УДК 519.21и

И. И. Ежов, д-р физ.-мат. наук,
В. Ф. Каданков, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЛЯ ПОЛУНЕПРЕРЫВНОЙ РАЗНОСТИ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

For a difference of two recovery processes with discrete time, which is semi-continuous in discrete topology, the distribution of the principal boundary functionals is found.

Для напівперервної в дискретній топології різниці двох процесів відновлення з дискретним часом знайдено розподіл основних граничних функціоналів.

Зафиксируем вероятностное пространство (Ω, F, P) и введем на нем независимые случайные блуждания

$$\{\xi_n; n \ge 0\}, \quad \{\eta_n; n \ge 0\}, \quad \{\kappa_n; n \ge 0\} \tag{1}$$

с такими свойствами: $P[\xi_0 = \eta_0 = \kappa_0 = 0,\ (\xi, \eta, \kappa) \in N^3] = 1$, где $N = \{1, 2, \dots\}$, $(\xi, \kappa, \eta) \equiv (\xi_1, \kappa_1, \eta_1)$. Для каждого целого $n \ge 0$ положим

$$\xi(n) = \max\{k \ge 0:\ \xi_k \le n\}, \quad \eta(n) = \max\{k \ge 0:\ \eta_k \le n\}, \quad \Delta_n = \eta(n) - \kappa_{\xi(n)}.$$

Случайный процесс Δ_n, $n \ge 0$, начинается из состояния 0, принимает значения из множества $\{0, \pm 1, \dots\}$ и является полунепрерывной сверху разностью процессов восстановления с дискретным временем. Рассмотрим распределения следующих случайных величин:

$$\tau_k^+ = \inf\{n \ge 0:\ \Delta_n = k\}, \quad k \ge 0; \qquad \tau_k^- = \inf\{n \ge 0:\ \Delta_n = -k\}, \quad k \ge 0;$$

$$\mu_n^+ = \max\{\Delta_0, \dots, \Delta_n\}, \ \mu^+ = \sup_{n \ge 0} \Delta_n; \quad \mu_n^- = \min\{\Delta_0, \dots, \Delta_n\}, \ \mu^- = \inf_{n \ge 0} \Delta_n;$$

$$\alpha_k^+ = \eta(\tau_k^+), \qquad \alpha_k^- = \xi(\tau_k^-), \quad k \ge 0;$$

где по определению $\alpha_k^\pm(\infty) = \infty$.

Для изложения полученных нами результатов введем на исходном вероятностном пространстве независимые от (1) и друг от друга следующие случайные элементы:

1) $\{\nu(t):\ 0 \le t < 1\}$ — целочисленный случайный процесс такой, что для всех $n \ge 0$ $P[\nu(t) = n] = (1 - t)t^n$;

2) $\hat{\xi}$, $\hat{\eta}$ — независимые целочисленные случайные величины с распределением $P[\hat{\xi} = n,\ \hat{\eta} = m] = (M[\xi\eta])^{-1} P[\hat{\xi} > n,\ \hat{\eta} > m]$, $n, m \ge 0$;

3) $\{\sigma_k, T_k\}$, $k \ge 0$, — момент и величина первого перескока случайной последовательностью $\{\kappa_n; n \ge 0\}$ через уровень $k \ge 0$: $\sigma_k = \min\{n \ge 0:\ \kappa_n \ge k\}$, $T_k = \kappa_{\sigma_k} - k$;

4) $\{\zeta(z, t);\ 0 \le t < 1\}$ — параметрическое семейство по $z \in [0, 1]$ целочисленных неотрицательных случайных величин таких, что для всех $t \in [0, 1)$ и u, $|u| < 1$,

$$M\left[u^{\zeta(z,t)}\right] = \exp\left\{ \sum_{n>0} \frac{z^n}{n} M\left[\left(u^{\zeta_{\kappa_n} - \xi_n} - 1\right) t^{\xi_n};\ \eta_{\kappa_n} > \xi_n\right]\right\};$$

5) $\{\zeta^*(z, t);\ 0 \le t < 1\}$ — параметрическое семейство по $z \in [0, 1]$ цело-

