УДК 517.515

Ю. М. Березанский (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЙ АНАЛИЗ, СВЯЗАННЫЙ С ОПЕРАТОРАМИ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА

We give an extensive generalization of the white-noise analysis (in the Gaussian and non-Gaussian case) in which the role of translation operators is played by a fixed family of generalized translation operators.

Дано широке узагальнення білого шуму (в гаусівському та негаусівському випадках), у якому роль операторів зсуву відіграє фіксована сім'я операторів узагальненого зсуву.

Введение. Анализ белого шума, появившийся начиная с работы Т. Хиды 1975 г., представляет собой детальную теорию обобщенных функций бесконечномерной переменной x со специальными пространствами основных функций и спариванием посредством интегрирования по гауссовой мере $d\gamma(x)$ [1, 2]. С другой стороны, примерно в это же время начала разрабатываться и общая теория обобщенных функций бесконечного числа переменных, менее детализированная, но в которой спаривание велось уже с помощью более общей, чем гауссова, меры (но являющейся все же, как правило, продакт-мерой) [3, 4].

В связи с этим появилась задача построения детализированной теории обобщенных функций, типа анализа белого шума, но со спариванием посредством достаточно общей меры. Стимулирующим моментом здесь также были работы [5, 6], в которых детализированная теория строилась для случая пуассоновой меры. Реализация решения подобных задач, проистекала, в основном, в двух направлениях: посредством использования ортогональных разложений пространства, задающего спаривание, и порожденных семейством коммутирующих самосопряженных операторов [7–9], и посредством использования биортогональных разложений и полиномов Аппеля [10–12], инспирированного работой [13].

Мы здесь привели лишь некоторые из огромного числа работ, посвященных анализу белого шума, его обобщениям и приложениям. Более подробные ссылки содержатся, в частности, в монографиях [1–4].

Недавно в работах [14–17] было замечено, что, во всяком случае, в одномерном модельном варианте анализа белого шума, когда $x \in \mathbb{R}^1$, основанного на биортогональных разложениях, обычный сдвиг $(T_x f)(y) = f(y+x)$ может быть заменен обобщенным сдвигом T_x, порожденным гипергруппой (теория гипергрупп изложена в [18, 4, 19], обобщенные сдвиги — в [20]). При этом оказалось, что основные аналитические факты теории белого шума сохраняются и возникают новые серии пространств основных и обобщенных функций с детализированными свойствами.

В этой статье показано, что такое обобщение возможно и в бесконечномерном случае, когда x меняется по некоторому метрическому (не обязательно локально компактному) пространству Q и операторы обобщенного сдвига T_x действуют на функциях на этом пространстве. Основными фунциями сейчас, разумеется, будут функции переменной $x \in Q$. Полученные факты содержат основные результаты анализа белого шума и его обобщений уже в требуемом бесконечномерном варианте.

Отметим, что сами наши построения достаточно просты. Детальная общая теория гипергрупп с базисом Q (которая в нелокально компактном случае не построена) сейчас не нужна, от операторов T_x требуется выполнение весьма простых свойств. Изложение основывается на естественном понятии биортогональности в гильбертовом оснащении (по поводу гильбертовых оснащений см. [3, 4]).

Результаты анонсированы в [21], для чтения работы желательно знакомство с [16, 17]. В статье не приводятся примеры семейств операторов T_x в бесконечномерном случае. Такие примеры и приложения будут даны в другой работе.

1. Биортогональные системы. Построение биортогональных систем производится на основании следующей простой конструкции.

Пусть в комплексном гильбертовом пространстве H_0 задана последовательность $\left(H^n\right)_{n=0}^{\infty}$ линейных множеств H^n, линейная оболочка которых плотна в H_0, являющихся гильбертовыми пространствами относительно своего скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_{H_n}$ и линейно независимых (т. е. если $\varphi^0+\ldots+\varphi^m=0$, где $\varphi^n\in H^n$, то $\varphi^n=0$; $n=0,\ldots,m$; $m\in\mathbb{Z}_+=\{0,1,\ldots\}$); вложения $O^n\colon H^n\hookrightarrow H_0$, $n\in\mathbb{Z}_+$, предполагаются непрерывными. Пусть $h=(h_n)_{n=0}^{\infty}$, $h_n>0$, — заданная последовательность весов. Образуем взвешенную ортогональную сумму пространств H^n:

$$H_+=\bigoplus_{n=0,h}^{\infty}H^n=\left\{\varphi=(\varphi^n)_{n=0}^{\infty},\ \varphi^n\in H^n\,\middle|\,\|\varphi\|_{H_+}^2=\sum_{n=0}^{\infty}\|\varphi\|_{H^n}^2h_n<\infty\right\}\qquad(1)$$

с соответствующим $\|\varphi\|_{H_+}^2$ скалярным произведением.

Утверждается, что *если h_n подобраны таким образом, что*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|O^n\|^2}{h_n}<\infty,\qquad(2)$$

то соответствие $H_+\ni\varphi=(\varphi^n)_{n=0}^{\infty}\mapsto\varphi^0+\varphi^1+\ldots\in H_0\oplus Z$ является непрерывным плотным вложением $H_+\hookrightarrow H_0\oplus Z$, где Z — „паразитное" подпространство H_+ (снабженное его скалярным произведением), состоящее из всех пределов в H_+ фундаментальных последовательностей $(\varphi_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ в H_+ (последовательность „координат" $(\varphi_\nu^n)_{n=0}^{\infty}=\varphi_\nu$ финитна), для которых $\varphi_\nu^0+\varphi_\nu^1+\ldots$ сходятся к 0 в H_0.

В самом деле, обозначим через F линейное множество из H_+, состоящее из векторов φ с финитными последовательностями координат φ^n. Для $\varphi\in F$ имеем

$$\left\|\varphi^0+\varphi^1+\ldots\right\|_{H_0}^2\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\varphi^n\right\|_{H_0}\right)^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|O^n\varphi^h\right\|_{H_0}\right)^2\le$$

$$\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|O^n\right\|\left\|\varphi^h\right\|_{H_n}\right)^2\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left\|O^n\right\|^2}{h_n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\varphi^n\right\|_{H_n}^2h_n\right)=C\|\varphi\|_{H_+}^2.$$

Таким образом, отождествляя для $\varphi\in F$ $\varphi^0+\varphi^1+\ldots$ и $\varphi=(\varphi^n)_{n=0}^{\infty}$, мы имеем на F две нормы $\|\cdot\|_{H_0}$ и $\|\cdot\|_{H_+}$, причем $\|\varphi\|_{H_0}\le C^{1/2}\|\varphi\|_{H_+}$. Наше утверждение непосредственно следует из результатов о пополнении пространства по двум нормам [4], гл. 1, § 3, п. 1.

Отметим, что в рассматриваемых ниже приложениях этой конструкции будет доказано, что $Z=0$. *Будем считать, что* $Z=0$ и произведем дальнейшие построения. Итак, $H_+\hookrightarrow H_0$ непрерывно и плотно, образуем оснащение гильбертова пространства H_0 позитивным и негативным гильбертовыми пространствами H_+ и H_- (цепочку):

$$H_- \supseteq H_0 \supseteq H_+. \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{I}: H_- \to H_+$ — каноническая изометрия, переводящая H_- в H_+. Она переводит ортогональную сумму (1) в аналогичную взвешенную ортогональную сумму подпространств $\mathbf{I}^{-1}H^n = H^{-n}$ пространств H_-:

$$H_- = \bigoplus_{n=0,h}^{\infty} H^{-n} = \left\{ \xi = (\xi^n)_{n=0}^{\infty},\ \xi^n \in H^{-n} \;\middle|\; \|\xi\|_{H_-}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\xi^n\right\|_{H^{-n}}^2 h_n < \infty \right\}. \tag{4}$$

Спаривание между H_- и H_+ задается посредством H_0: $\forall\, \xi \in H_-$, $\forall\, \varphi \in H_+$ $\exists\, (\xi, \varphi)_{H_0}$. Его удобно обозначить символом $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$: $\langle\langle \xi, \varphi\rangle\rangle = (\xi, \varphi)_{H_0}$. Координатно запись спаривания имеет вид

$$\langle\langle \xi, \varphi\rangle\rangle = (\xi, \varphi)_{H_0} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n, \sum_{m=0}^{\infty} \varphi^m \right)_{H_0} = \sum_{n,m=0}^{\infty} (\mathbf{I}\xi^n, \varphi^m)_{H_+} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{I}\xi^n, \varphi^n)_{H_+} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi^n, \varphi^n)_{H_0}.$$

Здесь мы, разумеется, интерпретировали $\xi^n \in H^{-n}$ как вектор из H_-, у которого все координаты, отличные от n-й, равны нулю, а n-я равна ξ^n; аналогичная интерпретация применялась и для $\varphi^m \in H^m$. Итак,

$$\forall\, \xi \in H_-,\ \forall\, \varphi \in H_+ : (\xi, \varphi)_{H_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi^n, \varphi^n)_{H_0}. \tag{5}$$

Системы векторов $\varphi^n \in H^n \subset H_+$, $\xi^m \in H^{-m} \subset H_-$; $n, m \in \mathbb{Z}_+$, будем называть биортогональными. В силу (5)

$$\langle\langle \xi^m, \varphi^n\rangle\rangle = (\xi^m, \varphi^n)_{H_0} = \delta_{n,m}(\xi^n, \varphi^n)_{H_0} = \delta_{n,m}(\mathbf{I}\xi^n, \varphi^n)_{H_+} =$$

$$= \delta_{n,m}(\mathbf{I}\xi^n, \varphi^n)_{H^n} h_n, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{6}$$

