УДК 517.947

А. М. Гомилко, канд. физ.-мат. наук (Ин-т гидромеханики АН Украины, Киев)

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ЧАСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

A bundle of differential operators

$$\mathcal{L}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}:\ \mathcal{L}(\lambda)y(x) = y^{(4)}(x) - 2\lambda^2 y^{(2)}(x) + \lambda^4 y(x),\ |x| \le 1,\ y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0$$

is considered. For a pair of functions $f(x), g(x)$, we obtain the results concerning their expansion in various functional spaces with respect to the system $\{y_k(x), i\lambda_k y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, where $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, are eigenfunctions of the bundle $\mathcal{L}(\lambda)$, which correspond to the eigenvalues λ_k with $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$.

Розглядається жмуток диференціальних операторів

$$\mathcal{L}(\lambda),\ \lambda \in \mathbb{C}:\ \mathcal{L}(\lambda)y(x) = y^{(4)}(x) - 2\lambda^2 y^{(2)}(x) + \lambda^4 y(x),\ |x| \le 1,\ y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0.$$

Одержані результати про розклад у різних функціональних просторах пари функцій $f(x), g(x)$ за системою $\{y_k(x), i\lambda_k y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, де $y_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, — власні функції жмутка $\mathcal{L}(\lambda)$, що відповідають власним значенням λ_k з $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$.

1. Введение. В банаховом пространстве $L_p = L_p[-1, 1]$, $1 < p < \infty$, рассматривается пучок дифференциальных операторов $\mathcal{L}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}(\lambda)y(x) = y^{(4)}(x) - 2\lambda^2 y^{(2)}(x) + \lambda^4 y(x),\ y(x) \in W_p^4,\ y^{(k)}(\pm 1) = 0,\ k = 0, 1, \tag{1}$$

где $W_p^k = W_p^k[-1, 1]$, $k = 1, 2, \ldots$, — пространство Соболева. В настоящей работе изучается вопрос о возможности и характере сходимости двукратного разложения

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \begin{pmatrix} y_k(x) \\ i\lambda_k y_k(x) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}\lambda_k > 0, \tag{2}$$

где $y_k(x)$ — собственные функции пучка операторов $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающие собственным значениям λ_k с $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$. Задача о разложении (2) связана с решением по методу Фурье первой граничной задачи для однородного бигармонического уравнения в полуполосе $z \ge 0$, $|x| \le 1$. Она была поставлена в качестве одной из математических проблем теории пластин еще в работе [1]. Решение этой проблемы было дано (в различных функциональных пространствах) в [2–4] (см. также [5, 6] и [7, с. 227]), причем совершенно отличными методами. В данной работе развиваются результаты статьи [4], на основании подхода, изложенного в [6].

Для простоты изложения рассматривается симметричная задача, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются четными функциями. В этом случае, считая в (1) $y(x) = y(-x)$, получаем, что собственные значения λ_k пучка операторов $\mathcal{L}(\lambda)$ определяются как корни целой функции $\Delta(\lambda) = \operatorname{sh}\lambda \operatorname{ch}\lambda + \lambda$ за исключением $\lambda = 0$, а соответствующие собственные функции $y_k(x)$ определяются выражениями

$$y_k(x) = U(\lambda_k, x), \quad U(\lambda, x) = (\lambda \operatorname{ch}\lambda + \operatorname{sh}\lambda)\operatorname{ch}\lambda x - \lambda x \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\lambda x. \tag{3}$$

Идея получения разложения (2) основана на интегрировании по расширяющейся системе контуров из верхней полуплоскости вектор-функций

$$(i\lambda)^j T(\lambda)\,\frac{U(\lambda,x)}{\Delta(\lambda)},\ j=0,1,\ \ T(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2}.$$

При этом последовательность вещественных чисел α_n определяется видом функции $U(\lambda, x)$ [6], а последовательность Y_n определяется через решение некоторого специального интегрального уравнения на полуоси. В соответствии с (3) далее считаем $\alpha_n = \pi n,\ n = 0, 1, \ldots$, значит,

$$U(i\alpha_n, x) = i(-1)^n\alpha_n\cos\alpha_n x,\ \ U'_\lambda(i\alpha_n, x) = 2(-1)^n\cos\alpha_n x,\ n = 1, 2, \ldots .$$

В работе при определенных условиях на функции f, g доказана справедливость разложения (2), приведены явные выражения для коэффициентов разложения c_k и их оценки, а также дана оценка скорости сходимости ряда из (2) к заданной паре функций в различных функциональных пространствах.

Полагаем также, что четные комплекснозначные функции $f(x),\ g(x)$ удовлетворяют условиям

$$f\in W_p^4,\ \ g\in W_p^3,\ \ 1<p<\infty,\ \ f^{(k)}(\pm 1) = g^{(k)}(\pm 1) = 0,\ \ k=0,1. \tag{4}$$

Тогда по теореме вложения Соболева $f\in C^3,\ g\in C^2$, где $C^k = C^k[-1, 1]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-1, 1]$ функций. Всюду далее числа $q = p(p-1)^{-1},\ p_0 = \min(2, p),\ q_0 = p_0(p_0-1)^{-1}$. Будем использовать разложение в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\cos\alpha_n x,\ \ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n\cos\alpha_n x, \tag{5}$$

Далее используются равенства [8, с. 298; 687]

$$\int_0^\infty \frac{s^{\gamma+2}}{\left(s^2+1\right)^2}\,ds = \frac{\pi}{4}\,r(\gamma),\qquad \operatorname{Re}\gamma\in(-3, 1), \tag{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(t^2+\alpha_n^2\right)^2} = \frac{1}{2t^3}\left(\frac{\Delta(t)}{2\operatorname{sh}^2 t}-\frac{1}{t}\right),\qquad t>0, \tag{7}$$

где $r(\gamma) = (\gamma+1)/\cos(\pi\gamma/2)$.

