УДК 512.662.5

О. П. Бондарь, асп. (Киев. ун-т)

О ЧИСЛЕ КРИТИЧЕСКИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ

We consider smooth functions on a manifold, the set of critical points of which is a disjoint union of the differentiable submanifolds. A topological invariant is introduced, in terms of which the minimal number of critical submanifolds of such functions can be estimated.

Розглядаються диференційовні функції на многовиді, у котрих множина критичних точок є незв'язним об'єднанням гладких підмноговидів. Введено топологічну характеристику многовиду, в термінах якої наводиться оцінка найменшого можливого числа критичних підмноговидів таких функцій.

Для оценки наименьшего возможного числа изолированных критических точек гладкой функции (или функционала) на многообразии используется топологический инвариант многообразия — категория Люстерника – Шнирельмана многообразия: минимальная мощность покрытия многообразия стягиваемыми по многообразию замкнутыми множествами.

Цель данной статьи — указать топологический инвариант многообразия, характеризующий наименьшее возможное число гладких гомеоморфных критических подмногообразий без края гладкой функции, заданной на многообразии.

Рассматриваются гладкие функции на гладких компактных связных многообразиях, у которых множество критических точек является несвязным объединением гладких подмногообразий без края, возможно, вырожденных, каждое из которых гомеоморфно некоторому многообразию P. Такие функции названы P-функциями.

Введена топологическая характеристика многообразия — P-категория, в терминах которой оценивается наименьшее возможное число критических подмногообразий P-функций, а именно: P-категория многообразия определена как минимальная мощность покрытия многообразия замкнутыми множествами, стягиваемыми по многообразию на P. Категория Люстерника – Шнирельмана является частным случаем P-категории, когда P — точка.

Приведены примеры многообразий, на которых оценка числа особенностей в терминах P-категории является точной.

Автор выржает благодарность В. В. Шарко, которому принадлежит идея рассмотреть данную тему, а также Е. А. Михайлюку за ряд интересных идей и замечаний.

***Определение* 1.** *Пусть A, B и P — замкнутые подмножества топологического хаусдорфова пространства, причем $P \subset B$ и $A \subset B$. P-категорией множества A относительно множества B $P\operatorname{cat}_B A$ назовем минимальное число k замкнутых подмножеств $A_1, \ldots, A_k$ в B, имеющих следующие свойства:*

1) *A является их объединением $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$;*

2) *каждое A_i, $i = 1, \ldots, k$, стягивается по множеству B на P. Это означает, что для каждого A_i существует гомотопия F_i: $A_i \times I \to B$, такая, что:* a) $F_i(x, 0) = x$, $x \in A_i$; b) $F_i(x, t) \in B$, $x \in A_i$, $0 < t < 1$; c) $F_i(x, 1) = P_i \subset \subset B$, *$P_i$ гомеоморфно P.*

Подмножества $A_1, \ldots, A_k$ называем категориальными подмножествами.

Если такого числа k не существует, то полагаем $P\operatorname{cat}_B A = \infty$.

P-категорию множества A относительно себя будем называть P-категорией множества A и обозначать $P\operatorname{cat} A$.

Заметим, что когда P — точка, а B совпадает со всем топологическим пространством, то определение P-категории совпадает с определением категории Люстерника – Шнирельмана.

Свойства P-категории.

***Свойство* 1.** Пусть A, B, P — замкнутые подмножества замкнутого подмножества C топологического хаусдорфова пространства, тогда

$$P\operatorname{cat}_C(A \cup B) \leq P\operatorname{cat}_C A + P\operatorname{cat}_C B.$$

***Свойство* 2.** Пусть A, B, P — замкнутые подмножества замкнутого подмножества C топологического хаусдорфова пространства, причем $A \subset B \subset C$. Тогда $P\operatorname{cat}_B A \geq P\operatorname{cat}_C A$.

***Свойство* 3.** Пусть A, B, P — замкнутые подмножества замкнутого подмножества C топологического хаусдорфова пространства и подмножество A является деформационным ретрактом подмножества B, тогда $P\operatorname{cat}_C B \leq$ $\leq P\operatorname{cat}_C A$.

