \tag{10}$$

для всех k_0, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$.

Тогда система (4) *имеет интегральное множество* $u_k(\varphi)$, *которое задается соотношением* (9).

Рассмотрим частный случай системы уравнений (4)

$$\varphi_{k+1} = a_k(\varphi_k), \quad x_{k+1} = A x_k + b_k(\varphi_k). \tag{11}$$

Здесь A — постоянная матрица, векторы $a_k(\varphi)$ и $b_k(\varphi)$ такие же, как в системе (4). Пусть $\varphi_k(k_0, \varphi)$, $\varphi_{k_0}(k_0, \varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_m$ — произвольное решение первого из уравнений (11), тогда остается в силе равенство (5). Из второго уравнения системы (11) получаем следующую линейную систему:

$$x_{k+1} = Ax_k + b_k(\varphi_k(k_0, \varphi)), \tag{12}$$

зависящую от $k_0 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ как от параметров.

Предположим, что характеристические числа матрицы A по модулю не равны единице, а последовательность вектор-функций $b_k(\varphi)$ ограничена, тогда

$$x_k = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k-s)\, b_s(\varphi_s(k_0, \varphi)) \tag{13}$$

представляет собой семейство ограниченных при всех $k \in \mathbb{Z}$ решений системы (12), зависящих от $k_0 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathcal{T}_m$ как от параметров. Это семейство покрывает интегральное множество

$$x = u_k(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k-s)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi)), \tag{14}$$

где $G(k-s)$ является функцией Грина для задачи об интегральных множествах системы (11).

Итак, справедлива следующая теорема о существовании интегральных множеств системы (11).

Теорема 2. *Предположим, что характеристические числа матрицы* A *удовлетворяют условию* $|\lambda_i(A)| \neq 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ *а последовательность вектор-функций* $b_k(\varphi)$ *ограничена. Тогда система уравнений* (11) *имеет интегральное множество* $u_k(\varphi)$, *которое задается соотношением* (14).

Переходим к исследованию исходной системы (1).

Следуя [1], интегральное множество $\mathcal{T}(\varepsilon)$ системы (1) будем искать в виде

$$x = u_k(\varphi, \varepsilon), \tag{15}$$

где $u_k(\varphi, \varepsilon)$ — непрерывная, периодическая по φ с периодом 2π функция.

Выражение (15) определяет $\mathcal{T}(\varepsilon)$, если выполняется соотношение

$$\begin{aligned} u_k(\varphi_{k+1}(k_0, \varphi), \varepsilon) = A_k(\varphi_k(k_0, \varphi),\, u_k(\varphi_k(k_0, \varphi), \varepsilon)) \times \\ \times\, u_k(\varphi_k(k_0, \varphi), \varepsilon) + b_k(\varphi_k(k_0, \varphi), \varepsilon) \end{aligned} \tag{16}$$

для всех целых k, где $\varphi_k(k_0, \varphi)$ — решение системы

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= a_k(\varphi_k, u_k(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon), \\ \varphi_{k_0}(k_0, \varphi) &= \varphi, \quad k_0 \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \mathcal{T}_m. \end{aligned} \tag{17}$$

Интегральное множество $\mathcal{T}(\varepsilon)$ будем искать как предел последовательности множеств $\mathcal{T}^0(\varepsilon),\ \mathcal{T}^1(\varepsilon), \ldots, \mathcal{T}^i(\varepsilon), \ldots,$ каждое из которых является интегральным множеством

$$\mathcal{T}^i(\varepsilon)\colon\ x = u_k^i(\varphi, \varepsilon), \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{18}$$

системы уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= a_k(\varphi_k, u_k^{i-1}(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon), \\ x_{k+1} &= A_k(\varphi_k, u_k^{i-1}(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon)\, x_k + b_k(\varphi_k, \varepsilon). \end{aligned} \tag{19}$$

Возможность нахождения $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ таким путем обосновывает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть функции* $a_k(\varphi, x, \varepsilon)$, $b_k(\varphi, \varepsilon)$ *и матричная функция* $A_k(\varphi, x, \varepsilon)$ *являются непрерывными по* φ, x *при* $\|x\| \le d$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. *Тогда если последовательность* (18) *равномерно сходится для любого* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$:

$$\lim_{i\to\infty} u_k^i(\varphi, \varepsilon) = u_k(\varphi, \varepsilon), \tag{20}$$

то предельная функция $u_k(\varphi, \varepsilon)$ *определяет интегральное множество* $\mathfrak{T}(\varepsilon)$: $x = u_k(\varphi, \varepsilon)$ *системы* (1).