2. Определение и оценки функции $T(\lambda)$. По коэффициентам Фурье (5) функций $f(x),\ g(x)$ определим мероморфные функции комплексного переменного λ:

$$F_{0,1}(\lambda) = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha_n^3 f_n}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2},\quad F_{0,2}(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\lambda^2-\alpha_n^2\right)g_n}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2} \tag{8}$$

и положим $F_0(\lambda) = F_{0,1}(\lambda) + F_{0,2}(\lambda),\ F_1(\lambda) = 4\lambda^3 F_0(\lambda)$. Пусть $X(s)\in L_\infty[0,\infty)$ — ограниченное решение интегрального уравнения

$$X(s) - \int_0^\infty Q(s,t)X(t)\,dt = F(s),\ \ s>0, \tag{9}$$

где ядро и правая часть

$$Q(s,t) = \frac{16s^3 \operatorname{sh}^2 s}{\pi\Delta(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^3}{\left(s^2+\alpha_n^2\right)^2\left(t^2+\alpha_n^2\right)^2}, \quad F(s) = \frac{\operatorname{sh}^2 s}{\Delta(s)} F_1(s).$$

Определим последовательность

$$X_n = \frac{4\alpha_n^3}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{X(s)}{\left(s^2+\alpha_n^2\right)^2} ds, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

и на основании (8)–(10) мероморфную функцию

$$T(\lambda) = X(\lambda) \frac{\Delta(\lambda)}{2\lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda} \equiv 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2} + 2F_0(\lambda). \tag{11}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (4), *причем*

$$f^{(3)}(\pm 1) = 0, \quad g_0 = 0. \tag{12}$$

Тогда функция $F(s) \in C[0,\infty)$ *допускает оценку* $F(s) = O(s^{-1})$, $s \to \infty$, *а уравнение* (9) *имеет единственное ограниченное решение, и это решение определяется рядом Неймана*

$$X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} Q_n(s,t) F(t) dt + F(s), \quad s > 0, \tag{13}$$

сходящимся в пространстве $C[0,d]$ *для любого* $d < \infty$, *где* $Q_n(s,t)$ — n*-я итерация ядра* $Q(s,t)$.

Доказательство. В силу (4), (12) имеем $f_n = \alpha_n^{-4} f_n^{(4)}$, $n \geq 1$, поэтому по неравенствам Гельдера и Хаусдорфа – Юнга [9, с. 172]

$$|F_{0,1}(s)| \leq \frac{2}{s^4} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-q_0} \right)^{1/q_0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(4)}|^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq \frac{c}{s^4}, \quad s \geq 1.$$

Используя [8, с. 730] и условия (4), (12) получаем

$$F_{0,2}(s) = -\frac{1}{s^3 \operatorname{sh} s} \int_{-1}^{1} g^{(3)}(x) \left[\operatorname{cth} s \operatorname{sh} sx - x \operatorname{ch} sx + \frac{3 \operatorname{sh} sx}{s} \right] dx + \frac{6g^{(2)}(1)}{s^4}, \tag{14}$$

откуда, используя то, что $g^{(3)} \in L_p$, нетрудно заключить, что $F_{0,2}(s) = O(s^{-4})$, $s \to \infty$. Таким образом, $F(s) = O(s^{-1})$, $s \to \infty$. Ядро $Q(s,t) \geq 0$ удовлетворяет следующим условиям регулярности (см. (6), (7) и [8, с. 687]):

$$1 - \int_0^{\infty} Q(s,t)\, dt = \frac{2 \operatorname{sh}^2 s}{s\Delta(s)}, \quad s^2 - \int_0^{\infty} Q(s,t)\, t^2 dt = \frac{2s^3}{\Delta(s)}, \quad s \geq 0, \tag{15}$$

причем $0 < \operatorname{sh}^2 s / (s\Delta(s)) \leq c(1+s)^{-1}$ и $s/\Delta(s) > 0$ при $s \geq 0$. Тогда из первого равенства (15) и общих результатов Л. В. Канторовича о разрешимости функциональных уравнений в полуупорядоченных пространствах ([10], гл. 12, § 3), примененных к уравнению (9) в вещественном K-пространстве $L_\infty[0,\infty]$ с учетом оценки $F(s) = O(s^{-1})$, $s \to \infty$, получаем утверждение леммы о разрешимости и представлении (13) в случае вещественных функций f, g, что не ограничивает общности рассмотрений. Для доказательства единственности решения $X(s) \in L_\infty[0,\infty]$ воспользуемся вторым равенством из (15) и приемом из работы [11]. Пусть $X_0(s) \in L_\infty[0,\infty]$ — решение однородного уравнения (9); тогда из (9) получаем, что $Y(s) = s^{-2}X_0(s)$ — непрерывная при $s \geq 0$ функция, причем $Y(s) \to 0,\ s \to \infty$. Пусть $s_0 \geq 0$ — такая точка, что

$$\sup_{s \geq 0} |Y(s)| = |Y(s_0)|,$$

тогда, используя (15), имеем

$$|Y(s_0)| \leq \left(1 - \frac{2s_0}{\Delta(s_0)}\right)|Y(s_0)| \leq (1-\varepsilon)|Y(s_0)|, \quad \varepsilon > 0,$$

т. е. $Y(s_0) = 0$, и значит, $Y(s) \equiv 0$. Лемма доказана.

Отметим, что в условиях леммы 1 справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty X(s)\, s^{-4}\, ds = f_0, \tag{16}$$

для получения которого следует разделить уравнение (9) на функцию $2\pi s^3 \mathrm{sh}^2 s / \Delta(s)$ и проинтегрировать полученное соотношение по s с учетом равенств (6) и (7).

