УДК 517.911

М. У. Ахметов, канд. физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

A method of the study of differential equations with a nonclassical right-hand side [1] is applied to the investigation of the higher order differentiability of solutions to differential equations with a discontinuous right-hand side. The results of theory of differential equations with pulse action [2] are also used.

Для вивчення питання про диференційовну залежність вищого порядку розв'язків систем диференціальних рівнянь з розривною правою частиною від початкових даних застосовується метод дослідження диференціальних рівнянь з некласичною правою частиною.

Пусть $\Omega = \Omega_t \times \Omega_x \subset R^1 \times R^n$ — ограниченная область, Γ_i, $i = \overline{1, p}$, — поверхности в Ω, определенные уравнениями $t = \tau_i(x)$, $t \in \Omega_t$, $x \in \Omega_x$. Будем полагать, что любые две поверхности Γ_i могут пересекаться по $(n-1)$-мерной гиперповерхности или не иметь ни одной общей точки. Совокупность множеств Γ_i разбивает область Ω на части Ω_k, $k = \overline{1, m}$. На объединении областей Ω_k определим кусочно-непрерывную функцию $f(t, x)$. Предположим, что она имеет по каждому x_j, $j = \overline{1, n}$, частную производную и непрерывна в любом из множеств Ω_k, $k = \overline{1, m}$, вместе со всеми своими частными производными вплоть до границы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1}$$

Предположим, что поверхность разрыва для функции f единственна ($p = 1$) и обозначим ее Γ. Пусть она задается уравнением $t = \tau(x)$. Множество Γ делит область Ω на части Ω_- и Ω_+ таким образом, что если $(t', x) \in \Omega_-$, $(t'', x) \in \Omega_+$, то $t' < t''$. Пусть $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$. Введем следующие обозначения:

$$f^- = \lim_{\substack{(t, x) \to (\bar{t}, \bar{x}) \\ (t, x) \in \Omega_-}} f(t, x), \quad f^+ = \lim_{\substack{(t, x) \to (\bar{t}, \bar{x}) \\ (t, x) \in \Omega_+}} f(t, x),$$

$\bar{n} = \{1, -\partial\tau/\partial x_1, \ldots, -\partial\tau/\partial x_n\}$, где значения функций $\partial\tau/\partial x_j$, $j = \overline{1, n}$, вычислены в точке $x = \bar{x}$, $\bar{n}$ — нормаль к поверхности Γ в точке $(\bar{t}, \bar{x})$, направленная в сторону Ω_+. Обозначим также $f_n^- = \langle \{1, f^-\}, \bar{n} \rangle$, $f_n^+ = \langle \{1, f^+\}, \bar{n} \rangle$, где $\langle \,, \rangle$ — скалярное произведение в R^{n+1}.

Определим и изучим свойства решения уравнения (1) при существовании для его интегральной кривой предельных точек на множестве Γ.

Пусть $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$. По установленным требованиям [3] решение уравнения (1) в этой точке удовлетворяет равенству

$$\frac{dx}{dt} = \alpha f^- + \beta f^+, \tag{2}$$

в котором α и β — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha + \beta = 1$, $0 \le \alpha \le 1$.

Для уточнения выбора α из множества $[0, 1]$ примем следующие соглашения. Если $(\bar{t}, \bar{x})$ является предельной точкой для $(t, x(t)) \notin \Gamma$ при увеличении t, то будем рассматривать α такое, чтобы функция dx/dt была непрерывной слева в точке $t = \bar{t}$, т. е. $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$ в зависимости от того, что

$(t, x(t)) \in \Omega_-$ или $(t, x(t)) \in \Omega_+$ при $t < \bar{t}$. В случае, когда решение $x(t)$ проходит на промежутке $]a, b[$ по поверхности Γ, не покидая ее, будем считать, что $\alpha = f_n^+(f_n^+ - f_n^-)^{-1}$, и тогда, если обозначить $F = \alpha f^- + \beta f^+$, решение $x(t)$ удовлетворяет на промежутке $]a, b[$ уравнению

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x). \tag{3}$$

Здесь выбор α обусловлен тем, что вектор F лежит в плоскости касательной к поверхности Γ в точке (t, x).