В случае одномерных пространств описанная схема превращается в предложенную в [14 – 17]. В самом деле, пусть $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ — тотальная последовательность линейно независимых векторов из H_0. Положим

$$H^n = \{ \varphi^n = \varphi_n p_n \mid \varphi_n \in \mathbb{C}^1 \}, \quad \left\|\varphi^n\right\|_{H_n} = |\varphi_n|, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда $\left\|\varphi^n\right\|_{H_0} = |\varphi_n| \, \|p_n\|_{H_0} = \|p_n\|_{H_0} \left\|\varphi^n\right\|_{H_n}$ и $\|O^n\| = \|p_n\|_{H_0}$. Условие (2) превращается в соответствующее условие в этих работах. Спаривание (5) принимает вид

$$(\xi, \varphi)_{H_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi^n, \varphi^n)_{H_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n \mathbf{I}^{-1} p_n, \varphi_n p_n)_{H_0} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \overline{\varphi}_n (\mathbf{I}^{-1} p_n, p_n)_{H_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \overline{\varphi}_n h_n.$$

В дальнейшем нам понадобятся не гильбертовы оснащения (3), а оснащения гильбертова пространства H_0 посредством проективных и индуктивных пределов гильбертовых пространств. С этой целью предположим, что пространства H^n и веса h_n зависят от двух дискретных параметров $p, q \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$: $H^n = H^n(p)$, $h_n = h_n(q)$; $h(q) = (h_n(q))_{n=0}^{\infty}$. Пространство (1) приобретает вид

$$H_+ = H(p,q) = \bigoplus_{n=0;\, h(q)}^{\infty} H^n(p) =$$

$$\left\{ \varphi = (\varphi^n)_{n=0}^{\infty},\ \varphi^n \in H^n(p) \,\middle|\, \|\varphi^n\|_{H(p,q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_{H^n(p)}^2 h_n(q) < \infty \right\}. \tag{7}$$

Легко написать условия на нормы операторов вложения $O^n(p', p)$: $H^n(p') \subsetneq H^n(p)$, $p' > p$, и числа $h_n(q)$, обеспечивающие согласованность пространств (7) и возможность образовать их проективный предел (мы это сделаем чуть ниже в более специальной ситуации тензорных произведений). Обозначим через $H(-p,-q)$ негативное пространство относительно нулевого H_0 и позитивного $H(p,q)$, тогда вместо (3) получаем цепочку

$$\Phi' = \bigcup_{p,q\in\mathbb{N}} H(-p,-q) = \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}} H(-p,-q) \supseteq \ldots \supseteq H(-p,-q) \supseteq \ldots \supseteq H_0 \supseteq$$

$$\supseteq H(p,q) \supseteq \ldots \supseteq \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}} H(p,q) = \bigcap_{p,q\in\mathbb{N}} H(p,q) = \Phi. \tag{8}$$

Спаривание относительно H_0, как и ранее, будем обозначать $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$.

Оператор $\mathbf{I}$, фигурирующий выше при построении пространств H^{-n}, будет построен по цепочке

$$H(-p,-q) \supseteq H_0 \supseteq H(p,q); \qquad \mathbf{I} = \mathbf{I}(p,q). \tag{9}$$

Таким образом, пространства H^{-n} приобретают два индекса: $H^{-n}(p,q) = \mathbf{I}^{-1}(p,q) H^n(p)$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $p, q \in \mathbb{N}$. Однако их зависимость от q будет весьма простой.

2. Тензорные произведения. Рассмотрим фиксированную цепочку

$$N' = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} N_{-p} = \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_{-p} \supseteq \ldots \supseteq N_{-p} \supseteq \ldots \supseteq N_0 \supseteq \ldots \supseteq N_p \supseteq$$

$$\supseteq \ldots \supseteq \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_p = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} N_p = N, \tag{10}$$

составленную из вещественных гильбертовых пространств N_p, N_{-p} негативное относительно N_0 и N_p. Цепочка предполагается ядерной, т. е. ядерным предполагается проективный предел N. Беря симметрические тензорные степени $\hat{\otimes}$ пространств цепочки (10), построим при каждом $n \in \mathbb{N}$ цепочку

$$\left(N^{\hat{\otimes} n}\right)' = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} N_{-p}^{\hat{\otimes} n} = \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_{-p}^{\hat{\otimes} n} \supseteq \ldots \supseteq N_{-p}^{\hat{\otimes} n} \supseteq \ldots \supseteq N_0^{\hat{\otimes} n} \supseteq \ldots$$

$$\ldots \supseteq N_p^{\hat{\otimes} n} \supseteq \ldots \supseteq \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_p^{\hat{\otimes} n} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} N^{\hat{\otimes} n}. \tag{11}$$

Спаривание в цепочках (10), (11) будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (опуская индекс n для (11)). Комплексифицируя пространства цепочек (10), (11), т. е. переходя от N_p к $N_{p,\mathbb{C}}$, мы получаем аналогичные ядерные цепочки, составленные уже из комплексных гильбертовых пространств. Спаривание при этом остается прежним „вещественным", т. е. оно линейно по обоим множителям.

Произведем теперь следующую замену обозначений: прежние вещественные пространства N_p будем обозначать через R_p, а их комплексификации $N_{p,\mathbb{C}}$ — через N_p. Таким образом, в дальнейшем (10), (11) — ядерные цепочки комплексных гильбертовых пространств с вещественным спариванием $\langle\cdot,\cdot\rangle$; N ядерно. Позитивные векторы цепочек (10), (11) будем обозначать через λ, a, a^n, ..., негативные — α, α^n, ... ; $\overline{a}$, $\overline{\alpha}$ — комплексно сопряженные векторы к a, α; $(\alpha^n, a^n)_{N_0^{\hat{\otimes} n}} = \left\langle \alpha^n, \overline{a^n} \right\rangle$. Всегда предполагается, что $\|\cdot\|_{N_0} \le \|\cdot\|_{N_1} \le \ldots$, поэтому $\|\cdot\|_{N_{-1}} \le \|\cdot\|_{N_0}$.

В дальнейшем *построения п. 1 биортогональных систем будут использоваться лишь в случае, когда* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ *пространство* $H^n(p) = N_p^{\hat{\otimes} n}$, *а* $H^0(p) = \mathbb{C}^1 = N_p^{\hat{\otimes} 0}$; $p \in \mathbb{N}$ (точнее, $H^n(p)$ будет изометричным $N_p^{\hat{\otimes} n}$).

Таким образом, сейчас $H(p, q)$ — взвешенное фоковское (бозонное) пространство, построенное по вещественному гильбертовому пространству R_p (и его комплексификации N_p) и весу $h(q) = (h_n(q))_{n=0}^{\infty}$; $p, q \in \mathbb{N}$. Условия согласованности таких пространств и, более того, квазиядерности их вложений хорошо известны, см. [4], гл. 2, § 5. Так, для квазиядерности вложения $H(p', q') \hookrightarrow H(p, q)$; $p, q \in N$, достаточно выполнения следующего условия [22]: пусть $p' > p$ таково, что вложение $O_{p',p}: N_{p'} \hookrightarrow N_p$ квазиядерно, тогда требуется, чтобы

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| O_{p',p} \right\|_{HS}^{2n} \frac{h_n(q)}{h_n(q')} < \infty. \tag{12}$$

Веса $h(q)$ мы сейчас также будем выбирать специальным образом. Предположим, что *исходные пространства* $H^n(1) = N_1^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, *таковы, что для норм операторов вложения* $O^n: H^n(1) \hookrightarrow H_0$ справедлива оценка

$$\exists\, C > 0: \|O^n\| \le C^n n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{13}$$

В качестве (10) берем произвольную ядерную цепочку с вещественным спариванием (содержащую N_1, разумеется) и полагаем

$$h_n(q) = (n!)^2 K^{qn}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{14}$$

где $K > 1$ *достаточно большое и фиксированное*. Утверждается, что *условие* (2) *сейчас выполнено, пространства* $H(p, q)$ *согласованы и существует ядерное оснащение* (8).

В самом деле, в рассматриваемой ситуации $h_n = h_n(1) = (n!)^2 K^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и поэтому в силу (13) условие (2) выполнено:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|O^n\|^2}{h_n(1)} \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n}(n!)^2}{(n!)^2 K^n} < \infty,$$

если $K > \max\{1, C^2\}$.

Для пространств цепочки (8) выполняется квазиядерность вложения. Так, пусть $p, q \in \mathbb{N}$ произвольные фиксированные, выберем $p' > p$ настолько большим, чтобы $\|O_{p', p}\|_{HS} < \infty$. Тогда при $q' > q$ ряд (12) выглядит согласно (14) следующим образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|O_{p', p}\|_{HS}^{2n} \frac{h_n(q)}{h_n(q')} = \sum_{n=0}^{\infty} \|O_{p', p}\|_{HS}^{2n} \frac{(n!)^2 K^{qn}}{(n!)^2 K^{q'n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|O_{p', p}\|_{HS}^2}{K^{q'-q}} \right)^n. \quad (15)$$

Этот ряд сходится, если $q' = q'(p, p', q) > q$ выбрано достаточно большим.

Из квазиядерности этих вложений следует, что пространства $H(p, q)$ согласованы и $\operatorname{pr}\lim_{p, q \in \mathbb{N}} H(p, q)$ является ядерным пространством.

Таким образом, позитивные пространства $H(p, q)$ (7) выглядят следующим образом: при некотором фиксированном $K > 1$

$$H(p, q) = \bigoplus_{n=0, h(q)}^{\infty} N_p^{\hat{\otimes} n} =$$

$$= \left\{ \varphi = (\varphi^n)_{n=0}^{\infty}, \ \varphi^n \in N_p^{\hat{\otimes} n} \,\middle|\, \|\varphi^n\|_{H(p, q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}. \quad (16)$$

Подчеркнем, что в действительности $H^n(p)$ будет изометрично $N_p^{\hat{\otimes} n}$. Негативные пространства $H(-p, -q)$ строятся согласно (4).