Из равенства (см. также [12], § 1.11 о свойствах функции $\Phi(z, s, 1)$)

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \alpha_n^\gamma e^{i\alpha_n x} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L z^\gamma \frac{e^{izx}}{\sin z}\, dz, \quad \mathrm{Re}\,\gamma < -1,$$

где контур интегрирования $L = L^- \cup L^+$, $L^\pm = \{z \in \mathbb{C}\colon\ z = 1 + te^{\pm i\delta},\ t \geq 0\}$ с произвольным числом $\delta \in (0, \pi/2)$ вытекает, что при любом $x \in (-1, 1)$ функции

$$C(\gamma, x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \alpha_n^\gamma \cos\alpha_n x, \quad S(\gamma, x) = \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \alpha_n^\gamma \sin\alpha_n x$$

аналитически продолжаются на всю комплексную γ-плоскость, причем для любых $\mu \geq 0$, $\delta > 0$ существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$|C(\gamma, x)| + |S(\gamma, x)| \leq c e^{\delta|\mathrm{Im}\gamma|}(1 - |x|)^{-(1+\mu)}, \quad \mathrm{Re}\,\gamma \leq \mu, \quad |x| < 1. \tag{17}$$

Из (8) и леммы 1 имеем оценки

$$F_1(s) = O(s^3), \quad s \to 0, \quad F_1(s) = O(s^{-1}), \quad s \to \infty,$$

на основании которых определим преобразование Меллина

$$G(\gamma) = \int_0^\infty F_1(s)\, s^{\gamma-1}\, ds, \quad \mathrm{Re}\,\gamma \in (-3, 1).$$

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *функция* $G(\gamma)$ *мероморфна в полосе* $\mathrm{Re}\,\gamma \in (-3,\ 1 + 1/q)$ *с единственным простым полюсом в точке* $\gamma = 1$, *причем* $\forall\ \delta > 0$, $\sigma_1 < 1 + 1/q$ *верна оценка*

$$|G(\gamma)| \leq c e^{-(\pi/2-\delta)|\mathrm{Im}\gamma|}, \quad \mathrm{Re}\,\gamma \in (-1, \sigma_1), \quad |\gamma - 1| \geq 1. \tag{18}$$

Доказательство. Учитывая (8), (12) и равенство (6), а также определение функций $C(\gamma, x)$, $S(\gamma, x)$, получаем

$$G(\gamma) = -\frac{2\pi}{\cos\pi\gamma/2}\left\{(\gamma+1)\int_{-1}^1 f^{(4)}(x)\, C(\gamma-2, x)\, dx + \right.$$

$$+ \;(\gamma+2)\int_{-1}^{1} g^{(3)}(x)\,S(\gamma-2,x)\,dx\Bigg\}, \tag{19}$$

где $\operatorname{Re}\gamma\in(-1,1)$. При этом по неравенству Гельдера

$$\left\| \,l(x)(1-|x|)^{-\mu}\,\right\|_{L_1} \le c\,\|l(x)\|_{L_p},\; \mu<1/q,$$

и тогда с учетом (17) получаем, что из правой части равества (19) вытекает мероморфное продолжение функции $G(\gamma)$ в полосу $\operatorname{Re}\gamma\in(-1,1+1/q)$ с простым полюсом при $\gamma=1$ и оценкой (18).

Для $\varepsilon>0$ определим секторы

$$S_\varepsilon^{\pm}=\{\lambda:|\operatorname{Im}\lambda|<\pm\varepsilon\operatorname{Re}\lambda\},\quad S_{1,\varepsilon}^{\pm}=\{\lambda:\pm\operatorname{Im}\lambda>\varepsilon\operatorname{Re}\lambda\},$$

$$S_\varepsilon=S_\varepsilon^{+}\cup S_\varepsilon^{-},\; S_{1,\varepsilon}=S_{1,\varepsilon}^{+}\cup S_{1,\varepsilon}^{-}.$$

Лемма 3. *Пусть функции* $f(x)$, $g(x)$ *удовлетворяют условиям* (4), (12). *Тогда* $\forall\,\varepsilon>0$ *для* $F_0(\lambda)$ *верны соотношения*:

а) $F_0(\lambda)=O(\lambda^{-4}),\quad \lambda\in S_\varepsilon,\quad \lambda\to\infty;$

б) $F_0(\lambda) = H(\lambda) + \dfrac{e^{|\operatorname{Re}\lambda|}}{\operatorname{sh}\lambda}O(\lambda^{-4}),\quad \lambda\in S_{1,\varepsilon}^{+},\quad \lambda\to\infty,$

$$H(\lambda) = \frac{1}{\lambda^3\operatorname{sh}^2\lambda}\Bigg\{\frac{i}{2}\int_{-1}^{1} f^{(4)}(x)[\operatorname{ch}\lambda\operatorname{ch}\lambda x - x\operatorname{sh}\lambda\operatorname{sh}\lambda x]\,dx\,-$$

$$-\int_{-1}^{1} g^{(3)}(x)[\operatorname{ch}\lambda\operatorname{sh}\lambda x - x\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda x]\,dx\Bigg\}. \tag{20}$$

Доказательство. Так как $F_0(\lambda)=F_0(-\lambda)$, то оценки достаточно доказать для секторов S_ε^{+}, $S_{1,\varepsilon}^{+}$. Установим оценку а). Из леммы 2 по формуле обращения Меллина ([13], § 1.29) получаем

$$F_1(s) = bs^{-1}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty} G(\gamma)s^{-\gamma}d\gamma,\qquad s>0, \tag{21}$$

где $1<\sigma_1<1+1/q$ и $b=-\operatorname*{Res}_{\gamma=1}G(\gamma)$. В силу оценки (17) с достаточно малым $\delta>0$ выражение (21) дает аналитическое продолжение функции $F_1(s)$ в сектор S_ε^{+} с оценкой $F_1(\lambda)=b\lambda^{-1}+O(\lambda^{-\sigma_1})$, $\lambda\to\infty$, тогда $F_0(\lambda)=2b\lambda^{-4}+$ $+\,O(\lambda^{-3-\sigma_1})$, $\lambda\to\infty$, т. е. получили оценку а).