Для того чтобы сохранить гладкость функции F, будем считать, что функция $t = \tau(x)$ дважды непрерывно дифференцируема. Будем также предполагать, что функция F ограничена вместе со своими частными производными. Это условие вытекает из перечисленных для функций f свойств, если, например, дополнительно считать, что существует действительное число $\gamma > 0$, для которого при всех $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$ справедливо неравенство

$$| f_n^+ - f_n^- | \geq \gamma. \tag{4}$$

Для характеристики поведения решений системы (1) в окрестности поверхности Γ используем следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть для точки* $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$ *выполняется неравенство* $f_n^- > 0$ ($f_n^- < 0$). *Тогда в области* Ω_- *существует единственное решение задачи Коши* $x(\bar{t}) = \bar{x}$ *системы* (1), *определенное на некотором промежутке* $t_1 < t \leq \bar{t}$ ($\bar{t} \leq t < t_1$).

Аналогичное утверждение справедливо для области Ω_+.

Доказательство. Так как функцию f можно гладким образом продолжить в некоторую окрестность точки $(\bar{t}, \bar{x})$, то справедливость леммы следует из теоремы о существовании и единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения.

Следствие. *Для любой точки* $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$, *удовлетворяющей неравенствам* $f_n^- > 0$, $f_n^+ > 0$ ($f_n^- < 0$, $f_n^+ < 0$), *существует единственное решение* $x(t), x(\bar{t}) = \bar{x}$, *уравнения* (1), *определенное на некотором интервале, содержащем точку* $t = \bar{t}$.

Для изучения дифференциальных свойств решений уравнений вида (1) достаточно рассматривать случаи, когда функция f имеет одну или две поверхности разрыва, предполагая, что поверхности пересекаются по некоторой кривой.

Чтобы различать уравнение (1) в зависимости от взаимного расположения поверхностей и поведения решений относительно этих поверхностей, будем рассматривать ниже частные случаи в виде уравнений A, B, C, D.

***Уравнение* A.** Пусть $p = 1$ и для любой точки $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$ верны неравенства $f_n^- > 0$, $f_n^+ > 0$. Тогда каждое решение системы (1), проходящее близко от Γ, пересекает эту поверхность, т. е. переходит при увеличении t из области Ω_- в область Ω_+ и имеет с Γ единственную общую точку. Для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ существует единственное решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, которое продолжимо до границы Ω в обоих направлениях.

***Уравнение* B.** Пусть $p = 1$ и для любой точки $(\bar{t}, \bar{x}) \in \Gamma$ верны неравенства $f_n^- > 0$, $f_n^+ < 0$. Тогда если (t_0, x_0) является точкой непрерывности для функции f, то единственное решение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$ либо достигает границы Ω в обоих направлениях, минуя Γ, либо в некоторый момент времени $t = \theta$ решение попадает на поверхность Γ и при $t \geq \theta$ (или $t \leq \theta$) будет двигаться по ней до достижения границы множества Ω. На поверхности Γ решение удовлетворяет уравнению (3), для которого согласно предположению о поверхности Γ выполняются условия существования и единственности решений.

***Уравнение* C.** Пусть $p=2$ и Γ — это одна из поверхностей разрыва функции f. Вторую обозначим Φ. Пусть она задается уравнением $t=\nu(x)$. Будем полагать, что: $\mathfrak{L}=\Phi\cap\Gamma$ есть $(n-1)$-мерная гиперповерхность; для всех точек $(\bar{t},\bar{x})\in\Gamma\cup\Phi$ верны соотношения $f_n^->0$, $f_n^+<0$, причем в точках из $\mathfrak{L}$ значения f^- и f^+ вычисляются, исходя из условия $\mathfrak{L}\subset\Gamma$.

Ниже будем рассматривать гладкость решений, которые начинаются на поверхности Γ и после достижения кривой $\mathfrak{L}$ продолжаются на поверхности Φ. Поэтому в точках множества $\Phi\cup\Gamma$ полагаем, что справедливо соотношение (4) и функции $t=\tau(x)$ и $t=\nu(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. В силу сделанных предположений решения, содержащиеся во множестве $\Phi\cup\Gamma$, удовлетворяют для каждой точки $(t_0,x_0)\in\Gamma$ условию единственности и продолжимы до границы множества Ω в обоих направлениях.