Замечания. **1**. Нетрудно понять, что цепочки (8) будут эквивалентными, т. е. с одним и тем же проективным пределом Φ, при различных выборах $K > 1$ в (14). Поэтому, например, можно положить $K = 2$. В этом случае удовлетворять условие (2), возможно, прийдется не с помощью веса $h(1)$, а с помощью $h(q)$, где $q \in \mathbb{N}$ достаточно большое.

2. Цепочки (8) будут эквивалентными и при выборе различных цепочек (10), приводящих к одному и тому же ядерному проективному пределу N. В этом легко убедиться, так как выбор двух эквивалентных цепочек (10) приводит к необходимости оценивать нормы операторов вложения для соответствующих цепочек (8), а это делается благодаря множителю K^{qn} подобно (15).

3. Конечно, наличие $(n!)^2$ в (14) определяется предполагаемой оценкой (13) и необходимостью удовлетворить условие (2). При изменении оценки (13) вес (14) также изменяется; в случае (13) вес (14) наиболее естествен.

3. Операторы обобщенного сдвига. Операторы, которые будут использоваться, отличаются от обычных операторов обобщенного сдвига [18, 4, 19, 20] тем, что они действуют на функциях точки, вообще говоря, не локально компактного пространства, и имеют лишь небольшое количество свойств сдвига.

Итак, пусть Q — сепарабельное метрическое полное пространство точек x, y, ... ; $d(x, y)$ — расстояние в Q. Предположим, что в линейном пространстве $C(Q)$ всех комплекснозначных непрерывных функций задано семейство $\{T_x\}_{x \in Q}$ линейных операторов, имеющее следующие свойства: a) $\forall f \in C(Q)$ $(T_x f)(y) = (T_y f)(x)$ $x, y \in Q$ („коммутативность"); b) существует точка $e \in Q$ („базисная единица") такая, что $T_e = id$; c) для любых двух шаров (открытых) $U, V \subset Q$ существует шар $W \subset Q$ такой, что $\forall f \in C(Q)$ значения $(T_x f)(y)$ при $x \in U$, $y \in V$ не зависят от значений $f(s)$ при $s \in Q \setminus W$ („локальность"); d) пусть $C(Q) \ni f_n \to f \in C(Q)$ в том смысле, что эта сходимость равномерна на каждом шаре; тогда $\forall x, y \in Q$ $(T_x f_n)(y) \to (T_x f)(y)$ („непрерывность").

Очевидно, в случае $Q = \mathbb{R}^1$ обычный сдвиг $(T_x f)(y) = f(y+x)$ имеет свойства a) – d); $e = 0$. То же справедливо, когда Q — банахово пространство.

Мы не будем пытаться строить гармонический анализ, связанный с операторами обобщенного сдвига T_x — для этого нужно на них налагать дополнительные условия, конструировать соответствующую алгебру и т. п. [18, 4, 19]. Но одно понятие такого анализа будет существенно использоваться. Именно: назовем характером неравную тождественно 0 функцию $\chi \in C(Q)$, имеющую свойство

$$(T_x \chi)(y) = \chi(x)\chi(y), \qquad x, y \in Q. \tag{17}$$

Так как $T_e = id$, то из (17) следует, что всегда $\chi(e) = 1$. Будем считать, что функция $\chi(x) = 1$, $x \in Q$, является характером (единичный характер). В действительности, будет рассматриваться ситуация, когда совокупность всех характеров в определенном смысле полна. Вариант этого требования появится в дальнейшем.

Мы будем рассматривать тот случай, когда характеры нумеруются точками λ комплексного гильбертова пространства N, т. е. рассматривать характеры вида $\chi(x) = \chi(x, \lambda)$, $x \in Q$, $\lambda \in N_0$, причем точке $\lambda = 0$ отвечает единичный характер, т. е. $\chi(x, 0) = 1$, $x \in Q$. Более того, эта функция предполагается аналитической относительно λ. Напомним некоторые факты теории таких аналитических функций [13, 23].

Пусть E — локально выпуклое линейное комплексное топологическое пространство точек. Комплекснозначная функция $f(\lambda)$ называется аналитической в нуле, если существует окрестность U нуля $0 \in E$, в которой она определена: $U \ni \lambda \mapsto f(\lambda) \in \mathbb{C}^1$, ограничена (т. е. $\exists\, C > 0 : |f(\lambda)| \le C$, $\lambda \in U$) и имеет следующее свойство: $\forall\, \lambda, \mu \in U$ функция комплексной переменной $z \in \mathbb{C}^1$ $f(\lambda + z\mu) \in \mathbb{C}^1$, определенная при малых $|z|$, аналитична в окрестности $0 \in \mathbb{C}^1$.

Каждая такая функция разлагается в некоторой окрестности $V \subseteq U$ нуля $0 \in E$ в равномерно сходящийся ряд Тейлора

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(D^n f)(\lambda), \qquad \lambda \in V, \tag{18}$$

где $(D^n f)(\lambda)$ — некоторые однородные полиномы r-й степени переменной λ. Последнее означает, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$ существует симметрическая n-линейная непрерывная форма $E \times \ldots \times E \ni \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \mapsto A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^1$ такая, что $(D^n f)(\lambda)$ есть ее диагональное значение: $(D^n f)(\lambda) = A_n(\lambda, \ldots, \lambda)$, $\lambda \in E$. „Коэффициенты" формы $(D^n f)(\lambda)$ — производные $f(\lambda)$ в нуле $0 \in E$. Обратно, функция вида (18) аналитична в $0 \in E$. Полиномы $(D^n f)(\lambda)$ определяются по f однозначно.

Это общее определение будет использовано в дальнейшем. Пока остановимся на случае, когда E является гильбертовым пространством N_0 цепочки (10). Пусть фиксированное во всем дальнейшем $p_0 \in \mathbb{N}$ таково, что вложение $N_{p_0} \hookrightarrow N_0$ квазиядерно, тогда к каждой форме A_n, $n \in \mathbb{N}$, можно применить теорему о ядре [3, 4], согласно которой сужение этой формы на N_{p_0} порождается ее ядром $\alpha^n \in N_{-p_0}^{\hat{\otimes} n}$:

$$A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \langle \alpha^n, \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n \rangle =$$
$$= \langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, \alpha^n \rangle, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in N_{p_0}. \tag{19}$$

Это ядро будем называть n-й производной функции $f(x)$ в нуле и обозначать через $(D^n f)(0) = \alpha^n \in N_{-p_0}^{\hat{\otimes} n}$.

Так как окрестностями нуля в гильбертовом пространстве являются открытые шары с центром в 0, то с учетом (19) разложение для $E = N_0$ (суженное на N_{p_0}) можно переписать в виде

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \alpha^n \rangle; \quad \lambda \in N_{p_0}, \quad \|\lambda\|_{N_{p_0}} < \varepsilon;$$
$$\alpha^n = (D^n f)(0) \in N_{-p_0}^{\hat{\otimes} n}, \tag{20}$$

причем ряд сходится равномерно.

4. Характеры Дельсарта. Итак, мы будем рассматривать семейство характеров (связанных с заданными операторами обобщенного сдвига T_x, $x \in Q$) вида $Q \ni x \mapsto \chi(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$, где λ — параметр, пробегающий некоторый шар $B_0 = \{ \lambda \in N_0 \mid \|\lambda\|_{N_0} < C \}$ комплексного гильбертова пространства N_0 из цепочки (10). *Для каждого* $\lambda \in B$ *функция* $Q \ni x \mapsto \chi(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$ *предполагается непрерывной, а* $\forall x \in Q$ *функция* $B_0 \ni \lambda \mapsto \chi(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$ — *аналитичной в нуле* $0 \in N_0$. *При этом требуется существование общей для всех* $x \in Q$ *окрестности нуля* V, *в которой справедливо разложение вида* (18) (*т. е.* (20)) *для* $\chi(x, \lambda)$.

Таким образом, в соответствие с (20) *предполагается существование* $R > 0$ *такого, что* $\forall x \in Q$ *в смысле равномерной сходимости относительно* λ

$$\chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle, \quad \lambda \in N_{p_0}, \quad \|\lambda\|_{N_{p_0}} \leq R. \tag{21}$$

Здесь $\forall x \in Q$ коэффициенты $\chi_n(x) = \left(D_\lambda^n \chi(x, \cdot) \right)(0) \in N_{-p_0}^{\hat{\otimes} n}$, мы их будем называть характерами Дельсарта. Так как $\forall x \in Q$ $\chi(x, 0) = 1$, то $\chi_0(x) = 1$, $x \in Q$.

Из непрерывности $\forall \lambda \in B_0$ функции $Q \ni x \mapsto \chi(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$ следует $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ напрерывность $Q \ni x \mapsto \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$ при каждом $\lambda \in N_{p_0}$, $\|\lambda\|_{N_{p_0}} \leq R$, а значит, и непрерывность $Q \ni x \mapsto \langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, \chi_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$ при $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in N_{p_0}$; $n \in \mathbb{N}$.