Рассмотрим поведение функции $F_0(\lambda)$ при $\lambda\in S_{1,\varepsilon}^{+}$, $\lambda\to\infty$. Для $F_{0,1}(\lambda)$ имеем выражение

$$F_{0,1}(\lambda) = -2\int_{-1}^{1} f^{(4)}(x)R(\lambda,x)\,dx,\quad R(\lambda,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha_n x}{\alpha_n\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2}. \tag{22}$$

При этом по теореме Коши получаем для $\lambda\in S_{1,\varepsilon}^{+}$ и контура L_0

$$R(\lambda,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\cos zx}{z(z^2+\lambda^2)^2\sin z}\,dz\,-$$

$$- \frac{i}{4\lambda^3 \operatorname{sh}^2\lambda} [x \operatorname{sh}\lambda \operatorname{sh}\lambda x - \operatorname{ch}\lambda \operatorname{eh}\lambda x] + \frac{2i \operatorname{ch}\lambda x}{\operatorname{sh}\lambda} \frac{1}{\lambda^4}. \tag{23}$$

$$L_0 = (-i\infty, -i) \cup \{z\colon |z| = 1, \ \operatorname{Re} z \geq 0\} \cup (i, i\infty).$$

Далее, справедлива оценка

$$|z^2 + \lambda^2| \geq c|\lambda|^2, \ \ z \in L_0, \ \ \lambda \in S^+_{1,\varepsilon}, \ |\lambda| \geq 2, \tag{24}$$

поэтому (так как $\|f^{(4)}(x)\ln(1-|x|)\|_{L_1} \leq c\|f^{(4)}(x)\|_{L_p}$)

$$\left| \int_{-1}^{1} f^{(4)}(x) \int_{L_0} \frac{\cos zx}{z(z^2+\lambda^2)^2 \sin z} dz\, dx \right| \leq \frac{c}{|\lambda|^4} \|f^{(4)}(x)\|_{L_p}. \tag{25}$$

Из (22), (23) и (25) получаем оценку (20) для функции $F_{0,1}(\lambda)$ при $\lambda \in S^+_{1,\varepsilon}$. Оценка (20) для $F_{0,2}(\lambda)$ вытекает из равенства (14), справедливого для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Лемма доказана.

Существенную роль для дальнейших рассмотрений играет асимптотика функции $X(s)$ при $s \to \infty$. Пусть выполнены условия леммы 1 и $X(s)$ — ограниченное решение уравнения (9). Тогда (см. (8), (10), (11)) с учетом утверждения а) леммы 3 найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, для которого функция $X(\lambda)$ допускает оценку $|X(\lambda)| \leq c|\lambda|^3/(|\lambda|+1)^3$, $\lambda \in S^+_{\varepsilon_0}$. Значит ([13], § 1.29), преобразование Меллина $\mathfrak{M}(\gamma)$ функции $X(s)$, $s > 0$, является аналитической при $\operatorname{Re}\gamma \in (-1, 0)$ функцией с оценкой

$$|\mathfrak{M}(\gamma)| \leq ce^{-d|\operatorname{Im}\gamma|}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in (-1, -\varepsilon_1) \quad \forall\, \varepsilon_1 > 0, \tag{26}$$

где постоянная $d > 0$. Применяя преобразование Меллина к уравнению (9) и используя в нем формулу обращения

$$X(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathfrak{M}(\gamma) s^{-\gamma} d\gamma, \quad \sigma \in (-1, 0), \quad s > 0, \tag{27}$$

после несложных преобразований с учетом (6) получаем для функции $\mathfrak{M}(\gamma)$ следующее соотношение:

$$\mathfrak{M}(\gamma) = \frac{r(\gamma)}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathfrak{M}(\xi)\, \pi^{\gamma - \xi} r(\xi)\, \zeta(\xi - \gamma + 1)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \mathfrak{M}(\xi) K(\gamma, \xi)\, d\xi + \mathfrak{N}(\gamma), \quad -1 < \operatorname{Re}\gamma < \sigma < 0, \tag{28}$$

$$K(\gamma, \xi) = 4r(\xi) \int_0^\infty s^{\gamma+2} \psi(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^{-\xi}}{(s^2 + \alpha_n^2)^2} ds, \quad \psi(s) = \frac{\operatorname{sh}^2 s}{\Delta(s)} - 1,$$

$$\mathfrak{N}(\gamma) = \int_0^\infty F_1(s)\, \psi(s)\, s^{\gamma - 1} ds + G(\gamma).$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана и $G(\gamma)$ — преобразование Меллина функции $F_1(s)$. Тогда, смещая в (28) контур интегрирования $\operatorname{Re}\xi = \sigma$ к $\operatorname{Re}\xi = \sigma_1$ с

$-1 < \sigma_1 < \operatorname{Re}\gamma < 0$ и учитывая наличие полюса первого порядка у функции $\zeta(z)$ при $z = 1$ с вычетом, равным 1, получаем (см. (26) и оценки $\zeta(z)$ в [14, с. 74])

$$\mathfrak{M}(\gamma)\,\frac{D(\gamma)}{\cos^2\pi\gamma/2} = \frac{r(\gamma)}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathfrak{M}(\xi)\,\pi^{\gamma-\xi}r(\xi)\,\zeta(\xi-\gamma+1)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathfrak{M}(\xi)\,K(\gamma,\xi)\,d\xi + \mathfrak{N}(\gamma), \quad -1<\sigma_1<\operatorname{Re}\gamma<0, \tag{29}$$