***Уравнение* D.** Пусть $p=1$ и для любой точки $(\bar{t},\bar{x})\in\Gamma$ справедливы соотношения $f_n^-<0$, $f_n^+>0$. В силу гладкости функций f вне поверхности Γ можно заключить, что для любой точки $(t_0,x_0)\in\Omega\backslash\Gamma$ существует единственное решение $x(t)$, $x(t_0)=x_0$, которое достигает границы множества Ω в обоих направлениях изменения t.

Вообще говоря, из сделанных предположений вытекает, что решения, проходящие по поверхности Γ, могут сойти с нее в любой момент времени. Но в дальнейшем будем рассматривать решения, которые сходят в Ω_+ при достижении гладкой кривой $\mathfrak{L}$, заданной уравнением $\varphi(t,x)=0$. Для таких решений имеют место единственность и продолжимость до границы множества Ω.

Рассмотрим теперь вопрос о достаточных условиях для непрерывной зависимости решений системы (1) от начальных данных и правой части.

Пусть помимо системы (1) также дано уравнение

$$\frac{dx}{dt}=f^*(t,x). \tag{5}$$

Предположим, что уравнение (5) на множестве Ω может удовлетворять условиям аналогичным условиям для уравнений A, B, C, D на основе системы (1). Такого типа уравнения, рассматриваемые на основе системы (5), будем обозначать как уравнения A^*, B^*, C^*, D^*. Причем в случае уравнений A^*, B^*, D^* единственную поверхность разрыва будем обозначать Π и положим, что она задается уравнением $t=\theta(x)$. В случае уравнения C^* вторую поверхность обозначим Ψ и предположим, что она задается уравнением $t=\kappa(x)$.

Кроме того, считаем, что поверхность Φ делит множество Ω на области W_- и W_+, поверхность Π разбивает это множество на части V_- и V_+, а поверхность Ψ — на области T_- и T_+. Построим следующие множества:

$$\Omega_1=(\Omega_-\cap V_-)\cup(\Omega_+\cap V_+),\quad \Omega_2=(\Omega_-\cap T_-)\cup(\Omega_+\cap T_+),\ \Omega_3=\Omega_1\cup\Omega_2.$$

Для уравнений A, B, D и соответственно уравнений A^*, B^*, D^* будем писать $d(f,f^*)\le\delta$ при некотором фиксированном положительном числе $\delta\in R$, если одновременно выполняются следующие условия: для всех $(t,x)\in\Omega_1$ справедливо неравенство

$$\|f(t, x) - f^*(t, x)\| \le \delta; \tag{6}$$

для любой точки $x \in \Omega_x$ верны соотношения

$$|\tau(x) - \theta(x)| \le \delta, \quad \left\| \frac{\partial \tau(x)}{\partial x} - \frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right\| \le \delta, \tag{7}$$

причем второе из неравенств (7) выполняется лишь для уравнений B, D.

Для уравнений C и C* будем писать $d(f, f^*) \le \delta$, если справедливы условия: во всех точках из Ω_3 выполняется соотношение (6); для любой точки $x \in \Omega_x$ справедливы неравенства (7) и верны соотношения

$$|\nu(x) - \kappa(x)| \le \delta, \quad \left\| \frac{\partial \nu(x)}{\partial x} - \frac{\partial \kappa(x)}{\partial x} \right\| \le \delta. \tag{8}$$

Сформулируем такие теоремы (ср. с теоремой 2 [3, с. 70]).

Теорема 1. *Пусть* $x(t)$, $x(t_0) = x_0$ — *решение уравнения* A (B *или* C), *определенное на промежутке* $[a, b]$ *из* Ω_t. *Тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует такое действительное число* $\delta > 0$, *что если* $d(f, f^*) \le \delta$, $|t_0 - t_0^*| \le \delta$, $\|x_0 - x_0^*\| \le \delta$, *то решение* $\bar{x}(t)$, $\bar{x}(t_0^*) = x_0^*$ *соответственно уравнения* A*, B* *или* C* *существует на промежутке* $[a, b]$ *и удовлетворяет на нем неравенству* $\|x(t) - \bar{x}(t)\| \le \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть все решения уравнения* D, *удовлетворяющие начальному условию* $x(t_0) = x_0$, *существуют на промежутке* $[a, b]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что если* $d(f, f^*) \le \delta$, $|t_0 - t_0^*| \le \delta$, $\|x_0 - x_0^*\| \le \delta$, *то каждое решение уравнения* D* *с начальным условием* $x(t_0^*) = x_0^*$ *существует на промежутке* $[a, b]$ *и отличается на нем от некоторого решения задачи Коши* $x(t_0) = x_0$ *уравнения* D *не больше, чем на* ε.