Для последнего нужно воспользоваться „поляризационным тождеством" в $E^{\hat{\otimes} n}$, где E — линейное пространство: $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in E$ произведение $\lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n$ выражается конечной линейной комбинацией с независящими от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ вещественными коэффициентами векторов вида $\mu^{\otimes n}$, где $\mu \in E$ зависит от $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, например,

$$\lambda_1 \hat{\otimes} \lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \otimes \lambda_2 + \lambda_2 \otimes \lambda_1) = \frac{1}{4}\left(\mu_1^{\otimes 2} - \mu_2^{\otimes 2} \right);$$

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \mu_2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Нам понадобится выражение характеров Дельсарта как коэффициентов степенного ряда (21) посредством формулы Коши и соответствующие оценки. Пусть e — орт пространства N_{p_0}, $\|e\|_{N_{p_0}} = 1$. Тогда для $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| < R$, из (21) $\forall x \in Q$ получаем

$$\chi(x, ze) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \langle e^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle; \quad \langle e^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\chi(x, \zeta e)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (22)$$

где контур $\Gamma \subset \{ z \in \mathbb{C}^1 \mid |z| < R \}$ окружает 0.

Беря в качестве Γ окружность $|\zeta| = r \in (0, R)$, получаем из (22) оценку: $\forall e \in N_{p_0}$, $\|e\|_{N_{p_0}} = 1$, $\forall x \in Q$

$$\left| \langle e^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle \right| \le \frac{n!}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{p_0}} = r} |\chi(x, \lambda)|, \quad r \in (0, R), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (23)$$

С помощью поляризованного тождества из (23) следует оценка: $\forall e_1, \ldots, e_n \in N_{p_0}$, $\|e_1\|_{N_{p_0}} = \ldots = \|e_n\|_{N_{p_0}} = 1$, $\forall x \in Q$

$$\left| \langle e_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} e_n, \chi_n(x) \rangle \right| \le \frac{n^n}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{p_0}} = r} |\chi(x, \lambda)|, \quad r \in (0, R), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (24)$$

Поясним, что (24) вытекает из (23) и общей оценки, следующей из поляризованного тождества [23]: пусть E — банахово пространство, $E \times \ldots \times E \ni \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \mapsto A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^1$ — симметрическая n-линейная форма, тогда

$$\sup_{\|e\|_B = 1} |A_n(e, \ldots, e)| \le \sup_{\|e_1\|_B = \ldots = \|e_n\|_B = 1} |A_n(e_1, \ldots, e_n)| \le$$

$$\le \frac{n^n}{n!} \sup_{\|e\|_B = 1} |A_n(e, \ldots, e)|, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Наконец, установим еще одну оценку. *Пусть $p_1 > p_0 \in \mathbb{N}$ таково, что вложение $O_{p_1, p_0} : N_{p_1} \hookrightarrow N_{p_0}$ квазиядерно. Тогда* $\forall x \in Q$

$$\|\chi_n(x)\|_{N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}} \le \frac{n^n \|O_{p_1, p_0}\|_{HS}^n}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{p_0}} = r} |\chi(x, \lambda)|, \quad r \in (0, R), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

В самом деле, пусть $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в пространстве N_{p_1}, тогда $\left(e_{j_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} e_{j_n} \right)_{j_1, \ldots, j_n = 1, \, j_1 \le \ldots \le j_n}^{\infty}$, — ортонормированный базис в пространстве $N_{p_1}^{\hat{\otimes} n}$. Обозначим через $C(x, r, n)$ правую часть неравенства (24). Тогда из (24) следует

$$\left| \langle e_{j_1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} e_{j_n}, \chi_n(x) \rangle \right| \le C(x, r, n) \|e_{j_1}\|_{N_{p_0}} \cdots \|e_{j_n}\|_{N_{p_0}}$$

и поэтому для любого $a^n \in N_{p_1}^{\hat{\otimes} n}$ с координатами $a_{j_1, \ldots, j_n}^n$ во введенном выше базисе будем иметь

$$\left|\left\langle a^n, \chi_n(x)\right\rangle\right|^2 = \left|\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=1\\ j_1\le\ldots\le j_n}} a^n_{j_1,\ldots,j_n}\left\langle e_{j_1}\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}e_{j_n}, \chi_n(x)\right\rangle\right|^2 \le$$

$$\le C^2(x,r,n)\left\|a^n\right\|^2_{N_{p_1}^{\hat{\otimes}n}} \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|e_{j_1}\right\|^2_{N_{p_0}}\ldots\left\|e_{j_n}\right\|^2_{N_{p_0}} =$$

$$= C^2(x,r,n)\left\|a^n\right\|^2_{N_{p_1}^{\hat{\otimes}n}}\left\|O_{p_1,p_0}\right\|^{2n}_{HS}.$$

Это неравенство эквивалентно (26).

Всюду далее будем предполагать, что характеры $\chi(x,\lambda)$ (21) *имеют следующие дополнительные свойства равномерной по* λ *локальной ограниченности: для любого шара* $U\subset Q$ $\exists\, C_U>0$ *такое, что* $|\chi(x,\lambda)|\le C_U$ *при* $x\in U$ *и* $\lambda\in N_{p_0}$, $\|\lambda\|_{p_0}\le R$.

Через $C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)=C^0_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ будем обозначать подпространство $C(Q)$, состоящее из ограниченных на каждом шаре функций. Таким образом, $\chi(\cdot,\lambda)\in$ $\in C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ равномерно по λ.

Покажем, прежде всего, что $\forall\, p\in\mathbb{Z}_+$, $n\in\mathbb{N}$ операторы обобщенного сдвига T_x можно естественным образом продолжить на пространство $\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ слабо непрерывных векторнозначных функций $Q\ni s\mapsto\hat{f}(s)\in N_{-p}^{\hat{\otimes}n}$, для которых $\|\hat{f}(s)\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}n}}$ ограничена на каждом шаре.

Лемма 1. *Утверждается, что* $\forall\, x\in Q$ *существует линейный оператор* $\hat{T}_x$, *действующий в* $\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ *и связанный с* T_x *равенством*

$$\left\langle(\hat{T}_x\hat{f}(\cdot))(y), a^n\right\rangle = \left(T_x\left\langle\hat{f}(\cdot), a^n\right\rangle\right)(y),\quad \hat{f}\in\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q),\quad a^n\in N_p^{\hat{\otimes}n},\quad y\in Q. \tag{27}$$

Доказательство. Зафиксируем $x,y\in Q$ и некоторые шары $U\ni x$, $V\ni y$. Пусть W — шар, связанный с U, V требованием с) локальности. Так как значения $(T_xf)(y)$ не зависят от значений $f(x)$ при $s\in Q\setminus W$, то соответствие $f\upharpoonright W\mapsto(T_xf)(y)\in\mathbb{C}^1$ при $f\in C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ является линейным функционалом на пространстве, состоящем из этих сужений, с равномерной нормой. Требование d) непрерывности влечет непрерывность этого функционала и, следовательно, оценку

$$\exists\, C>0:\ |(T_xf)(y)|\le C\sup_{s\in W}|f(s)|,\quad f\in C_{\mathrm{loc}\,b}(Q). \tag{28}$$

При $\hat{f}\in\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ функция $Q\ni s\mapsto\left\langle\hat{f}(s), a^n\right\rangle\in\mathbb{C}^1$ входит в $C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$. На основании (28) получаем: $\forall\, a^n\in N_p^{\hat{\otimes}n}$

$$\left|\left(T_x\left\langle\hat{f}(\cdot), a^n\right\rangle\right)(y)\right|\le C\sup_{s\in W}\left|\left\langle\hat{f}(s), a^n\right\rangle\right|\le C\sup_{s\in W}\left\|\hat{f}(s)\right\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}n}}\left\|a^n\right\|_{N_p^{\hat{\otimes}n}}. \tag{29}$$

Поэтому существует однозначно определяемый вектор $\hat{g}(\hat{f},y)\in N_{-p}^{\hat{\otimes}n}$ такой, что $\forall\, a^n\in N_p^{\hat{\otimes}n}$ $\left(T_x\left\langle\hat{f}(\cdot), a^n\right\rangle\right)(y)=\left\langle\hat{g}(\hat{f},y), a^n\right\rangle$. Из линейности T_x следует $\hat{g}(\hat{f},y)=(\hat{T}_x\hat{f}(\cdot))(y)$, где $\hat{T}_x$ — линейный оператор в $\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$.

Из равенства (27), очевидно, вытекает локальность операторов $\hat{T}_x$, $x \in Q$, формулируемая аналогично c), а из неравенства (29) — аналогичная d) непрерывность (поясним, что (29) влечет неравенство $\left\| \hat{g}\left(\hat{f}, y\right) \right\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} \leq$ $\leq C \sup_{s \in W} \left\| \hat{f}(s) \right\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}}$).

В дальнейшем *для операторов* $\hat{T}_x$ *будет сохранено обозначение* T_x. Таким образом, (27) теперь принимает вид: $\forall\, x, y \in Q$

$$\left\langle \left(T_x \hat{f}(\cdot)\right)(y), a^n \right\rangle = \left(T_x \left\langle \hat{f}(\cdot), a^n \right\rangle\right)(y), \quad \hat{f} \in \hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q), \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}. \tag{30}$$

Зафиксируем число $p_1 > p_0$, выбранное при доказательстве оценки (26) (вложение $N_{p_1} \subsetneq N_{p_0}$ должно быть квазиядерным), и под пространством $\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ будем понимать это пространство, построенное по $p = p_1$; $C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ и $\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ естественно называть пространствами локально ограниченных непрерывных функций (скалярных и векторных).

Лемма 2. *Каждый характер Дельсарта* $Q \ni x \mapsto \chi_n(x) \in N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, *слабо непрерывен и локально ограничен, т. е.* $\chi_n \in \hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$.

Доказательство. Из равномерной локальной ограниченности $\chi(\cdot, \lambda)$ и оценки (26) вытекает локальная ограниченность $\chi_n(x)$.