где функция $D(\gamma) = \cos^2\pi\gamma/2 - (\gamma+1)^2$. Далее, функция $\psi(\lambda)$ аналитична в секторе $S^+_{\varepsilon_0}$ с оценкой $|\psi(\lambda)| \le e^{-c|\lambda|}$ и найдется такое $\sigma_0 \in (1, 2)$, что функция $D(\gamma)$ при $\operatorname{Re}\gamma \in (-1, \sigma_0)$ имеет единственный простой корень в точке $\gamma = 0$ [15]. Пусть всюду далее σ_1 — произвольное число из интервала $(1, \min(1/q + 1, \sigma_0))$, тогда из (28), (29) получаем, что $\mathfrak{M}(\gamma)$ продолжается мероморфным образом в полосу $\operatorname{Re}\gamma \in [0, \sigma_1]$ (см. лемму 2) с простым полюсом при $\gamma = 0$ и верна оценка

$$|\mathfrak{M}(\gamma)| \le c e^{-d_1|\operatorname{Im}\gamma|}, \quad \operatorname{Re}\gamma \in (-1, \sigma_1], \quad |\gamma| \ge 1, \quad d_1 > 0. \tag{30}$$

Тогда, используя формулу обращения (27), с учетом (30) и $\mathfrak{M}(1) = 0$ (см. (29)), а также (10) и (6), получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и* $X(s)$ — *ограниченное решение уравнения* (9). *Тогда* $X(s)$ *допускает представление*

$$X(s) = a + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathfrak{M}(\gamma)\,s^{-\gamma}\,d\gamma, \quad s>0, \quad a = -\operatorname*{Res}_{\gamma=0}\mathfrak{M}(\gamma). \tag{31}$$

В частности, верна асимптотика $X(s) = a + O(s^{-\sigma_1})$, $s \to \infty$. *Для последовательности* X_n *справедливо представление*

$$X_n = a + X_{0,n}, \quad X_{0,n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\mathfrak{M}(\gamma)\,r(\gamma)\,\alpha_n^{-\gamma}\,d\gamma, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{32}$$

значит, $X_{0,n} = O(n^{-\sigma_1})$, $n \to \infty$.

Из (32), (11), учитывая равенство (7), получаем

$$T(\lambda) = \frac{a\Delta(\lambda)}{2\lambda^3\operatorname{sh}^2\lambda} + T_0(\lambda), \quad T_0(\lambda) = -\frac{a}{\lambda^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2X_{0,n}}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2} + 2F_0(\lambda), \tag{33}$$

причем справедлива оценка

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_{0,n}}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2}\right| \le \frac{c}{|\lambda|^4}\left(1 + \frac{|\lambda|^{2-\sigma_1}}{|\operatorname{sh}^2\lambda|}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

При $\lambda \in S_\varepsilon$ оценка (34) следует из неравенства $|\lambda^2 + \alpha_n^2| \ge c|\lambda|^2$ и теоремы 1. Если же $\lambda \in S^+_{1,\varepsilon}$, то используется равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n^{-\gamma}}{\left(\lambda^2+\alpha_n^2\right)^2} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{z^{-\gamma}\operatorname{ctg}z}{\left(z^2+\lambda^2\right)^2}\,dz - \operatorname*{Res}_{z=-i\lambda}\frac{z^{-\gamma}\operatorname{ctg}z}{\left(z^2+\lambda^2\right)^2}, \quad \operatorname{Re}\gamma > 1,$$

где контур L_0 такой же, как и в (23), оценки (24), (30), а также представление (32).

3. Основные соотношения для получения разложения (2). Введем в рассмотрение мероморфные по λ функции

$$\Phi(\lambda, x) = \frac{T(\lambda)}{\Delta(\lambda)} U(\lambda, x), \quad \Phi_0(\lambda, x) = \frac{T_0(\lambda)}{\Delta(\lambda)} U(\lambda, x), \quad |x| \le 1.$$

Отметим, что $\Phi(\lambda, x)$ не имеет особенностей на вещественной оси, так как $U(0, x) \equiv 0$. Пусть λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, — корни $\Delta(\lambda)$ из открытой верхней полуплоскости, пронумерованные в порядке возрастания модулей. Функция $\Phi(\lambda, x)$ имеет при $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ полюсы первого порядка в точках λ_k и полюсы второго порядка в точках $i\alpha_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Введем в рассмотрение контуры $\Gamma_m = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon |\lambda| = R_m, \operatorname{Im}\lambda \ge 0\}$ и $\tilde{\Gamma}_m = (-\infty, -R_m) \cup \Gamma_m \cup (R_m, +\infty)$ с $R_m = \pi(m + 1/4)$, $m = 1, 2, \ldots$. Можно показать, что существуют такие $m_0 \ge 1$, $c > 0$, для которых

$$|\Delta(\lambda)| \ge c\left(|\lambda| + e^{2|\operatorname{Re}\lambda|}\right), \quad \lambda \in \tilde{\Gamma}_m \quad \forall\, m \ge m_0. \tag{35}$$

Тогда по теореме Коши при $j = 0, 1$ и $m \ge m_0$ имеем равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (is)^j \Phi(s, x)\, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}_m} (i\lambda)^j \Phi(\lambda, x)\, d\lambda +$$
$$+ \sum_{|\lambda_k| < R_m} c_k (i\lambda_k)^j y_k(x) + \sum_{0 < \alpha_n < R_m} i \operatorname*{Res}_{\lambda = i\alpha_n} \left[(i\lambda)^j \Phi(\lambda, x)\right] \tag{36}$$

с коэффициентами

$$c_k = i\frac{T(\lambda_k)}{\Delta'(\lambda_k)} = i\frac{T_0(\lambda_k)}{2\operatorname{ch}^2\lambda_k}. \tag{37}$$