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству леммы 1 из [1].

Множества $\mathfrak{T}^{i+1}$ будем искать, используя функцию Грина для задачи об ограниченных решениях линейной системы уравнений

$$x_{k+1} = A_k(\varphi_k(k_0, \varphi),\ u_k^i(\varphi_k(k_0, \varphi), \varepsilon), \varepsilon)\, x_k + b_k(\varphi_k(k_0, \varphi), \varepsilon), \tag{21}$$

полученной из системы (19) заменой в ней φ_k на общее решение $\varphi_k(k_0, \varphi)$, $\varphi_{k_0}(k_0, \varphi) = \varphi$ первого уравнения (19).

Пусть $G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)$ — указанная функция Грина. Тогда

$$x_k(\varphi, \varepsilon) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)\, b_s(\varphi_s(k_0, \varphi), \varepsilon) \tag{22}$$

является семейством ограниченных решений системы (21), зависящих от k_0, φ, ε как от параметров. Это семейство покрывает интегральное множество

$$\mathfrak{T}^{i+1}(\varepsilon):\ x = u_k^{i+1}(\varphi, \varepsilon) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k, \varphi, \varepsilon)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi), \varepsilon), \tag{23}$$

если функция $G(k, s, k, \varphi, \varepsilon)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi), \varepsilon)$ периодическая по φ с периодом 2π и такова, что

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k, \varphi_k(k_0, \varphi), \varepsilon)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi_k(k_0, \varphi)), \varepsilon) =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)\, b_s(\varphi_s(k_0, \varphi), \varepsilon). \tag{24}$$

Если функция $G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)$ удовлетворяет указанным выше условиям, то система (19) имеет интегральное множество $\mathfrak{T}^i(\varepsilon)$: $x = u_k^i(\varphi, \varepsilon)$ и последнее определяется выражением

$$u_k^i(\varphi, \varepsilon) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k, \varphi, \varepsilon)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi), \varepsilon). \tag{25}$$

Функцию $G(k, s, k, \varphi, \varepsilon)$, определяющую согласно (25) интегральное множество $x = u_k^i(\varphi, \varepsilon)$ системы (19), естественно назвать функцией Грина для задачи об интегральных множествах системы (19). Из свойств гладкости по φ, ε этой функции вытекает гладкость интегральных множеств $\mathfrak{T}^i(\varepsilon)$, а из малости разности между функциями Грина для системы (21) при $i = \nu + 1$ и $i = \nu$ — сходимость последовательности интегральных множеств $\mathfrak{T}^i(\varepsilon)$ при $i \to \infty$. Таким образом, при изучении интегральных множеств системы (1) важную роль играет функция Грина для задачи об интегральных множествах системы (19). Укажем ее общий вид.

Пусть имеется система уравнений вида

$$\varphi_{k+1} = a_k(\varphi_k, \varepsilon), \quad x_{k+1} = A_k(\varphi_k, \varepsilon)\, x_k \tag{26}$$

и $\varphi_k(k_0, \varphi, \varepsilon)$, $\varphi_{k_0}(k_0, \varphi, \varepsilon) = \varphi$ — решение первого из уравнений (26). Тогда получаем следующую систему:

$$x_{k+1} = A_k(\varphi_k(k_0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)\, x_k. \tag{27}$$

Рассмотрим функцию

$$G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} \prod\limits_{\nu = k-1}^{s+1} \tilde{A}_\nu(\varphi_\nu(k_0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) & \text{при } s \le k-1, \\ -\prod\limits_{\nu = k}^{s} \tilde{\tilde{A}}_\nu^{-1}(\varphi_\nu(k_0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) & \text{при } s \ge k. \end{cases} \tag{28}$$

Предположим, что матричная функция $G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)$ такова, что

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} \| G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon) \| < K < \infty \tag{29}$$

для всех $k, k_0 \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathfrak{T}_m$. С учетом равенства (5) нетрудно видеть, что

$$G(k, s, k, \varphi, \varepsilon) = \begin{cases} \prod\limits_{\nu = k-1}^{s+1} \tilde{A}_\nu(\varphi_\nu(k, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) & \text{при } s \le k-1, \\ -\prod\limits_{\nu = k}^{s} \tilde{\tilde{A}}_\nu^{-1}(\varphi_\nu(k, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) & \text{при } s \ge k \end{cases} \tag{30}$$

является функцией Грина для задачи об ограниченных решениях системы

$$x_{k+1} = A_k(\varphi_k(k_0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon)\, x_k + b_k(\varphi_k(k_0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon). \tag{31}$$

Следовательно, $G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)$ является функцией Грина для задачи об интегральных множествах системы (26), если функция $G(k, s, k, \varphi, \varepsilon)$ удовлетворяет условию (24). Последнее легко установить, если учесть, что $G(k, s, k, \varphi_k(k_0, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) = G(k, s, k_0, \varphi, \varepsilon)$ для любых целых k, k_0, s.