***Свойство* 4.** Пусть A и P — замкнутые подмножества многообразия M, тогда P-категорию множества A относительно M можно оценить следующим образом:

$$P\operatorname{cat}_M A \geq (\operatorname{long}_M A + 1)/(\operatorname{long}_M P + 1),$$

где $\operatorname{long}_M A$ и $\operatorname{long}_M P$ — длины [1] множеств A и P в многообразии M.

Следствие. *Если в предыдущих обозначениях A совпадает с M и P является компактным многообразием без края, то*

$$P\operatorname{cat} M \geq (\operatorname{long} M + 1)/(\operatorname{long} P + 1).$$

В частности, если P — точка, то известная оценка категории Люстерника – Шнирельмана многообразия $M\operatorname{cat} M \geq \operatorname{long} M + 1$ совпадает с данной оценкой.

Примеры вычисления P-категории.

Утверждение 1. *Круглая категория двумерного компактного связного многообразия равна:*

1) *единице, если многообразие гомеоморфно кольцу $S \times I$ или листу Мебиуса;*

2) *двум — на остальных многообразиях с краем;*

3) *двум, если многообразие гомеоморфно сфере S^2, проективной плоскости RP^2, тору T^2 или бутылке Клейна;*

4) *трем — на остальных многообразиях без края.*

Напомним, что круглой категорией названа P-категория, когда P — окружность S^1. Доказательство этого и следующих утверждений и теорем можно найти в [2].

Утверждение 2. *Круглая категория трехмерного компактного связного многообразия без края:*

1) *равна двум, если многообразие гомеоморфно сфере S^3, многообразию $S^1 \times S^2$, проективной плоскости RP^3 или линзовому пространству;*

2) *равна трем, если многообразие гомеоморфно тору T^3;*

3) *не превышает четырех на остальных многообразиях.*

***Определение* 2.** *Гладкую функцию на многообразии, у которой множество критических точек является несвязным объединением гладких подмногообразий без края (возможно, вырожденных), будем называть P-функцией, если все ее* *критические подмногообразия гомеоморфны некоторому гладкому многообразию P без края.*

В частности, если P — точка, то P-функция — это гладкая функция с изолированными критическими точками, вообще говоря, вырожденными.

Приведем достаточное условие существования P-функций на многообразии.

Утверждение 3. *Пусть M^n — гладкое компактное связное многообразие без края и $M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_k = M^n$ — компактные многообразия размерности n такие, что:*

1) $M_i \subset \mathrm{Int}\,(M_{i+1})$, $i = 0, \ldots, k-1$;

2) $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$ *— многообразия с краем;*

3) *для каждого подмножества* $(M_i \backslash \mathrm{Int}\,(M_{i-1});\ \partial M_{i-1},\ \partial M_i)$, $i = 1, \ldots, k-1$, *существует покрытие* $\{Q_s\}_{s=1}^{3}$ *со свойствами:*

а) $\mathrm{Int}\,(Q_s) \cap \mathrm{Int}\,(Q_j) = \varnothing$, $s \neq j$;

б) *для некоторого s_0 Q_{s_0} почти диффеоморфно* [3] $P \times D^{n-p}$, *где p — размерность многообразия P;*

в) $(Q_r, \partial M_{j_r})$ *почти диффеоморфно* $(\partial M_{j_r} \times [0, 1],\ \partial M_{j_r} \times \{0\})$ *для* $r \neq s_0$, $j_r = i-1,\ i$;

г) $Q_r \cap Q_j$ *есть гладко вложенное подмногообразие в* $M_i \backslash \mathrm{Int}\,(M_{i-1}) \backslash \mathrm{Int}\,(Q_{s_0})$, $s_0 \neq r \neq j \neq s_0$.

Тогда на M^n существует P-функция, причем число ее критических подмногообразий не превышает k.

Определение 3. *P-функцию назовем точной на многообразии, если число ее критических подмногообразий есть минимум критических подмногообразий, взятый по всем P-функциям на многообразии.*

Определение 4. *P-функцию назовем круглой, если все ее критические подмногообразия гомеоморфны сфере S^1.*

В частности, круглые функции Морса, выделенные Терстоном [4] и рассматриваемые в работах Френкса [5], Асимова [6], Миюоси [7], Моргана [8], А. Т. Фоменко, Х. Цишанга, С. В. Матвеева, А. В. Браилова и В. В. Шарко [9 – 13], являются подмножеством круглых функций.