Далее, используя разложение в ряд Фурье

$$U(s, x) = \frac{2\operatorname{sh}^2\lambda}{s} + 4s^3 \operatorname{sh}^2 s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\left(s^2 + \alpha_n^2\right)^2} \cos\alpha_n x, \quad |x| \le 1,$$

соотношения (11), (16), получаем в условиях леммы 1 равенство

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, x)\, ds = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n X_n}{2\alpha_n^3} \cos\alpha_n x, \quad |x| \le 1. \tag{38}$$

Подсчитывая вычеты из (36), с использованием (11) получаем выражения

$$i \operatorname*{Res}_{\lambda = i\alpha_n} \Phi(\lambda, x) = \left[\frac{(-1)^n X_n}{2\alpha_n^3} - f_n\right] \cos\alpha_n x,$$
$$\operatorname*{Res}_{\lambda = i\alpha_n} \lambda\Phi(\lambda, x) = g_n \cos\alpha_n x. \tag{39}$$

Тогда, подставляя (38), (39) в (36), вместе с учетом четности $\Phi(s, x)$ по s, выражений (32), (33) и значений интегралов

$$\int_{\tilde{\Gamma}_m} \frac{U(\lambda, x)}{\lambda^3 \operatorname{sh}^2\lambda}\, d\lambda = 2\pi \sum_{\alpha_n > R_m} \frac{(-1)^n}{\alpha_n^3} \cos\alpha_n x, \quad \int_{\Gamma_m} \frac{U(\lambda, x)}{\lambda^2 \operatorname{sh}^2\lambda}\, d\lambda = 0$$

получаем следующие соотношения при $|x| \le 1$:

$$\sum_{\alpha_n < R_m} f_n \cos\alpha_n x - \sum_{|\lambda_k| < R_m} c_k y_k(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\tilde{\Gamma}_m} \Phi_0(\lambda, x)\, d\lambda - \sum_{\alpha_n > R_m} \frac{(-1)^n X_{0,n}}{2\alpha_n^3} \cos\alpha_n x, \tag{40}$$

$$\sum_{\alpha_n < R_m} g_n \cos\alpha_n x - \sum_{|\lambda_k| < R_m} c_k i\lambda_k y_k(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma_m} \lambda \Phi_0(\lambda, x)\, d\lambda.$$

4. Теорема о разложении. Как следует из рассмотрений п. 3, для получения утверждений о разложении пары функций $f(x)$, $g(x)$ по системе $\left\{ y_k(x), i\lambda_k y_k(x) \right\}_{k=1}^{\infty}$ следует оценить правые части в выражениях (40) при $m \to \infty$. Прежде всего, используя оценку $X_{0,n} = O(\alpha_n^{-\sigma_1})$, $n \to \infty$, и неравенство Хаусдорфа – Юнга, получаем для $l = 1, 2$

$$\left\| \sum_{\alpha_n > R_m} \frac{(-1)^n X_{0,n}}{\alpha_n^3} \cos\alpha_n x \right\|_{C^l} \le c\, R_m^{-(2-l+\sigma_1)},$$

$$\left\| \sum_{\alpha_n > R_m} f_n \cos\alpha_n x \right\|_{C^l} + \left\| \sum_{\alpha_n > R_m} g_n \cos\alpha_n x \right\|_{C^{l-1}} \le c\, R_m^{-(4-l-1/q_0)}. \tag{41}$$

Лемма 4. *Для функции*

$$N_{m,j}^l(x) = \int_{\tilde{\Gamma}_m} \left(1 + \frac{|\lambda|^{2-\sigma_1}}{|\mathrm{sh}^2\lambda|} \right) \left| \frac{\lambda^{j-4}}{\Delta(\lambda)} \frac{d^l}{dx^l} U(\lambda, x) \right| |d\lambda|, \quad |x| < 1,$$

где $0 \le l + j \le 3$, $\sigma_1 > 1$, *справедливы оценки*

$$\| N_{m,j}^l(x) \|_{L_r} \le c\, R_m^{l+j-3} (\ln R_m)^{-1/r}, \quad 1 \le r \le \infty.$$

Доказательство. Из (35) имеем для $\mu \in (0, 1)$, $|x| \le 1$

$$|\Delta(\lambda)| \ge c|\lambda|^{\mu(1-|x|)} e^{2|\mathrm{Re}\lambda|(1-\mu(1-|x|))}, \quad \lambda \in \tilde{\Gamma}_m, \quad m \ge m_0,$$

тогда, полагая $\mu = \min(\sigma_1 - 1, 1/4) \in (0, 1/4]$, получаем оценку

$$\left(1 + \frac{|\lambda|^{2-\sigma_1}}{|\mathrm{sh}^2\lambda|} \right) \frac{1}{|\Delta(\lambda)|} \le c|\lambda|^{-\mu(1-|x|)} e^{-2|\mathrm{Re}\lambda|(1-(1-|x|)/4)}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $\lambda \in \tilde{\Gamma}_m$ и $|x| \le 1$. Значит, используя представление функции $U(\lambda, x)$ в виде

$$U(\lambda, x) = \lambda\, \mathrm{ch}\, \lambda(1 - |x|) + \lambda(1 - |x|)\, \mathrm{sh}\, \lambda\, \mathrm{sh}\, \lambda|x| + \mathrm{sh}\, \lambda\, \mathrm{ch}\, \lambda x,$$

заключаем, что при $\lambda \in \tilde{\Gamma}_m$ справедлива оценка

$$\left(1 + \frac{|\lambda|^{2-\sigma_1}}{|\mathrm{sh}^2\lambda|} \right) \left| \frac{\lambda^{j-4}}{\Delta(\lambda)} \frac{d^l}{dx^l} U(\lambda, x) \right| \le$$

$$\le c|\lambda|^{j-4} |\lambda|^{l-\mu(1-|x|)} e^{-|\mathrm{Re}\lambda|(1-|x|)/2} \left(|\lambda| e^{-2|\mathrm{Re}\lambda x|} + |\lambda|(1 - |x|) + 1 \right).$$