Далее, как было отмечено, функция $Q \ni x \mapsto \left\langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, \chi_n(x) \right\rangle \in \mathbb{C}^1$ $\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in N_{p_1} \subset N_{p_0}$ непрерывна. Векторы $\lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in$ $\in N_{p_1}$, образуют тотальное множество в $N_{p_1}^{\hat{\otimes} n}$ и нормы $\|\chi(x)\|_{N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}}$ ограничены в каждой окрестности точки x. Поэтому указанная непрерывность $\langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, \chi_n(x) \rangle$ приводит к слабой непрерывности $\chi_n(x)$.

Таким образом, если понимать характеры Дельсарта $\chi_n(x)$ как вектор-функции со значениями в $N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}$, то к ним в силу леммы 1 можно применять операторы обобщенного сдвига T_x (т. е. $\hat{T}_x$): $(T_x \chi_n(\cdot))(y)$. Для последнего выражения справедлив следующий факт, обобщающий формулу бинома.

Теорема 1. *Для каждого* $n \in \mathbb{Z}_+$ *справедливо равенство*

$$(T_x \chi_n(\cdot))(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \chi_m(x) \hat{\otimes} \chi_{n-m}(y), \qquad x, y \in Q. \tag{31}$$

Можно показать, что равенство (31) является определяющим для характеров Дельсарта; мы этого делать не будем.

Доказательство. Перемножая разложения (21), где $\lambda \in N_{p_1} \subset N_{p_0}$, $\|\lambda\|_{N_{p_0}} \leq \|\lambda\|_{N_{p_1}} \leq R$, получаем $\forall\, x, y \in Q$

$$(T_x \chi(\cdot, \lambda))(y) = \chi(x, \lambda)\chi(y, \lambda) = \sum_{n, m = 0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \left\langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \right\rangle \left\langle \lambda^{\otimes m}, \chi_m(y) \right\rangle =$$

$$= \sum_{n, m = 0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \left\langle \lambda^{\otimes (n+m)}, \chi_n(x) \hat{\otimes} \chi_m(y) \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \lambda^{\otimes n}, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \chi_m(x) \hat{\otimes} \chi_{n-m}(y) \right\rangle. \tag{32}$$

С другой стороны, если в левой части (32) воспользоваться представлением (21) для $\chi(\cdot, \lambda)$ и формально переставить T_x и знак суммы, то в силу (27) получим

$$(T_x \chi(\cdot, \lambda))(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(T_x\left\langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(\cdot)\right\rangle\right)(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\langle \lambda^{\otimes n}, (T_x\chi_n(\cdot))(y)\right\rangle. \quad (33)$$

Сравнивая коэффициенты при $\lambda^{\otimes n}$ в (32) и (33), получаем (31). Этот вывод равенства (31), разумеется, формальный. Приведем точное доказательство.

Пусть $e \in N_{p_1}$, $\|e\|_{N_{p_1}} = 1$; $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| \le R$. Подставляя в (32) $\lambda = ze$, получаем, что $\forall\, x, y \in Q$

$$\left\langle e^{\otimes n}, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \chi_n(x) \hat{\otimes} \chi_m(y) \right\rangle \quad (34)$$

является коэффициентом при $z^n/n!$ в разложении $\chi(x, ze)\chi(y, ze)$ в ряд по степеням z. С другой стороны, покажем, что таким же коэффициентом будет и

$$\left\langle e^{\otimes n}, (T_x \chi_n(\cdot))(y) \right\rangle. \quad (35)$$

Этим равенство (31) будет доказано: из совпадения (34) и (35) и поляризационного тождества следует равенство (34) и (35) с заменой $e^{\otimes n}$ на $e_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} e_n$, где $e_1, \ldots, e_n \in N_{p_1}$, $\|e_1\|_{N_{p_1}} = \ldots = \|e_n\|_{N_{p_1}} = 1$, а значит, и (31).

Пусть $x, y \in Q$ фиксированы и шар $W \subset Q$ выбран так, чтобы $(T_x f)(y)$ не зависело от значений $f(s)$ при $s \in Q \setminus W$; $\kappa_W(s)$ — характеристическая функция этого шара. Имеем согласно (27) и второй из формул (22):

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{\otimes n}, (T_x \chi_n(\cdot))(y) \right\rangle &= \left(T_x\left\langle e^{\otimes n}, \chi_n(\cdot)\right\rangle\right)(y) = \left(T_x\left(\kappa_W(\cdot)\left\langle e^{\otimes n}, \chi_n(\cdot)\right\rangle\right)\right)(y) = \\
&= \left(T_x\left(\kappa_W(\cdot)\frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\chi(\cdot, \zeta e)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\right)\right)(y) = \left(\frac{n!}{2\pi i} T_x \oint_\Gamma \frac{\kappa_W(\cdot)\chi(\cdot, \zeta e)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta\right)(y) = \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{(T_x(\kappa_W(\cdot)\chi(\cdot, \zeta e)))(y)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{(T_x \chi(\cdot, \zeta e))(y)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta = \\
&= \frac{n!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\chi(x, \zeta e)\chi(y, \zeta e)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta, \quad (36)
\end{aligned}$$

т. е. (35) будет требуемым коэффициентом.

В (36) поменять местами T_x и интеграл можно было на том основании, что последний можно рассматривать как интеграл Бохнера от вектор-функции $\Gamma \ni \zeta \mapsto \kappa_W(\cdot)\chi(\cdot, \zeta e)/\zeta^{n+1} \in E$, где E — банахово пространство непрерывных ограниченных функций $W \ni s \mapsto f(s) \in \mathbb{C}^1$ с равномерной нормой.

5. Пространства Дельсарта основных и обобщенных функций. Так для краткости мы будем называть пространства, построенные согласно процедуре п.п. 1–3, когда роль H^n будут играть пространства, натянутые на $\chi_n(x)$.

Пусть ρ — заданная на Q фиксированная борелевская вероятностная (т. е. $\rho(Q) = 1$) мера, положительная на открытых множествах. Роль пространства H_0 будет играть пространство $H_0 = L_2(Q, d\rho(x))$. *Предположим, что* $\forall\, n \in$

$\in \mathbb{Z}_+$ *функция* $Q \ni x \mapsto \|\chi_n(x)\|_{N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}} \in [0, \infty)$ *суммируема с квадратом относительно* ρ *и справедлива оценка*

$$\exists\, C > 0: \left\| \|\chi_n(\cdot)\|_{N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}} \right\|_{H_0} = \left(\int_Q \|\chi_n(x)\|^2_{N_{-p_1}^{\hat{\otimes} n}} \, d\rho(x) \right)^{1/2} \le C^n n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{37}$$

Для упрощения записей в дальнейшем целесообразно произвести еще одну замену обозначений. Именно, *в дальнейшем пространство* N_{p_1} *обозначим через* N_1, *а через* N_p *при* $p > p_1$ — N_{p-p_1+1}. В цепочках (10), (11) прежние пространства $N_1, \ldots, N_{p_1-1}$ будут отсутствовать; проективные и индуктивные пределы, разумеется, останутся прежними.

По каждому характеру Дельсарта χ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $p \in \mathbb{N}$ введем линейное пространство „n-элементарных" функций $H^{n,\chi}(p)$ — комплекснозначных непрерывных локально ограниченных функций на Q вида

$$Q \ni x \mapsto \varphi^n(x) = \langle \chi_n(x), a^n \rangle \in \mathbb{C}^1 \quad (\forall\, x \in Q \;\; \chi_n(x) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}), \tag{38}$$

где $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$ произвольно, и превратим его в гильбертово, полагая $\forall\, \varphi^n$, ψ^n и соответствующих $a^n, b^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$

$$(\varphi^n, \psi^n)_{H^{n,\chi}(p)} = (a^n, b^n)_{N_p^{\hat{\otimes} n}}. \tag{39}$$

Таким образом, $H^{n,\chi}(p)$ изометрично $N_p^{\hat{\otimes} n}$ и имеем ситуацию п. 2; $H^{n,\chi}(p'') \hookrightarrow H^{n,\chi}(p')$ при $p', p'' \in \mathbb{N}$, $p'' \ge p'$.

Функции вида (38) при $p = 1$ (а значит, и при $p \in \mathbb{N}$) вкладываются в H_0: в силу (37) и (39) имеем $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\|\varphi^n\|^2_{H_0} = \int_Q |\varphi^n(x)|^2 \, d\rho(x) = \int_Q \left| \langle \chi_n(x), a^n \rangle \right|^2 d\rho(x) \le$$

$$\le \int_Q \|\chi_n(x)\|^2_{N_{-1}^{\hat{\otimes} n}} \|a^n\|^2_{N_1^{\hat{\otimes} n}} \, d\rho(x) \le (C^n n!)^2 \|\varphi^n\|^2_{H^{n,\chi}(1)} < \infty.$$

Из этого неравенства следует, что для операторов вложения O^n: $H^n(1) \hookrightarrow H_0$ справедлива требуемая оценка (13), причем константа C в ней та же, что и в (37).

Для возможности применения конструкций п.п. 1, 2 *будем предполагать, что пространства* $H^{n,\chi}(1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *как линейные множества из* H_0 *линейно независимы, а их л. о. плотна в* H_0, т. е. плотна л. о. всех элементарных функций (38) при $p = 1$. Позже, в п. 10, мы коснемся выполнения одного из этих условий (отражающих полноту совокупности всех характеров, о которой упоминалось в п. 3) см. также [17]. В соответствии с (16) $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ и при некотором фиксированном достаточно большом $K > 1$ введем пространство

$$H^{\chi}(p, q) = \left\{ \varphi(x) = (\varphi^n)_{n=0}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(x), \; \varphi^n \in H^{n,\chi}(p) \,\middle|\, \|\varphi\|^2_{H^{\chi}(p,q)} = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|^2_{H^{n,\chi}(p)} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}. \tag{40}$$

Каждое $H^{\chi}(p, q)$ плотно в H_0: для этого достаточно убедиться, что $\forall n$, $q \in \mathbb{N}$ $H^{n,\chi}(p)$ плотно в $H^{n,\chi}(1)$, а это следует из плотности $N_p^{\hat{\otimes} n}$ в $N_1^{\hat{\otimes} n}$, (38), (39) и конечности интеграла в (37).