На многообразиях с краем будем рассматривать такие P-функции, которые принимают постоянное максимальное значение на крае и не имеют на крае критических точек.

Теорема 1. *Пусть M — гладкое компактное связное многообразие с краем или без края, f — P-функция на M. Тогда число критических подмногообразий функции f больше либо равно P-категории многообразия M.*

Рассмотрим P-функции на двумерных гладких компактных связных многообразиях.

Если P — точка, то P-функция — это функция с изолированными критическими точками, вообще говоря, вырожденными. Известно, что минимальное число изолированных критических точек на сфере S^2 равно двум, на остальных двумерных многообразиях без края — равно трем. Причем на этих многообразиях построены точные функции с числом критических точек, совпадающим с P-категорией — категорией Люстерника – Шнирельмана многообразия. На двумерных многообразиях с краем точная функция имеет одну критическую точку, если многообразие гомеоморфно диску D^2, и две критические точки — на остальных многообразиях с краем.

Если P — окружность S^1, то P-функция — это круглая функция.

Теорема 2. *На сфере S^2, на проективной плоскости RP^2 и на многообразии, гомеоморфном диску D^2, не существует круглых функций. На остальных двумерных гладких компактных связных многообразиях существуют круглые функции.*

Теорема 3. *На любом двумерном гладком компактном связном многообразии, не гомеоморфном диску D^2, сфере S^2 и проективной плоскости RP^2, существует точная круглая функция с числом особенностей, равным:*

1) *двум — на торе T^2 и бутылке Клейна;*
2) *трем — на остальных многообразиях без края;*
3) *единице — на $S \times I$ и листе Мебиуса;*
4) *двум — на остальных многообразиях с краем.*

Таким образом, P-категория двумерного компактного связного многообразия является точной нижней границей числа особенностей P-функции на нем.

Теорема 4. *На любом трехмерном гладком компактном связном многообразии без края существует круглая функция. На многообразиях, гомеоморфных сфере S^3, $S^1 \times S^2$, проективной плоскости RP^3 и линзовому пространству, существует точная круглая функция с двумя критическими окружностями. На торе T^3 существует точная круглая функция с тремя критическими окружностями. На остальных многообразиях без края можно построить функцию с числом критических окружностей, не превышающим четырех.*

Теорема 5. *На n-мерной сфере S^n не существует P-функций, если P — сфера S^{n-1}.*

1. *Эльсгольц Л. Э.* Длина многообразия и ее свойства // Мат. сб. – 1939. – **5** (47), № 3. – С. 565 – 570.
2. *Бондарь О. П.* Оценка числа критических подмногообразий функции на многообразии. – Киев, 1993. – 25 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; № 93.29).
3. *Takens F.* The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik – Schnirelman category // Inventiones math. – 1968. – **6**. – P. 197 – 144.
4. *Thurston W.* Existence of codimension – one foliations // Ann. Math. – 1976. – **104**, № 2. – P. 249 – 268.
5. *Franks J.* The periodic behavior of non-singular Morse – Smale flows // Comment. math. helv. – 1978. – **53**, № 2. – P. 279 – 294.
6. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse – Smale flows // Ann. Math. – 1975. – **102**, № 1. – P. 41 – 54.
7. *Miyosihi S.* Foliated round surgery of codimension-one foliated manifolds // Topology. – 1983. – **21**, № 3. – P. 245 – 262.
8. *Morgan J. W.* Non-singular Morse – Smale flows on 3-dimensional manifolds // Ibid. – 1979. – **18**, № 1. – P. 41 – 53.
9. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т., Шарко В. В.* Круглые функции Морса и изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. – 1988. – **135**, № 3. – С. 325 – 345.
10. *Фоменко А. Т., Браилов А. В.* Топология интегральных многообразий вполне интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. – 1987. – **133**, № 3. – С. 375 – 385.
11. *Фоменко А. Т., Цишанг X.* О топологии трехмерных многообразий, возникающих в гамильтоновой механике // Докл. АН СССР. – 1987. – **294**, № 2. – С. 283 – 287.
12. *Фоменко А. Т., Шарко В. В.* Точные круглые функции Морса, неравенства типа Морса и интегралы гамильтоновых систем // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 6. – С. 352 – 361.
13. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.

Получено 23. 06. 93