Тогда имеем оценку

$$N_{m,j}^{l}(x) \le c\, R_m^{l+j-3-\mu(1-|x|)} \int\limits_0^1 e^{-R_m(1-|x|)t/2} \times$$

$$\times \left(R_m e^{-2R_m|x|t} + R_m(1-|x|) + 1 \right) dt +$$

$$+ c \int\limits_{R_m}^{\infty} s^{l+j-4-\mu(1-|x|)} e^{-(1-|x|)s/2} \left(s e^{-|x|s} + s(1-|x|) + 1 \right) ds \le$$

$$\le c\, R_m^{l+j-3-\mu(1-|x|)},$$

из которой и следует утверждение леммы.

Для формулировки основного результата работы (теорема 2) понадобится определение интегрального модуля непрерывности. Пусть функция $v(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, тогда, считая $v(x)$ продолженной нулем вне отрезка $[-1, 1]$, определяем модуль непрерывности

$$\omega_p(\delta, v) = \left\{ \sup_{|h|<\delta} \int\limits_{-1}^{1} |v(x+h) - v(x)|^p dx \right\}^{1/p}, \quad \delta > 0,$$

значит [16], $\omega_p(\delta, v) \to 0$, $\delta \to 0$. Справедливо следующее утверждение (см. доказательство лемм 5, 6 из [17]: пусть функция $v(x) \in L_p$, тогда существует такое $c > 0$, что при $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$

$$\left| \int\limits_{-1}^{1} e^{-\lambda(1-x)} v(x)\, dx \right| + \left| \int\limits_{-1}^{1} e^{-\lambda(1+x)} v(x)\, dx \right| \le c\, \omega_p(|\lambda|^{-1}, v).$$

Исходя из этого утверждения и выражения для функции $H(\lambda)$ из (20), получаем оценку

$$|H(\lambda)| \le c\,|\lambda|^{-3} M_p(|\lambda|^{-1}; f, g), \quad \lambda \in \Gamma_m, \tag{42}$$

где функционал

$$M_p(t; f, g) = \omega_p(t, f^{(4)}) + \omega_p(t, g^{(3)}), \quad t > 0.$$

Положим при $m = 1, 2, \ldots$ вектор-функции

$$V_m(x) = \left\{ f(x) - \sum_{|\lambda_k|<R_m} c_k y_k(x),\; g(x) - \sum_{|\lambda_k|<R_m} c_k i \lambda_k y_k(x) \right\}, \quad |x| \le 1.$$

Теорема 2. *Пусть четные функции* $f(x)$, $g(x)$ *удовлетворяют условиям* (4). *Тогда разложение* (2) *справедливо в функциональных пространствах* $W_r^l \oplus \oplus W_r^{l-1}$, $1 \le r \le \infty$, $l = 1, 2$, *причем*

$$\| V_m(x) \|_{W_r^l \oplus W_r^{l-1}} \le c\, R_m^{-(2-l)} (\ln R_m)^{-1/r} M_p(R_m^{-1}; f, g). \tag{43}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить оценки (43). Не умаляя общности, можно считать, что функции $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют также условиям (12). В самом деле, из равенств

$$y_k^{(3)}(\pm 1) = \mp 2 \lambda_k^3 \operatorname{sh}^2 \lambda_k, \quad \int\limits_{-1}^{1} y_k(x)\, dx = \frac{4 \operatorname{sh}^2 \lambda_k}{\lambda_k}$$

следует, что для произвольных корней λ_k, λ_j с $|\lambda_k| \neq |\lambda_j|$ пара функций

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ g_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} - \beta_k \begin{pmatrix} y_k(x) \\ i\lambda_k y_k(x) \end{pmatrix} - \beta_j \begin{pmatrix} y_j(x) \\ i\lambda_j y_j(x) \end{pmatrix} \tag{44}$$

с коэффициентами

$$\beta_k = \frac{i\lambda_j^3 g_0 - 2f^{(3)}(1)}{4\operatorname{sh}^2\lambda_k(\lambda_k^3 - \lambda_j^3)}, \quad \beta_j = \frac{i\lambda_k^3 g_0 - 2f^{(3)}(1)}{4\operatorname{sh}^2\lambda_j(\lambda_j^3 - \lambda_k^3)}$$

удовлетворяет как условиям (4), так и условиям (12), причем

$$R_m^{-1} \leq cM_p(R_m^{-1}; f, g), \quad m = 1, 2, \ldots$$

(если $|f(x)| + |g(x)| \not\equiv 0$). Тогда согласно равенствам (40) с учетом леммы 4 и оценок (41), (42) имеем при $1 \leq r \leq \infty$ и $l = 1, 2$:

$$\| V_m(x) \|_{W_r^l \oplus W_r^{l-1}} \leq c \left\{ R_m^{-(2-l+\sigma_1)} + R_m^{-(4-l-1/q_0)} + \sum_{j=0}^{l} \| N_{m,0}^j(x) \|_{L_r} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=0}^{l-1} \| N_{m,1}^j(x) \|_{L_r} + M_p(R_m^{-1}; f, g) \left(\sum_{j=0}^{l} \| N_{m,1}^j(x) \|_{L_r} + \sum_{j=0}^{l-1} \| N_{m,2}^j(x) \|_{L_r} \right) \right\} \leq$$

$$\leq \frac{c}{R_m^{2-l}} \left\{ \frac{1}{R_m^{\sigma_1}} + \frac{1}{R_m^{2-1/q_0}} + \frac{1}{(\ln R_m)^{1/r}} \left(\frac{1}{R_m} + M_p(R_m^{-1}; f, g) \right) \right\},$$

откуда, учитывая неравенства $\sigma_1 > 1$, $1 - 1/q_0 > 0$ и $R_m^{-1} \leq cM_p(R_m^{-1}; f, g)$, получаем (43). Теорема доказана.