численных неотрицательных случайных величин таких, что для всех $t \in [0, 1)$ и u с $|u| < 1$

$$M\left[u^{\zeta^*(z,t)} \right] = \exp\left\{ \sum_{n>0} \frac{1}{n} M\left[\left(u^{\xi_n - \eta_{\kappa_n}} - 1 \right) z^{\kappa_k} t^{\eta_{\kappa}}; \xi_n > \eta_{\kappa_n} \right] \right\};$$

6) $\{\zeta(t), \zeta^*(t);\ 0 \le t < 1\}$ — целочисленные неотрицательные случайные величины такие, что

$$\zeta(t) = \lim_{z \to 1} \zeta(z, t), \quad \zeta^*(t) = \lim_{z \to 1} \zeta^*(z, t);$$

7) ζ, ζ^* — такие целочисленные неотрицательные случайные величины, что

$$\zeta = \lim_{t \to 1} \zeta(t), \quad \zeta^* = \lim_{t \to 1} \zeta^*(t).$$

Ясно также, что $\zeta = \sup_{n \ge 0} \{\eta_{\kappa_n} - \xi_n\}$, $\zeta^* = \sup_{n \ge 0} \{\xi_n - \eta_{\kappa_n}\}$.

Справедливы следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 1. *Пусть целое* $k \ge 0$ *произвольно фиксировано. Тогда справедливы соотношения*

$$M\left[t^{\tau_{k+1}^+} z^{\alpha_{k+1}^+};\ \tau_{k+1}^+ < \infty \right] = z^k M[t^{\eta_k}; \zeta^*(z, t) > \eta_k],$$

$$M\left[t^{\tau_{k+1}^-} z^{\alpha_{k+1}^-};\ \tau_{k+1}^- < \infty \right] = M\left[t^{\xi_{\sigma_k}} z^{\sigma_k}; \zeta(z, t) + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k} \right].$$

***Следствие* 1.** *Пусть* $k \ge 0$ *целое и*

$$\tilde{\zeta}(z) = \lim_{t \to 1} \zeta(z, t), \quad \tilde{\zeta}^*(z) = \lim_{t \to 1} \zeta^*(z, t).$$

Тогда справедливы соотношения

$$M\left[t^{\tau_{k+1}^-};\ \tau_{k+1}^- < \infty \right] = M\left[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta(t) + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k} \right],$$

$$M\left[t^{\tau_{k+1}^+};\ \tau_{k+1}^+ < \infty \right] = M[t^{\eta_k}; \zeta^*(t) > \eta_k],$$

$$M\left[z^{\alpha_{k+1}^-};\ \tau_{k+1}^- < \infty \right] = M\left[z^{\sigma_k}; \tilde{\zeta}(z) + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k} \right],$$

$$M\left[z^{\alpha_{k+1}^+};\ \tau_{k+1}^+ < \infty \right] = z^k P\left[\tilde{\zeta}^*(z) > \eta_k \right].$$

***Следствие* 2.** *Пусть* $k \ge 0$ *целое и*

$$\tau = \inf\{n > 0:\ \eta_{\kappa_n} \le \xi_n\}, \quad \tau^* = \inf\{n > 0:\ \xi_n \le \eta_{\kappa_n}\}.$$

Тогда при $M[\xi] < M[\eta\,\kappa]$ τ_{k+1}^- *— собственная случайная величина и, в частности,*

$$P[\tau_1^- = n] = P[\xi_\tau = n], \quad M[\tau_1^-] = M[\xi\,\tau] < \infty,$$

а τ_{k+1}^+ *— несобственная случайная величина и* $P[\tau_{k+1}^+ < \infty] = P[\zeta^* > \eta_k] < 1$.

Если $M[\xi] > M[\eta\,\kappa]$, *то* τ_{k+1}^+ *— собственная случайная величина и, в частности,*

$$P[\tau_1^+ = n] = P\left[\eta_{\kappa_{\tau^*}} = n \right], \quad M[\tau_1^+] = M[\eta\,\kappa\,\tau^*] < \infty;$$

а τ_{k+1}^- *— несобственная случайная величина и* $P[\tau_{k+1}^- < \infty] = P[\zeta + \eta_{T_k} = \xi_{\sigma_k}] < 1$.