Рассмотрим теперь систему

$$\varphi_{k+1} = a_k^0(\varphi_k) + a_k^1(\varphi_k), \quad x_{k+1} = [A_k^0(\varphi_k) + A_k^1(\varphi_k)]\, x_k + b_k(\varphi_k), \tag{32}$$

где $a_k^0(\varphi)$, $A_k^0(\varphi)$, $a_k^1(\varphi)$, $A_k^1(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $a_k^0(\varphi)$ и $A_k^0(\varphi)$ — фиксированные, $a_k^1(\varphi)$, $A_k^1(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ — произвольные, но малые в смысле нормы $C^1(\varphi)$ функции. Пусть $\varphi_k(k_0, \varphi)$, $\varphi_{k_0}(k_0, \varphi) = \varphi$ — решение первого из уравнений (32). Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть система уравнений* (32) *такова, что можно указать такие* $M > 0$, $0 < \gamma < 1$, *что при всех* $a_k^1(\varphi)$ *и* $A_k^1(\varphi)$, *для которых*

$$\max\{|a_k^1(\varphi)|_1,\ |A_k^1(\varphi)|_1\} \le M, \tag{33}$$

существует функция Грина $G(k, s, k, \varphi)$ *задачи об интегральных множествах, удовлетворяющая условию*

$$|G(k, s, k, \varphi)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi))|_1 \le K\gamma^{|k-s|}|b_s(\varphi)|_1 \tag{34}$$

при всех целых $s \in (-\infty, \infty)$.

Тогда система (32) *имеет интегральное множество* $\mathfrak{T}:\ x = u_k(\varphi)$, *для которого* $u_k(\varphi)$ — *непрерывно дифференцируемая функция и*

$$|u_k(\varphi)|_1 \le \frac{2K}{1-\gamma}|b_k(\varphi)|_1. \tag{35}$$

Действительно, поскольку система (32) имеет функцию Грина, то функция $u_k(\varphi)$, определяемая равенством

$$u_k(\varphi) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k, \varphi)\, b_s(\varphi_s(k, \varphi)),$$

является интегральным множеством. Условие (34) приводит к тому, что $u_k(\varphi)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (35).

Для использования доказанной леммы при построении последовательности интегральных множеств (18) поступаем следующим образом. Положим, что

$$\begin{gathered} a_k^0(\varphi) = a_k(\varphi, 0, 0), \quad A_k^0(\varphi) = A_k(\varphi, 0, 0), \\ a_k^1(\varphi, x, \varepsilon) = a_k(\varphi, x, \varepsilon) - a_k(\varphi, 0, 0), \quad A_k^1(\varphi, x, \varepsilon) = A_k(\varphi, x, \varepsilon) - A_k(\varphi, 0, 0) \end{gathered} \tag{36}$$

и $b_k(\varphi, \varepsilon)$, $a_k(\varphi, x, \varepsilon)$ и $A_k(\varphi, x, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируемы при $\|x\| < d$ и всех $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$. Пусть

$$\max\{|a_k^1(\varphi, x, \varepsilon)|_1,\ |A_k^1(\varphi, x, \varepsilon)|_1,\ |b_k(\varphi, \varepsilon)|_1\} = L(d, \varepsilon_0), \tag{37}$$

где $L(d, \varepsilon_0) \to 0$ при $d \to 0$ и $\varepsilon_0 \to 0$.