Из теоремы 2 при $r = \infty$ вытекает справедливость разложения (2) в пространствах $C^l \oplus C^{l-1}$ с $l = 1, 2$, причем

$$\| V_m(x) \|_{C^l \oplus C^{l-1}} \leq c\, R_m^{-(2-l)} M_p(R_m^{-1}; f, g).$$

Замечание. Из леммы 1 с учетом (44) получаем, что в условиях теоремы 2 коэффициенты c_k разложения (2) определяются явным образом через ряд Неймана (13) согласно выражениям (37).

Согласно [18] для λ_k верна асимптотика

$$|\operatorname{Re}\lambda_k| = (1/2)\ln k + O(1), \quad \operatorname{Im}\lambda_k = \pi k + O(1), \quad k \to \infty,$$

из которой следует оценка $|H(\lambda_k)| \leq ck^{-3}(\ln k)^{-1/q}$. Тогда согласно (37), (33), (34) имеем следующую оценку для коэффициентов разложения (2):

$$|c_k| \leq ck^{-4}(\ln k)^{-1/q}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{45}$$

С другой стороны, так как [5]

$$|y_k'(x)| + |\lambda_k y_k(x)| \leq ck^3(\ln k)^{-1}, \quad |x| \leq 1,$$

оценка (45) показывает, что разложение (2) в условиях теоремы 2 абсолютно сходится в пространстве $C^1 \oplus C$. Это утверждение и оценка (45) анонсированы в работе [4] (см. также близкий результат в [2]).

Замечание. Утверждения теоремы 2 остаются в силе и в случае нечетных функций $f(x)$, $g(x)$, удовлетворяющих условиям (4). Таким образом, утверждение о справедливости разложения (2) в пространстве $W_r^l \oplus W_r^{l-1}$, где $1 \le \le r \le \infty$, $l = 1, 2$, с оценкой скорости сходимости (43) верно для любой пары функций $f(x)$, $g(x)$ с условиями (4). При исследовании нечетного случая используется та же схема, что и в случае четных функций $f(x)$, $g(x)$. Основное отличие состоит в том, что в нечетном случае ядро и правая часть в интегральном уравнении (9) имеют вид

$$Q(s, t) = \frac{16 s^3 \operatorname{sh}^2 s}{\pi \Delta_1(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^3}{(s^2+\alpha_n^2)^2 (t^2+\alpha_n^2)^2},$$

$$F(s) = \frac{4 s^3 \operatorname{sh}^2 t}{\Delta_1(s)} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n (3\alpha_n^3 + s^2) f_n}{(s^2+\alpha_n^2)^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha_n^2 g_n}{(s^2+\alpha_n^2)^2} \right\},$$

где функция $\Delta_1(s) = \operatorname{sh} s \operatorname{ch} s - c$ и f_n, g_n — коэффициенты Фурье функций $f(x)$, $g(x)$ по системе функций $\{ \sin \alpha_n x \}_{n=1}^{\infty}$. При этом собственные значения λ_k пучка операторов $L(\lambda)$ определяются как корни целой функции $\Delta_1(\lambda)$, за исключением $\lambda = 0$, а соответствующие собственные функции выбираются в виде $y_k(x) = U_1(\lambda_k, x)$, где функция

$$U_1(\lambda, x) = \lambda (\operatorname{ch} \lambda \operatorname{sh} \lambda x - x \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda x).$$

1. *Папкович П. Ф.* Два вопроса теории изгиба тонких упругих плит // Прикл. математика и механика. – 1941. – **5**, вып. 3. – С. 359–374.
2. *Gregory R. D.* The traction boundary value problem for the elastostatic semi-infinite strip; existence of solution, and completeness of the Papkoviçh–Fadle eigenfunctions // J. Elasticity. – 1980. – **10**, № 3. – P. 295–327.
3. *Шкаликов А. А.* Разложение по собственным функциям в плоской задаче теории упругости // Неклассические задачи метематической физики. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР. – 1980. – С. 171–174.
4. *Гомилко А. М., Мелешко В. В.* Задача Дирихле для бигармонического уравнения в полуполосе // Докл. АН СССР. – 1987. – **294**, № 5. – С. 1045–1048.
5. *Gregory R. D.* Green's functions, bilinear forms, and completeness of the eigenfunctions for the elastostatic strip and wedge // J. Elasticity. – 1979. – **9**, № 3. – P. 283–309.
6. *Гомилко А. М., Мелешко В. В.* О методе Файлона разложения функций в ряды по однородным решениям в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. – 1986. – № 4. – С. 48–53.
7. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1983. – **9**. – С. 190–229.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 880 с.
9. *Эдвардс Р.* Ряды Фурье в современном изложении: В 2-х т. – М.: Мир, 1985. – Т. 2. – 400 с.
10. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 408 с.
11. *Бондаренко П. С.* К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Мат. сб. – 1951. – **29**, № 2. – С. 403–418.
12. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М.: Наука, 1965. – Т. 1. – 296 с.
13. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М., Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 480 с.
14. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа: В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1963. – Т. 2. – 516 с.
15. *Seif J. B.* On the Green's functions for the biharmonic equation in an infinite wedge // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – **182**, № 1. – P. 241–260.
16. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947. – 324 с.
17. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 384–396.
18. *Жданович В. Ф.* Формулы для нулей полиномов Дирихле и квазиполиномов // Докл. АН СССР. – 1960. – **135**, № 5. – С. 1046–1049.

Получено 08. 08. 91