Перейдем теперь к основному вопросу статьи — дифференциальной зависимости решений системы (1) от начальных данных.

Пусть $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$, — решение уравнения A (B или C), (t_0, x_0) является в случае уравнения A или B точкой непрерывности функции f, а для уравнения C принадлежит $\Gamma \setminus \mathfrak{L}$.

Предположим, что решение $x(t)$ определено на промежутке $[t_0, T] \subset \Omega_t$ и $t = \theta$ — момент, в который $x(t)$ встречается с поверхностью Γ или кривой $\mathfrak{L}$, если $x(t)$ является решением уравнения C. Пусть также $h_0 = \Delta t$, $(h_1, h_2, \ldots \ldots h_n) = \Delta x$, $h = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ и $\bar{x}(t) = x(t, t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)$ — решение системы (1), $(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) \in \Omega \setminus \Gamma$ для уравнений A и B и $(t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x) \in \Gamma \setminus \mathfrak{L}$ в случае уравнения C. Зафиксируем натуральное число $l \ge 1$.

Будем говорить, что решение $x(t)$ имеет B-производные до l-го порядка включительно по начальным данным t_0 и x_0^j, $j = \overline{1, n}$, если существуют кусочно-непрерывные с разрывами первого рода в точке $t = \theta$ функции $u_{1i}(t)$, $u_{2ij}(t), \ldots, u_{lij\ldots s}(t)$ и постоянные $\nu_{1i}, \nu_{2ij}, \ldots, \nu_{lij\ldots s}$, непрерывно зависящие от t_0 и x_0, симметричные относительно перестановки индексов $i, j, \ldots, s$ такие, что: а) если η — момент встречи решения $\bar{x}$ с поверхностью Γ или Φ, то

$$\eta - \theta = \sum_{i=0}^{n} \nu_{1i} h_i + \sum_{i,j=0}^{n} \nu_{2ij} h_i h_j + \ldots + \sum_{i,j,\ldots,s=0}^{n} \nu_{lij\ldots s} h_i h_j \ldots h_s + o(\|h\|^l); \tag{9}$$

б) для любого $t \in [t_0, T]$ за исключением точек из промежутка $]\eta, \theta]$, если $\eta \leq \theta$, или $]\theta, \eta]$, если $\theta < \eta$, справедливо равенство

$$\bar{x}(t) - x(t) = \sum_{i=0}^{n} u_{1i}(t) h_i + \sum_{i,j=0}^{n} u_{2ij}(t) h_i h_j + \ldots +$$

$$+ \sum_{i,j,\ldots,s=0}^{n} u_{lij\ldots s}(t) h_i h_j \ldots h_s + o(\| h \|^l). \tag{10}$$

В дальнейшем будем полагать, что функция f удовлетворяет перечисленным выше условиям и, кроме того, сделаем следующие дополнительные предположения.

Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное действительное число, которое может быть произвольно малым. Обозначим Ω_ε и W_ε окрестности поверхностей Γ и Φ соответственно. Будем считать, что функция f непрерывно l раз дифференцируема по x в каждой точке непрерывности и все частные производные непрерывны вплоть до границы множеств Ω_k. Кроме того, функция f имеет $(l-1)$-ю непрерывную производную по t в каждой точке непрерывности, принадлежащей Ω_ε или W_ε.

Рассмотрим последовательно задачу существования B-производных высшего порядка для уравнений A – D.

***Уравнение* A.** Осуществим необходимые в дальнейшем построения. Разобьем интервал Ω_t точкой $t = \theta$ на промежутки Ω^- и Ω^+ так, чтобы $t_0 \in \Omega^-$, и будем полагать, что $\theta \in \Omega^-$. Функцию f продолжим вместе со всеми частными производными непрерывным образом из Ω_- на множество $\Omega^- \times \Omega_x$ и из множества Ω_+ на область $\Omega^+ \times \Omega_x$ вплоть до плоскости $t = \theta$. Построенную таким образом функцию обозначим $Q(t, x)$.