Покажем, что сейчас отсутствует паразитическое пространство Z п. 1.

Лемма 3. *При* $K > 1$ *достаточно большом пространство* $H^{\chi}(1, 1) \subseteq \subseteq C_{\mathrm{loc}\, b}(Q)$, *т. е. состоит из непрерывных локально ограниченных функций на* Q. *Для каждого шара* $U \subset Q$ $\exists A_U > 0$:

$$|\varphi(x)| \le A_U \|\varphi\|_{H^{\chi}(1,1)}, \quad x \in U, \quad \varphi \in H^{\chi}(1, 1). \tag{41}$$

Доказательство. С помощью (39), (26) и определения (40) пространства $H^{\chi}(1, 1)$ получаем $\forall r \in (0, R)$ $\exists C_1 > 0$:

$$\sum_{n=N}^{M} \left|\varphi^n(x)\right| = \sum_{n=N}^{M} \left|\left\langle \chi_n(x), a^n \right\rangle\right| \le \sum_{n=N}^{M} \|\chi_n(x)\|_{N_{-1}^{\hat{\otimes} n}} \left\|a^n\right\|_{N_1^{\hat{\otimes} n}} =$$

$$= \sum_{n=N}^{M} \|\chi_n(x)\|_{N_{-1}^{\hat{\otimes} n}} \left\|\varphi^n\right\|_{H^{n,\chi}(1)} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=N}^{M} \|\chi_n(x)\|^2_{N_{-1}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^{-2} K^{-n} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N}^{M} \left\|\varphi^n\right\|^2_{H^{n,\chi}(1)} (n!)^2 K^n \right)^{1/2} \le$$

$$\le \max_{\|\lambda\|_{N_{p_0}} = r} |\chi(x, \lambda)| \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{n^{2n} \left\|O_{1,p_0}\right\|^{2n}_{HS}}{r^{2n} (n!)^2 K^n} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N}^{M} \left\|\varphi^n\right\|_{H^{n,\chi}(1)} (n!)^2 K^n \right)^{1/2} \le$$

$$\le C_1 \max_{\|\lambda\|_{N_{p_0}} = r} |\chi(x, \lambda)| \left(\sum_{n=N}^{M} \frac{e^{2n} \left\|O_{1,p_0}\right\|^{2n}_{HS}}{r^{2n} K^n} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=N}^{M} \left\|\varphi^n\right\|^2_{H^{n,\chi}(1)} (n!)^2 K^n \right)^{1/2} \tag{42}$$

(в последней оценке мы воспользовались формулой Стирлинга: $\left(n^n / n!\right) e^{-n} \times \times \sqrt{2\pi n} \to 1$). Зафиксируем $r \in (0, R)$ и выберем $K > 1$ столь большим, чтобы $C_2 = e^2 \left\|O_{1,p_0}\right\|^2_{HS} r^{-2} K^{-1}$ стало меньше единицы. Тогда (42) дает

$$\sum_{n=N}^{M} \left|\varphi^n(x)\right| \le \frac{C_1}{1 - C_2} \max_{\|\lambda\|_{N_{p_0}} = r} |\chi(x, \lambda)| \left(\sum_{n=N}^{M} \left\|\varphi^n\right\|^2_{H^{n,\chi}(1)} (n!)^2 K^n \right)^{1/2}. \tag{43}$$

Из (43), равномерной по λ локальной ограниченности $\chi(x, \lambda)$ и сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\|\varphi^n\right\|^2_{H^{n,\chi}(1)} (n!)^2 K^n = \|\varphi\|^2_{H^{\chi}(1,1)}$$

вытекает непрерывность и локальная ограниченность

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(x), \quad x \in Q.$$

Оценка (41) следует из (43) при $N = 0$ и $M \to \infty$.

Лемма 4. *Пространство* $Z = 0$.

Доказательство. В соответствии с п. 1 нужно показать, что если последовательность $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ сумм φ_j конечного числа элементарных функций φ^n такова, что она фундаментальна в пространстве $H^{\chi}(1, 1)$ и стремится к 0 в пространстве H_0, то она стремится к 0 и в $H^{\chi}(1, 1)$.

Пусть φ — предел φ_j по норме $\|\cdot\|_{H^{\chi}(1,1)}$, $\varphi \in H^{\chi}(1, 1)$ и согласно лемме 3 $\varphi(x)$ непрерывна на Q и локально ограничена.

Для этой функции имеем

$$\int\limits_{Q} |\varphi(x)|^2 d\rho(x) = \|\varphi\|_{H_0}^2 = \lim_{j \to \infty} \|\varphi_j\|_{H_0}^2 = 0,$$

так как согласно предположению $\varphi_j \to 0$ в пространстве H_0. Из последнего равенства благодаря непрерывности $\varphi(x)$ и положительности меры ρ на открытых множествах заключаем, что $\varphi(x) = 0$, $x \in Q$, т. е. $\varphi = 0$ как вектор пространства $H^{\chi}(1, 1)$. Поэтому $\|\varphi_j\|_{H^{\chi}(1,1)} \to \|\varphi\|_{H^{\chi}(1,1)} = 0$ при $j \to \infty$.

В дальнейшем зафиксируем $K > 1$ достаточно большое. Согласно п. 2 и доказательству леммы 3 K должно быть таким, чтобы

$$K > \max\left\{1, C^2, \|O_{1,p_0}\|_{HS}^2 e^2 R^{-2}\right\},$$

где C и R взяты из (37) и (21).

Таким образом, построены цепочки пространств Дельсарта со спариванием $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ (см. формулы (40), (38), (39), (8), (9)): $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$

$$H^{\chi}(p, q) = \left\{\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(x),\ \varphi^n \in H^{n,\chi}(p) \,\middle|\, \|\varphi\|_{H^{\chi}(p,q)}^2 = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|_{H^{n,\chi}(p)}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} =$$

$$= \left\{\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \chi_n(x), a^n \right\rangle,\ a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n} \,\middle|\, \|\varphi\|_{H^{\chi}(p,q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}, \tag{44}$$

$$(\Phi^{\chi})' \supseteq \ldots \supseteq H^{\chi}(-p, -q) \supseteq \ldots \supseteq H_0 \supseteq \ldots \supseteq H^{\chi}(p, q) \supseteq \ldots \supseteq \Phi^{\chi},$$

$$H^{\chi}(-p, -q) = (H^{\chi}(p, q))',$$

$$\Phi^{\chi} = \operatorname*{pr\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} H^{\chi}(p, q) = \bigcap_{p,q \in \mathbb{N}} H^{\chi}(p, q),$$

$$(\Phi^{\chi})' = \operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} H^{\chi}(-p, -q) = \bigcup_{p,q \in \mathbb{N}} H^{\chi}(-p, -q).$$

Подчеркнем, что согласно лемме 3 $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ пространства $H^{\chi}(p, q)$, Φ^{χ} состоят из непрерывных локально ограниченных функций на Q.

***Замечание* 4.** Как указывалось в замечании 3, множитель $(n!)^2$ в (44) определялся оценкой (13), т. е. оценкой (37) в нашем случае. При другой оценке (37) естествен и другой множитель.

6. Кохарактеры Дельсарта и описание пространств обобщенных функций. В (44) негативные пространства определяются равенством $H^{\chi}(-p,-q) = (H^{\chi}(p,q))'$, или, что то же самое, равенством $H^{\chi}(-p,-q) = (\mathbf{I}^{\chi}(p, q))^{-1} H^{\chi}(p,q)$, где $\mathbf{I}^{\chi}(p,q)$ связан с цепочкой (9) для $H^{\chi}(p,q)$.
Укажем более явный вид этих пространств обобщенных функций.

Пусть $\alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}$, $m, p \in \mathbb{N}$. Введем операцию „уничтожения" (или „дифференцирования") $\partial(\alpha^m)$ с коэффициентом α^m, полагая $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall\, x \in Q$

$$\partial(\alpha^m)\chi_n(x) = n(n-1)\ldots(n-m+1)\alpha^m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(x), \quad m \le n,$$
$$\partial(\alpha^m)\chi_n(x) = 0, \quad m > n,$$

или, что то же,

$$\partial(\alpha^m)\langle\chi_n(x), a^n\rangle = \frac{n!}{(n-m)!}\langle\alpha^m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(x), a^n\rangle, \quad m \le n,$$

$$\partial(\alpha^m)\langle\chi_n(x), a^n\rangle = 0, \quad m > n; \quad a^n \in \mathbb{N}_p^{\hat{\otimes} n} \quad (\chi_n(x) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n} \subseteq N_{-p}^{\hat{\otimes} n}). \tag{45}$$

Отметим, что *выражение в правой части* (45) *можно переписать в виде*

$$\langle\alpha^m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(x), a^n\rangle = \langle\chi_{n-m}(x), a_{\alpha^m}^{n-m}\rangle, \qquad a_{\alpha^m}^{n-m} \in N_p^{\hat{\otimes}(n-m)},$$
$$\|a_{\alpha^m}^{n-m}\|_{N_p^{\hat{\otimes}(n-m)}} \le \|\alpha^m\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} m}} \|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}. \tag{46}$$

Это следует из общего факта: если $\alpha^k \in N_{-p}^{\hat{\otimes} k}$, $\beta^l \in N_{-p}^{\hat{\otimes} l}$ и $a^{k+l} \in N_p^{\hat{\otimes}(k+l)}$, то $\exists\, a_{\alpha^k}^l \in N_p^{\hat{\otimes} l}$:

$$\langle\alpha^k \hat{\otimes} \beta^l, a^{k+l}\rangle = \langle\beta^l, a_{\alpha^k}^l\rangle, \qquad \|a_{\alpha^k}^l\|_{N_p^{\hat{\otimes} l}} \le \|\alpha^k\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} k}} \|a^{k+l}\|_{N_p^{\hat{\otimes}(k+l)}}. \tag{47}$$

В самом деле, оператор $N_{-p}^{\hat{\otimes} l} \ni \beta^l \mapsto A\beta^l = \alpha^k \hat{\otimes} \beta^l \in N_{-p}^{\hat{\otimes}(k+l)}$ непрерывен и его норма не превышает $\|\alpha^k\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} k}}$; тогда его сопряженный A^* относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$ действует из $N_p^{\hat{\otimes}(k+l)}$ в $N_p^{\hat{\otimes} l}$ и $\|A^*\| = \|A\|$. Равенство и оценка (47) вытекают из этого замечания: $a_{\alpha^k}^l = A^* a^{k+l}$.