Теорема 2. *Пусть $k \geq 0$ целое и $t \in [0, 1)$. Тогда справедливы соотношения*

$$P[\mu^-_{\nu(t)} = -k] = M[\eta] M\left[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta(t) + \hat{\eta} + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k} \right];$$

$$P[\mu^+_{\nu(t)} = 0] = P[\zeta^*(t) = 0],$$

$$P[\mu^+_{\nu(t)} = k] = M\left[t^{\eta_{k-1}}; \zeta^*(t) > \eta_{k-1} \right] - M\left[t^{\eta_k}; \zeta^*(t) > \eta_k \right], \quad k > 0.$$

Если $M[\xi] > M[\eta\kappa]$, *то* $P[\mu^+ = \infty] = 1$, *а*

$$P[\mu^- = -k] = M[\eta] P\left[\zeta + \hat{\eta} + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k} \right].$$

Если $M[\xi] < M[\eta\kappa]$, *то* $P[\mu^- = -\infty] = 1$, *а*

$$P[\mu^+ = 0] = P[\zeta^* = 0], \quad P[\mu^+ = k] = P[\eta_{k-1} < \zeta^* < \eta_k], \quad k > 0.$$

Если $\kappa \equiv 1$, то $\Delta_n = \eta(n) - \xi(n)$, $n \geq 0$, и процесс Δ_n, $n \geq 0$, имеет только единичные скачки обоих знаков. Ясно также, что $\sigma_k = k$, $T_k = 0$; $k \geq 0$.

***Следствие* 3.** *Пусть $P[\kappa = 1] = 1$ и $k \geq 0$ целое. Тогда справедливы соотношения*

$$M\left[t^{\tau^-_{k+1}} z^{\alpha^-_{k+1}}; \tau^-_{k+1} < \infty \right] = z^k M\left[t^{\xi_k}; \zeta(z, t) > \xi_k \right],$$

$$M\left[t^{\tau^+_{k+1}} z^{\alpha^+_{k+1}}; \tau^+_{k+1} < \infty \right] = z^k M\left[t^{\eta_k}; \zeta^*(z, t) > \eta_k \right].$$

При $M[\xi] < M[\eta]$

$$P[\tau^-_{k+1} < \infty] = 1, \quad P[\tau^+_{k+1} < \infty] = P[\zeta^* > \eta_k] < 1,$$

а в случае $M[\eta] < M[\xi]$

$$P[\tau^+_{k+1} < \infty] = 1, \quad P[\tau^-_{k+1} < \infty] = P[\zeta > \xi_k] < 1.$$

***Следствие* 4.** *Пусть $P[\kappa = 1] = 1$ и $k \geq 0$ целое, $t \in [0, 1)$. Тогда справедливы соотношения*

$$P[\mu^-_{\nu(t)} = -k] = M[\eta] M\left[t^{\xi_k}; \zeta(t) + \hat{\eta} > \xi_k \right];$$

$$P[\mu^+_{\nu(t)} = k] = M[\xi] M\left[t^{\eta_k}; \zeta^*(t) + \hat{\xi} = \eta_k \right].$$

При $M[\xi] < M[\eta]$

$$P[\mu^* = k] = M[\xi] P\left[\zeta^* + \hat{\xi} = \eta_k \right], \quad P[\mu^- = -\infty] = 1;$$

а если $M[\xi] < M[\eta]$, *то*

$$P[\mu^- = -k] = M[\eta] P[\boldsymbol{\zeta} + \hat{\boldsymbol{\eta}} = \xi_k], \quad P[\mu^+ = \infty] = 1.$$

Замечание. Полунепрерывная разность процессов восстановления возникает при исследовании систем обслуживания типа $G/G/1$. Так, интервал $[0, \tau^+_1]$ и случайная величина α^+_1 являются периодом занятости и числом требований обслуженных за этот период занятости у системы обслуживания с групповым поступлением требований, а интервал $[0, \tau^-_1]$ и случайная величина α^-_1 суть период занятости и число групп требований обслуженных за период занятости у системы с групповым обслуживанием требований.

Получено 09. 02. 93