Теперь определим систему дифференциальных уравнений, имеющую вид

$$dx/dt = Q(t, x). \tag{11}$$

Зафиксируем некоторую точку (θ, x), $x \in \Omega_x$, плоскости $t = \theta$. Рассмотрим следующие случаи.

α) Пусть $(\theta, x) \in \Omega_-$. Обозначим через $x^0(t)$, $x^0(\theta) = x$, решение уравнения (1) и через $\xi = \xi(x)$ момент встречи этого решения с Γ. Очевидно, что $\theta < \xi$. Пусть также $x^1(t)$, $x^1(\xi) = x^0(\xi)$, — решение уравнения (11), определенное на промежутке $[\theta, \xi]$.

β) Пусть $(\theta, x) \in \Omega_+$. Тогда положим, что $x^0(t)$, $x^0(\theta) = x$, — решение уравнения (11), $\xi = \xi(x)$ — момент встречи этого решения с Γ, $x^1(t)$, $x^1(\xi) = x^0(\xi)$ — решение уравнения (1), существующее на промежутке $[\xi, \theta]$.

γ) Пусть $(\theta, x) \in \Gamma$, т. е. $\theta = \tau(x)$.

Определим отображение плоскости $t = \theta$ в себя следующим образом:

$$J(x) = \begin{cases} \int_\theta^\xi f(u, x^0(u))du + \int_\xi^\theta Q(u, x^1(u))du & \text{в случае } \alpha), \\ \int_\theta^\xi Q(u, x^0(u))du + \int_\xi^\theta f(u, x^1(u))du & \text{в случае } \beta), \\ 0 & \text{в случае } \gamma), \end{cases}$$

и построим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированный момент времени $t = \theta$, имеющую вид

$$dy/dt = Q(t, y), \quad t \neq \theta, \quad \Delta y\big|_{t=\theta} = J(y). \tag{12}$$

Можно проверить, что в достаточно малой окрестности интегральной кривой решения $x(t)$ в Ω системы (1) и (12) удовлетворяют S-свойству. Т. е. решения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ уравнений (1) и (12) соответственно, имеющие одинаковые начальные условия, будут принимать одинаковые значения на общем интервале существования за исключением точек интервала $]\theta, \eta]$, если $\theta \leq \eta$, или промежутка $]\eta, \theta]$, если $\eta < \theta$, где η — момент встречи решения $\bar{x}(t)$ с поверхностью Γ. Заметим, что общий промежуток существования решений $\bar{x}$ и $\bar{y}$ при достаточной близости начальных данных к точке (t_0, x_0) включает в себя отрезок $[t_0, T]$. Пусть Ω_0 — достаточно малая окрестность точки $x(\theta)$ в Ω_x. Используя методику доказательства лемм 1.1 и 1.2 из [1], можно проверить, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 2. $\xi(x) \in C^{(l)}(\Omega_0)$.

Лемма 3. $J(x) \in C^{(l)}(\Omega_0)$.

Лемма 4. *Пусть в уравнении* (12) *функция* Q *непрерывная по* t *и* l *раз непрерывно дифференцируемая по* x *в каждой из областей* $\Omega^- \times \Omega_x$, $\Omega^+ \times \Omega_x$, *отображение* $J(x)$ *непрерывно дифференцируемо* l *раз по* x. *Тогда решение* $y(t, t_0, x_0)$ *этой системы имеет на промежутке* $[t_0, T]$ *B-производные до* l*-го порядка включительно по начальным данным* t_0 *и* x_0^j, $j = \overline{1, n}$.

На основании S-свойства, установленного для систем (1) и (12), из леммы 4 вытекает, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Решение* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, *определенное на промежутке* $[t_0, T]$, *допускает на этом промежутке B-производные по начальным данным* t_0 *и* x_0^j, $j = \overline{1, n}$, *до* l*-го порядка включительно.*

Заметим, что коэффициенты в разложении (10) находятся как решения уравнений, полученных рекуррентным образом из (12) путем последовательного дифференцирования правой части и подстановки уже вычисленных ранее коэффициентов. Например, функции $u_{1i}(t)$ определяются как решения системы

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} u, \quad t \neq \theta, \quad \Delta u\big|_{t=\theta} = (f^- - f^+)\frac{\tau x}{1 - \tau_x f^-}, \tag{13}$$

где f^-, f^+ — предельные значения функции f в точке $(\theta, x(\theta))$; $\tau_x = \partial\tau(x)/\partial x$.