Теорема 3. *Пусть функции* $a_k^0(\varphi)$ *и* $A_k^0(\varphi)$ *таковы, что система* (32) *удовлетворяет условиям леммы* 2. *Тогда можно указать такое* ε^0, $0 < \varepsilon^0 \le \le \varepsilon_0$, *чтобы при всех* $\varepsilon < \varepsilon^0$ *последовательность систем* (19) *определяла последовательность интегральных множеств* (18), *каждое из которых непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет неравенству*

$$|u_k^i(\varphi, \varepsilon)|_1 \le \frac{2K}{1-\gamma}L(0, \varepsilon^0). \tag{38}$$

Доказательство. Поскольку $u_k^0 = 0$, то теорема справедлива при $i = 0$. Предположим, что она справедлива и для всех $i = 1, 2, \dots, j-1$. Покажем, что интегральное множество $\mathfrak{T}^i(\varepsilon)$: $x = u_k^j(\varphi, \varepsilon)$ существует и удовлетворяет неравенству (38).

Рассмотрим для этого систему (19) при $i = j$, записав ее в виде

$$\begin{gathered} \varphi_{k+1} = a_k^0(\varphi_k) + a_k^1(\varphi_k, u_k^{j-1}(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon), \\ x_{k+1} = [A_k^0(\varphi_k) + A_k^1(\varphi_k, u_k^{j-1}(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon)]\, x_k + b_k(\varphi_k, \varepsilon). \end{gathered} \tag{39}$$

Поскольку функции a_k^1 и A_k^1 удовлетворяют неравенству (37), а $u_k^{j-1}(\varphi, \varepsilon)$ — неравенству (38), то при достаточно малом ε^0

$$\max \{| a_k^1(\varphi, u_k^{j-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)|_1, | A_k^1(\varphi, u_k^{j-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)|_1\} \le 2L\left(\frac{2K}{1-\gamma} L(0, \varepsilon^0), \varepsilon^0\right) \tag{40}$$

для всех $\varepsilon < \varepsilon^0$. Зафиксируем теперь ε^0, исходя из условия, что

$$2L\left(\frac{2K}{1-\gamma} L(0, \varepsilon^0), \varepsilon^0\right) \le M, \quad \frac{2K}{1-\gamma} L(0, \varepsilon^0) \le d, \tag{41}$$

где M — константа из леммы 2. Поскольку $L(0, \varepsilon^0) \to 0$ при $\varepsilon^0 \to 0$, то зафиксировать ε^0 можно всегда. При всех $\varepsilon < \varepsilon^0$ к системе (39) можно применить лемму 2 и найти интегральное множество $\mathfrak{T}^j(\varepsilon)$: $x = u_k^j(\varphi, \varepsilon)$. Это множество непрерывно дифференцируемо при всех $\varepsilon \le \varepsilon^0$ и

$$| u_k^j(\varphi, \varepsilon)|_1 \le \frac{2K}{1-\gamma} | b_k(\varphi, \varepsilon)|_1, \quad \varepsilon \le \varepsilon^0. \tag{42}$$

Так как согласно (37) $| b_k(\varphi, \varepsilon)|_1 \le L(0, \varepsilon_0)$, то неравенство (42) приводит к оценке (38), которая и завершает доказательство теоремы 3.

Таким образом, установлены условия существования последовательности интегральных множеств (18). Докажем теперь сходимость этой последовательности. Поскольку $x = u_k^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$ — интегральное множество системы (19), то функция $u_k^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$u_{k+1}^{i+1}(\varphi_{k+1}, \varepsilon) = [A_k^0(\varphi_k) + A_k^1(\varphi_k, u_k^i(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon)]\, u_k^{i+1}(\varphi_k, \varepsilon) + b_k(\varphi_k, \varepsilon), \tag{43}$$

где $\varphi_k = \varphi_k(k_0, \varphi, \varepsilon)$, $\varphi_{k_0}(k_0, \varphi, \varepsilon) = \varphi$ — общее решение уравнения

$$\varphi_{k+1} = a_k^0(\varphi_k) + a_k^1(\varphi_k, u_k^i(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon) \tag{44}$$

и $a_k^0(\varphi)$, $A_k^0(\varphi)$, $a_k^1(\varphi, x, \varepsilon)$ и $A_k^1(\varphi, x, \varepsilon)$ определяются согласно (36).