Распространяя оператор $\partial(\alpha^m)$ по линейности с элементарных функций на их конечные суммы $\varphi \in H^{\chi}(p,q)$, в соответствии с (45), (46) получаем

$$\partial(\alpha^m)\varphi = \partial(\alpha^m)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\partial(\alpha^m)\langle\chi_n(x), a^n\rangle =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\langle\alpha^m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(x), a^n\rangle =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{(n-m)!}\langle\chi_{n-m}(x), a_{\alpha^m}^{n-m}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+m)!}{n!}\langle\chi_n(x), a_{\alpha^m}^n\rangle. \tag{48}$$

Лемма 5. *В каждом пространстве* $H^\chi(p,q)$, $p,q\in\mathbb{N}$, *оператор* $\partial(\alpha^m)$, *где* $\alpha^m\in N_{-p}^{\hat{\otimes}m}$, $m\in\mathbb{N}$, *действует непрерывно и его норма не превышает* $\|\alpha^m\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}m}}K^{-qm/2}$.

Доказательство. Согласно (48), (44), (39) и (46) получаем

$$\|\partial(\alpha^m)\varphi\|^2_{H^\chi(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{(n+m)!}{n!}\langle\chi_n(\cdot),a^n_{\alpha^m}\rangle\right\|^2_{H^{n,\chi}(p)}(n!)^2K^{qn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}((n+m)!)^2\|a^n_{\alpha^m}\|^2_{N_p^{\hat{\otimes}n}}K^{qn} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty}((n+m)!)^2\|\alpha^m\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes}m}}\|a^{n+m}\|^2_{N_p^{\hat{\otimes}(n+m)}}K^{qn} =$$

$$= \|\alpha^m\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes}m}}K^{-qm}\sum_{n=0}^{\infty}\|a^{n+m}\|^2_{N_p^{\hat{\otimes}(n+m)}}((n+m)!)^2K^{q(n+m)} \le$$

$$\le \|\alpha^m\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes}m}}K^{-qm}\|\varphi\|^2_{H^\chi(p,q)}.$$

Таким образом, если $\alpha^m\in N_{-p}^{\hat{\otimes}m}$, то оператор $\partial(\alpha^m)$ действует непрерывно в каждом пространстве $H^\chi(p',q)$, $p'>p$, $q\in\mathbb{N}$, а значит, и в Φ^χ. Его сопряженный оператор $\partial^+(\alpha^m)$ относительно H_0 (т. е. $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$) действует непрерывно в пространствах обобщенных функций $H^\chi(-p',-q)$ и $(\Phi^\chi)'$.

Согласно лемме 3 $\forall\, p,q\in\mathbb{N}$ $H^\chi(p,q)\subseteq H^\chi(1,1)\subseteq C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ и справедлива оценка $|\varphi(x)|\le A_U\|\varphi\|_{H^\chi(p,q)}$, $x\in U$, $\varphi\in H^\chi(p,q)$. Поэтому $\forall\, x\in Q$ *определена* δ-*функция* δ_x, *сосредоточенная в точке* x:

$$\langle\langle\delta_x,\varphi\rangle\rangle = \overline{\varphi(x)},\ \varphi\in H^\chi(p,q);\qquad \delta_x\in H^\chi(-p,-q),\ p,q\in\mathbb{N}. \tag{49}$$

В частности, $\forall\, p,q\in\mathbb{N}$ определена $\delta_e\in H^\chi(-p,-q)$, а значит, имеет смысл при $\alpha^m\in N_{-p}^{\hat{\otimes}m}$ обобщенная функция

$$\theta(\alpha^m) = \partial^+\left(\overline{\alpha^m}\right)\delta_e\in H^\chi(-p,-q), \tag{50}$$

которую мы будем называть кохарактером Дельсарта (с коэффициентом α^m). Кохарактеры (50) и характеры Дельсарта $\chi_n(x)$ (точнее, элементарные функции $\langle\chi_n(\cdot),a^n\rangle\in H^\chi(p,q)$, $a_n\in N_p^{\hat{\otimes}n}$) будут в определенном смысле ортогональны относительно $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$, что даст возможность описать пространства $H^\chi(-p,-q)$.

Эти соотношения ортогональности будут вытекать из равенств для характеров Дельсарта:

$$\chi_0(e) = 1 = \chi_0(x),\quad x\in Q,\qquad \chi_n(e) = 0,\quad n\in\mathbb{N}, \tag{51}$$

следующих непосредственно из определения (21).

Лемма 6. *Справедливы следующие соотношения ортогональности между кохарактерами и характерами Дельсарта:* $\forall\, p\in\mathbb{N}$

$$\langle\langle \theta(\alpha^m), \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle\rangle\rangle = \delta_{n,m}\, n!\langle \alpha^n, \overline{a}^n\rangle,$$

$$\alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+ \tag{52}$$

$$(\theta(\alpha^0) = \alpha^0 \in \mathbb{C}^1, \langle \chi_0(\cdot), a^0\rangle = a^0 \in \mathbb{C}^1).$$

Доказательство. Пусть $m < n$, согласно (50), (45), (49) и (51) имеем

$$\langle\langle \theta(\alpha^m), \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle\rangle\rangle = \langle\langle \delta_e, \partial\left(\overline{\alpha^m}\right)\langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\langle\langle \delta_e, \langle \overline{\alpha^m} \hat{\otimes} \chi_{n-m}(\cdot), a^n\rangle\rangle\rangle = \frac{n!}{(n-m)!}\left\langle \overline{\overline{\alpha^m} \hat{\otimes} \chi_{n-m}(e), a^n} \right\rangle = 0. \tag{53}$$

В случае $m = n$ тот же подсчет (53) дает

$$\langle\langle \theta(\alpha^n), \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle\rangle\rangle = n!\left\langle \overline{\overline{\alpha^n} \hat{\otimes} \chi_0(e), a^n} \right\rangle = n!\left\langle \alpha^n, \overline{a^n} \right\rangle.$$

В случае $m > n$ уже второе выражение в (53) равно нулю в силу (45).

Негативное пространство обобщенных функций $H^\chi(-p, -q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, имеет вид (4) для позитивного $H^\chi(p, q)$ вида (40), (44), (1), где $H^n = H^{n,\chi}(p)$, и нулевого $H_0 = L_2(Q, d\rho(x))$. Подсчитаем $H^{-n} = H^{-n,\chi}(p)$ из (4) в нашем случае, а именно: выразим эти пространства через кохарактеры (50).

Итак, зафиксируем $p, q \in \mathbb{N}$. Пространство $H^\chi(p, q)$ имеет вид (40), (44). Пространство $H^\chi(-p, -q)$ в соответствии с (4), (14) имеет вид

$$H^\chi(-p, -q) =$$

$$= \left\{\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n, \xi^n \in H^{-n,\chi}(-p) \,\middle|\, \|\xi\|^2_{H^\chi(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi^n\|^2_{H^{-n,\chi}(-p)} (n!)^2 K^{qn} < \infty\right\}, \tag{54}$$

$$H^{-n,\chi}(p, q) = (\mathbf{I}^\chi(p, q))^{-1} H^{n,\chi}(p); \qquad \|\xi^n\|^2_{H^{-n,\chi}(-p)} = \|\mathbf{I}^\chi(p, q)\xi^n\|_{H^{n,\chi}(p)}.$$

Здесь $\mathbf{I}^\chi(p, q)$ — оператор $\mathbf{I}$, связанный с цепочкой

$$H^\chi(-p, -q) \supseteq H_0 \supseteq H^\chi(p, q). \tag{55}$$

Перепишем соотношение ортогональности (6) в нашем случае. Пусть $\mathbf{I}_p$ — оператор $\mathbf{I}$, связанный с цепочкой

$$N_{-p} \supseteq N_0 \supseteq N_p, \tag{56}$$

тогда $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ $\mathbf{I}_p^{\hat{\otimes} n}$ — оператор $\mathbf{I}$, связанный с цепочкой

$$N_{-p}^{\hat{\otimes} n} \supseteq N_0^{\hat{\otimes} n} \supseteq N_p^{\hat{\otimes} n} \tag{57}$$