***Уравнение* B.** Пусть $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ — решение, которое в момент $t = \theta$ попадает на поверхность Γ, (θ, x), $x \in \Omega_x$, — точка плоскости $t = \theta$. Рассмотрим два случая.

α) Пусть $(\theta, x) \in \Omega_- \cup \Omega_+$. Тогда обозначим через $x^0(t)$, $x^0(\theta) = x$, — решение уравнения (1), $\xi = \xi(x)$, $\xi > \theta$, — момент встречи этого решения с поверхностью Γ, $x^1(t)$, $x^1(\beta) = x^0(\xi)$, — решение системы (3), в которой F является расширением поверхности Γ на множество $\{t \in]\theta, +\infty[\mid t \in \Omega_t\} \times \Omega_x$. Предполагаем, что решение $x^1(t)$ определено на участке $[\theta, \xi]$.

β) Пусть $(\theta, x) \in \Gamma$, т. е. $\theta = \tau(x)$.

Построим отображение

$$J(x) = \begin{cases} \int_\theta^\xi f(u, x^0(u))\,du + \int_\xi^\theta F(u, x^1(u))\,du & \text{в случае } \alpha), \\ 0 & \text{в случае } \beta) \end{cases} \tag{14}$$

и функцию

$$Q(t, y) = \begin{cases} f(t, y), & \text{если} \quad t < \theta, \\ F(t, y), & \text{если} \quad t > \theta. \end{cases} \tag{15}$$

Система уравнений (12), в которой функции Q и J определены соответственно выражениями (14) и (15), в достаточно малой окрестности интегральной кривой решения $x(t)$ удовлетворяет вместе с уравнением (1) S-свойству.

Рассуждая точно таким образом, как и для уравнения А, можно показать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Решение* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *уравнения* В, *определенное на промежутке* $[t_0, T]$, *допускает на этом промежутке В-производные по начальным данным* t_0 *и* x_0^j, $j = \overline{1, n}$, *до* l*-го порядка включительно.*

Заметим, что утверждение теоремы 4 для решений, не попадающих на поверхность Γ, вытекает из известной теоремы для обыкновенных дифференциальных уравнений. Система уравнений в вариациях для решения, встречающего поверхность Γ, имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial Q(t, x(t))}{\partial x} u, \quad t \neq \theta, \quad \Delta u\Big|_{t=\theta} = (f^- - F(\theta, x(\theta))) \frac{\tau x}{1 - \tau_x f^-} u. \tag{16}$$

Уравнение **С.** Пусть $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, — решение системы (1), начинающееся на поверхности Γ, которое в момент времени $t = \theta$ переходит на множество Φ. Обозначим через F_- и F_+ продолжения функции F соответственно с поверхностей Γ и Φ на множества $\{t \in \Omega_t \mid t < \theta\} \times \Omega_x$ и $\{t \in \Omega_t \mid t > \theta\} \times \Omega_x$ и построим функцию

$$Q(t, y) = \begin{cases} F_-(t, y), & \text{если} \quad t < \theta, \\ F_+(t, y), & \text{если} \quad t > \theta. \end{cases}$$

Обозначим через Π_0 пересечение плоскости $t = \theta$ с множеством $\Gamma \cup \Phi$. Построим отображение $J(x)$ множества Π_0 в себя следующим образом.

Пусть $(\theta, x) \in \Pi_0$. Рассмотрим следующие случаи.