Так как равенство (43) выполняется при любом k, то при $k = k_0$ получаем, что функция $u_{k_0}^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$ является периодическим по ε с периодом 2π решением функционального уравнения

$$u_{k_0+1}^{i+1}(a_{k_0}^0(\varphi) + a_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= [A_{k_0}^0(\varphi) + A_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, u_{k_0}^{i+1}(\varphi, \varepsilon) + b_{k_0}(\varphi, \varepsilon).$$

Аналогично, $u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon)$ является решением следующего уравнения:

$$u_{k_0+1}^i(a_{k_0}^0(\varphi) + a_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^{i-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= [A_{k_0}^0(\varphi) + A_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^{i-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon) + b_{k_0}(\varphi, \varepsilon).$$

Положим $u_{k_0+1}^{i+1}(\varphi, \varepsilon) - u_{k_0+1}^i(\varphi, \varepsilon) = w_{k_0+1}^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$. Тогда функция $w_{k_0+1}^{i+1}(\varphi, \varepsilon)$ является периодическим по φ с периодом 2π решением уравнения

$$w_{k_0+1}^{i+1}(a_{k_0}^0(\varphi) + a_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- [A_{k_0}^0(\varphi) + A_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)]\, w_{k_0}^{i+1}(\varphi, \varepsilon) =$$
$$= u_{k_0+1}^i(a_{k_0}^0(\varphi) + a_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^{i-1}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- u_{k_0+1}^i(a_{k_0}^0(\varphi) + a_{k_0}^1(\varphi, u_{k_0}^i(\varphi, \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) +$$

$$+ A^1_{k_0}(\varphi, u^i_{k_0}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)\, u^i_{k_0}(\varphi, \varepsilon) - A^1_{k_0}(\varphi, u^{i-1}_{k_0}(\varphi, \varepsilon), \varepsilon)\, u^i_{k_0}(\varphi, \varepsilon), \tag{45}$$

а следовательно, определяет интегральное множество $x = w^{i+1}_k(\varphi, \varepsilon)$ системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= a^0_k(\varphi_k) + a^1_k(\varphi_k, u^i_k(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon), \\ x_{k+1} &= [A^0_k(\varphi_k) + A^1_k(\varphi_k, u^i_k(\varphi_k, \varepsilon), \varepsilon)]\, x_k + c^i_k(\varphi_k, \varepsilon), \end{aligned} \tag{46}$$

где через $c^i_k(\varphi, \varepsilon)$ обозначена правая часть уравнения (45). Система (46) имеет вид системы (32), а поэтому мы можем записать $w^{i+1}_k(\varphi, \varepsilon)$ с помощью функции Грина задачи об интегральных множествах системы (46)

$$w^{i+1}_k(\varphi, \varepsilon) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} G(k, s, k, \varphi)\, c^i_s(\varphi_s(k, \varphi), \varepsilon)$$

и получить с учетом неравенства (35), что

$$|w^{i+1}_k(\varphi, \varepsilon)|_0 \le \frac{2K}{1-\gamma} |c^i_k(\varphi, \varepsilon)|_0 \le \frac{2K}{1-\gamma} |u^i_k|_1 (|a^1_k|_1 + |A^1_k|_1) |w^i_k(\varphi, \varepsilon)|_0.$$

В силу оценок (35) и (37) находим

$$|w^{i+1}_k(\varphi, \varepsilon)|_0 \le \rho_0 |w^i_k(\varphi, \varepsilon)|_0 \le \rho_0^{i-1} |u^1_k(\varphi, \varepsilon)|_0 \le \rho_0^{i-1} \frac{2K}{1-\gamma} |c_k(\varphi, \varepsilon)|_0, \tag{47}$$

где ρ_0 — положительная константа меньше единицы при малых ε. Неравенство (47) доказывает равномерную сходимость последовательности интегральных множеств (18) и непрерывность предельной функции по ε в точке $\varepsilon = 0$. Мы доказали, следовательно, что справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда последовательность* (18) *интегральных множеств системы* (19) *равномерно сходится к функции* $u_k(\varphi, \varepsilon)$: $\lim\limits_{i \to \infty} u^i_k(\varphi, \varepsilon) = u_k(\varphi, \varepsilon)$, *причем таким образом, что*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_k(\varphi, \varepsilon)|_0 = 0.$$

Из леммы 1 и 3 вытекает основная теорема существования интегрального множества возмущенной системы (1).

Теорема 4. *Предположим, что правая часть системы*

$$\varphi_{k+1} = a_k(\varphi_k, x_k, \varepsilon), \quad x_{k+1} = A_k(\varphi_k, x_k, \varepsilon)\, x_k + b_k(\varphi_k, \varepsilon) \tag{48}$$

удовлетворяет условиям:

I. *Функции* $a_k(\varphi, x, \varepsilon)$, $b_k(\varphi, \varepsilon)$, $A_k(\varphi, x, \varepsilon)$ *непрерывно дифференцируемы при* $\|x\| \le d$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$.