α) Пусть $(\theta, x) \in \Gamma$. Тогда обозначим через $x^0(t)$ решение уравнения (3) с начальным условием $x^0(\theta) = x$. Пусть $\xi = \xi(x)$, $\xi > \theta$, момент встречи решения $x^0(t)$ с кривой $\mathfrak{L}$. Обозначим через $x^1(t)$, $x^1(\xi) = x^0(\xi)$, решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F_+(t, x), \tag{17}$$

предполагая, что это решение существует на промежутке $[\theta, \xi]$;

β) Пусть $(\theta, x) \in \Phi$. Тогда положим, что $x^0(t)$, $x^0(\theta) = x$, — решение уравнения (3), $\xi = \xi(x)$, $\xi < \theta$, — момент встречи этого решения с $\mathfrak{L}$, $x^1(t)$, $x^1(\xi) = x^0(\xi)$, решение системы

$$\frac{dx}{dt} = F_-(t, x), \tag{18}$$

определенное на участке $[\xi, \theta]$;

γ) Пусть $(\theta, x) \in \mathfrak{L}$.

Построим отображение

$$J(x) = \begin{cases} \int_\theta^\xi F(u, x^0(u))\, du + \int_\xi^\theta Q(u, x^1(u))\, du & \text{в случае } \alpha) \text{ и } \beta), \\ 0 & \text{в случае } \gamma). \end{cases}$$

Учитывая условия, определенные для уравнения C, на основе S-свойства, имеющего место для решений уравнения C и системы (12), начинающихся в каждой точке $(t_0, x_0) \in \Gamma$, $t_0 < \theta$, можно доказать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, $\bar{x}(t) = x(t, t_0 + \Delta t, x_0 + \Delta x)$ *— решения уравнения* C, *начинающиеся на множестве* Γ, *которые переходят на поверхность* Φ *при достижении кривой* $\mathfrak{L}$. *Тогда если* $x(t)$ *пересекает* $\mathfrak{L}$ *без касания, то при достаточно малых* $|\Delta t|$ *и* $\|\Delta x\|$ *справедливы равенства вида* (9) *и* (10). *Т. е. во множестве решений уравнения* C, *пересекающих кривую* $\mathfrak{L}$, *решение* $x(t)$ *имеет* B*-производные по начальным данным* t_0 *и* x_0^j, $j = \overline{1, n}$, *до* l*-го порядка включительно.*

***Уравнение* D.** Так как решение, начинающееся в множестве $\Gamma \backslash \mathfrak{L}$, не удовлетворяет, вообще говоря, условию единственности по причине произвольного схода с поверхности Γ, то говорить о дифференцируемости по начальным данным в строгом смысле нельзя. Но, видимо, полезным для прикладных задач является следующий подход к исследованию окрестностей решений, проходящих по Γ. Сформулируем конечный результат в виде следующей теоремы.

Теорема 6. *Пусть* $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ *— решение уравнения* D, *которое начинается на множестве* $\Gamma \backslash \mathfrak{L}$ *и переходит в область* Ω_+ *при достижении кривой* $\mathfrak{L}$, *заданной уравнением* $\varphi(t, x) = 0$, *где функция* φ l *раз непрерывно дифференцируема.*

Тогда существуют кусочно-непрерывные с разрывами первого рода в точке $t = \theta$ *функции* $u_{1i}(t)$, $u_{2ij}(t), \ldots, u_{lij \ldots s}(t)$ *и постоянные* $\nu_{1i}(t)$, $\nu_{2ij}(t), \ldots, \nu_{lij \ldots s}(t)$ *такие, что для каждой точки* $(t_0 + \Delta t,\ x_0 + \Delta x)$, *расположенной на поверхности* Γ *в достаточно малой окрестности точки* (t_0, x_0), *найдется решение* $\bar{x}(t) = (t, t_0 + \Delta t,\ x_0 + \Delta x)$, *определенное на промежутке* $[t_0, T]$, *для которого справедливы соотношения* (9), (10).

Система уравнений в вариациях относительно решения имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} \dfrac{\partial F(t, x(t))}{\partial x} u, & t < \theta, \\[2ex] \dfrac{\partial f(t, x(t))}{\partial x} u, & t > \theta, \end{cases}$$

$$\Delta u \big|_{t=\theta} = (f^+ - F(\theta, x(\theta))) \, \frac{\varphi_x}{\varphi_t + \varphi_x F} \, u.$$

Применив предложенную методику исследования, можно рассмотреть также вопросы о дифференцируемой зависимости от параметра решений уравнений с разрывной правой частью, задачу асимптотического представления решений таких систем.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем. – Киев, 1990. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 90.37).
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
3. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

Получено 22. 05. 92