II.

$$\max\{|a_k(\varphi, x, \varepsilon) - a_k(\varphi, 0, 0)|_1, |A_k(\varphi, x, \varepsilon) - A_k(\varphi, 0, 0)|_1, |b_k(\varphi, \varepsilon)|_1\} = L(d, \varepsilon_0),$$

где $L(d, \varepsilon_0) \to 0$ *при* $d \to 0$, $\varepsilon_0 \to 0$.

III. *Для любых достаточно малых по норме* $C^1(\varphi)$ *функций* $a^1_k(\varphi)$, $A^1_k(\varphi)$ *и* $b^1_k(\varphi)$ *возмущенное линеаризованное уравнение*

$$\varphi_{k+1} = a_k(\varphi_k, 0, 0) + a^1_k(\varphi_k), \quad x_{k+1} = [A_k(\varphi_k, 0, 0) + A^1_k(\varphi_k)]\, x_k + b^1_k(\varphi) \tag{49}$$

имеет функцию Грина $G(k, s, k, \varphi)$ *задачи об интегральных множествах, удовлетворяющую неравенству*

$$|G(k, s, k, \varphi)\, b_s^1(\varphi_s(k, \varphi))|_1 \le K\gamma^{|k-s|}|b_s^1(\varphi)|_1 \tag{50}$$

при всех целых s, где K — положительная постоянная, $0<\gamma<1$.

Тогда можно указать такое ε^0, что для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon^0]$ система уравнений (48) *имеет интегральное множество $\mathfrak{T}(\varepsilon)$: $x = u_k(\varphi, \varepsilon)$, для которого*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_k(\varphi, \varepsilon)|_0 = 0. \tag{51}$$

Следует заметить, что использование теоремы 4 требует проверки условия III. В некоторых случаях вместо этого условия удобно проверить эквивалентное ему условие

III′. Для любых достаточно малых по норме $C^1(\varphi)$ функций $a_k^1(\varphi)$, $A_k^1(\varphi)$ и $b_k^1(\varphi)$ возмущенное линеаризованное уравнение (49) имеет интегральное множество $\mathfrak{T}$: $x = u_k(\varphi)$, для которого $|u_k(\varphi)|_1 \le K|b_k^1(\varphi)|_1$, где K — положительная константа.

Для применения развитой выше схемы необходимо знать свойства функции Грина для задачи об интегральных множествах линеаризованной системы (49).

Будем рассматривать лишь те системы вида (48), для которых тривиальное решение системы

$$x_{k+1} = [A_k(\varphi_k(k_0, \varphi), 0, 0) + A_k^1(\varphi_k(k_0, \varphi))]\, x_k \tag{52}$$

асимптотически устойчиво при всех достаточно малых по норме матриц $A_k^1(\varphi)$. Для таких систем функция Грина рассматриваемой задачи существует и имеет вид

$$G(k, s, k, \varphi) = \begin{cases} \prod_{\nu=k-1}^{s+1} A_\nu(\varphi_\nu(k, \varphi)) & \text{при } s \le k-1, \\ 0 & \text{при } s \ge k. \end{cases} \tag{53}$$

Пусть матрица $A_k(\varphi, 0, 0)$ такова, что

$$\max_{\langle \eta, \eta \rangle = 1} \langle A_k(\varphi, 0, 0)\, A_k'(\varphi, 0, 0)\, \eta, \eta \rangle \le \gamma, \tag{54}$$

где $A_k'(\varphi, 0, 0)$ — матрица, транспонированная по отношению к $A_k(\varphi, 0, 0)$, $0<\gamma<1$.

При выполнении неравенства (54) можно показать, что функция $G(k, s, k, \varphi)$ удовлетворяет неравенству (50).

Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* I *и* II *теоремы* 4, *а матрица $A_k(\varphi, 0, 0)$ такова, что выполняется неравенство* (54). *Тогда можно указать такое $\varepsilon^0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon^0$ система уравнений* (1) *имеет интегральное множество $\mathfrak{T}(\varepsilon)$: $x = u_k(\varphi, \varepsilon)$, для которого*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |u_k(\varphi, \varepsilon)|_0 = 0.$$

1. *Самойленко А. М., Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* Существование инвариантных торов систем разностных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 10. – С. 1904 – 1910.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – **34**, № 6. – С. 1219 – 1240.
3. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
4. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 139 с.
5. *Самарский А. А., Карамзин Ю. Н.* Разностные уравнения. – М.: Знание, 1978. – 62 с.
6. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.

Получено 25. 06. 92