(при $n = 0$ пространства (57) совпадают с $\mathbb{C}^1$). Векторы $\xi^m \in H^{-m,\chi}(-p)$ имеют вид $\xi^m = (\mathbf{I}^\chi(p, q))^{-1}\psi^m$, где $\psi^m \in H^{m,\chi}(p)$, т. е. $\psi^m = \langle \chi_m(\cdot), b^m\rangle$, $b^m \in N_p^{\hat{\otimes} m}$. Пусть $\varphi^n = \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle \in H^{n,\chi}(p)$, $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$. Тогда (6) с учетом (57) приобретает вид: $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}_+$ $(h_n(q) = (n!)^2 K^{qn})$

$$\langle\langle \xi^m, \varphi^n\rangle\rangle = \delta_{n,m}(\mathbf{I}^{\chi}(p,q)\xi^n, \varphi^n)_{H^{n\chi(p)}} h_n(q) = \delta_{n,m}(\psi^n, \varphi^n)_{H^{n\chi(p)}} h_n(q) =$$

$$= \delta_{n,m}(b^n, a^n)_{N_p^{\hat{\otimes} n}} h_n(q) = \delta_{n,m}\big((\mathbf{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} b^n, a^n\big)_{N_0^{\hat{\otimes} n}} h_n(q) =$$

$$= \delta_{n,m}(\beta^n, a^n)_{N_p^{\hat{\otimes} n}} h_n(q) = \delta_{n,m}\langle \beta^n, \overline{a^n}\rangle h_n(q),$$

$$\beta^n = (\mathbf{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} b^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}.$$

Таким образом, (6) имеет вид

$$\langle\langle \xi^m, \varphi^n\rangle\rangle = \delta_{n,m}\langle \beta^n, \overline{a^n}\rangle (n!)^2 K^{qn}; \quad \beta^n = (\mathbf{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} b^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n},$$

$$\mathbf{I}^{\chi}(p,q)\xi^n = \langle \chi_n(\cdot), b^n\rangle, \quad \varphi^n = \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle. \tag{58}$$

$$a^n, b^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}; \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 2. *Негативное пространство* $H^{\chi}(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, *обобщенных функций имеет вид* (54), *где элементарные обобщенные функции* ξ^n *совпадают с точностью до множителей с кохарактерами Дельсарта* (50). *Именно:*

$$\xi^n = n!\, K^{qn}\theta(\alpha^n), \quad \alpha^n = (\mathbf{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} a^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}, \tag{59}$$

где $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$ *определяется из равенства* $\mathbf{I}^{\chi}(p,q)\xi^n = \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle$; *при этом*

$$\|\xi^n\|_{H^{-n\cdot\chi(-p)}} = \|\alpha^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{60}$$

Доказательство. Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$. Вектор $\xi^m \in H^{-m\cdot\chi}(-p)$ имеет вид $\xi^m = (\mathbf{I}^{\chi}(p,q))^{-1}\psi^m$, где $\psi^m = \langle \chi_m(\cdot), b^m\rangle \in H^{m\cdot\chi}(p)$, $b^m \in N_p^{\hat{\otimes} m}$. Положим $\beta^m = (\mathbf{I}_p^{\hat{\otimes} m})^{-1} b^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}$. Для разности

$$\eta^m = \xi^m - m!\, K^{qm}\theta(\beta^m) \in H^{\chi}(-p,-q)$$

при любом $\varphi^n = \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle$, $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, согласно соотношениям ортогональности (58) и (52) имеем

$$\langle\langle \eta^m, \varphi^n\rangle\rangle = \langle\langle \xi^m, \varphi^n\rangle\rangle - \langle\langle m!\, K^{qm}\theta(\beta^m), \varphi^n\rangle\rangle =$$

$$= \delta_{n,m}\langle \beta^n, \overline{a^n}\rangle (n!)^2 K^{qn} - m!\, K^{qm}\langle\langle \theta(\beta^m), \langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \delta_{n,m}\langle \beta^n, \overline{a^n}\rangle (n!)^2 K^{qn} - m!\, K^{qm}\delta_{n,m} n!\langle \beta^n, \overline{a^n}\rangle = 0.$$

Векторы φ^n, $n \in \mathbb{Z}_+$, образуют тотальную систему в $H^{\chi}(p,q)$, поэтому из последнего равенства следует $\eta^m = 0$. Это доказывает (59).

Равенство (60) очевидно:

$$\|\xi^n\|_{H^{-n\cdot\chi(p)}} = \|\mathbf{I}^{\chi}(p,q)\xi^n\|_{H^{n\cdot\chi(p)}} =$$

$$= \|\langle \chi_n(\cdot), a^n\rangle\|_{H^{n\cdot\chi(p)}} = \|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}} = \|\alpha^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}.$$

Равенства (59), (60) позволяют переписать представление (54) для $H^{\chi}(-p, -q)$ в виде: $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$

$$H^{\chi}(-p,-q) = \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\alpha^n) n! K^{qn} \,\middle|\, \|\xi\|^2_{H^{\chi}(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}. \tag{61}$$

„Координатно" спаривание этого пространства с $H^{\chi}(p,q)$ вида (44) выглядит так: $\forall\, \xi \in H^{\chi}(-p,-q)$, $\forall\, \varphi \in H^{\chi}(p,q)$

$$\langle\langle \xi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha^n, \overline{a^n} \rangle (n!)^2 K^{qn}. \tag{62}$$

Поясним, что формула (62) вытекает из (5), подсчета $(\xi^n, \varphi^n)_{H_0} = (\mathbf{I}^{\chi}(p,q)\xi^n, \varphi^n)_{H^n \cdot \chi(p)} h_n(q)$, сделанного при выводе (58), и формулы (59).

Из определения (45) следует линейная зависимость $\partial(\alpha^m)$ от α^m, но тогда отображение $N_{-p}^{\hat{\otimes} m} \ni \alpha^m \mapsto \partial^+ \left(\overline{\alpha^m}\right) \delta_e = \theta(\alpha^m) \in H^{\chi}(-p,-q)$ также линейно. Это позволяет в (61) сделать замену переменных $n! K^{qn} \alpha^n = \beta^n$, после чего представление (61) для $H^{\chi}(-p,-q)$ и спаривание (62) приобретают вид

$$H^{\chi}(-p,-q) = \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\beta^n) \,\middle|\, \|\xi\|^2_{H^{\chi}(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\beta^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \right\}, \tag{63}$$

$$\langle\langle \xi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \beta^n, \overline{a^n} \rangle n!; \quad p, q \in \mathbb{N}. \tag{64}$$

В последней формуле $\xi \in H^{\chi}(-p,-q)$ записано в виде (63), а основная функция $\varphi \in H^{\chi}(p,q)$ — в виде (44).

7. Характеры Аппеля. Рассмотрим обобщение характеров Дельсарта, которые также будут определятся из разложения типа (21), но для видоизмененной левой части $\chi(x,\lambda)$. В отличие от характеров Дельсарта эти новые характеры в некоторых случаях могут совпадать со своими кохарактерами, точнее, разложения (1) могут вестись по ортогональным суммам пространств H^n. Изложение основывается на предыдущих конструкциях (44), (61)–(64) пространств $H^{\chi}(p,q)$ и им сопряженных.

Лемма 7. *Пусть* $p, q \in \mathbb{N}$. *При* $\lambda \in N_p$, $\|\lambda\|_{N_p} < R^q = \min\{K^{-q/2}, R\}$, *характер* $\chi(\cdot,\lambda) \in H^{\chi}(p,q)$;

$$\|\chi(\cdot,\lambda)\|_{H^{\chi}(p,q)} = \left(1 - \|\lambda\|^2_{N_p} K^{q/2}\right)^{-1/2}. \tag{65}$$

Доказательство. Для указанного λ $\|\lambda\|_{N_{p_0}} \le \|\lambda\|_{N_1} \le \|\lambda\|_{N_p} < R$ $(p_0 < p_1 = 1 < p)$, поэтому справедливо представление (21). Согласно (44) имеем

$$\|\chi(\cdot,\lambda)\|^2_{H^{\chi}(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(\cdot) \rangle \right\|^2_{H^n \cdot \chi(p)} (n!)^2 K^{qn} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda^{\otimes n}\|^2_{N_p^{\hat{\otimes} n}} K^{qn} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\|^{2n}_{N_p} K^{qn} = \left(1 - \|\lambda\|^2_{N_p} K^{q/2}\right)^{-1}. \tag{66}$$

Зафиксируем $p, q \in \mathbb{N}$ и функционал $l \in H^{\chi}(-p,-q)$ и рассмотрим его существующее в силу леммы 7 „преобразование Лапласа"

$$\hat{l}(\lambda) = l\overline{(\chi(\cdot,\lambda))} = \langle\langle l, \overline{\chi(\cdot,\lambda)}\rangle\rangle, \quad \lambda \in B_p^q = \{\lambda \in N_p \mid \|\lambda\|_{N_p} < R^q\}. \quad (67)$$

Лемма 8. *Преобразование Лапласа* (67) *является аналитической функцией в* 0. *Точнее, справедливо разложение*

$$\hat{l}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \alpha^n\rangle, \quad \|\lambda\|_{N_p} < R^q, \quad \alpha_n = (D^n\hat{l})(0) \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}, \quad (68)$$

сходящееся равномерно при $\|\lambda\|_{N_p} \le r, \ \forall\, r < R^q$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что действие l на любой элементарной функции $\langle\chi_n(\cdot), a^n\rangle \in H^{\chi}(p,q)$ $(a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n})$ записывается в виде: $\exists\, \alpha^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}$ такое, что

$$l\overline{\left(\langle\chi_n(\cdot), a^n\rangle\right)} = \langle\alpha^n, a^n\rangle, \quad \|\alpha^n\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} \le \|l\|\, n!\, K^{qn/2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (69)$$

В самом деле, в соответствии с (44) имеем

$$\left| l\overline{\left(\langle\chi_n(\cdot), a^n\rangle\right)}\right| \le \|l\|\, \|\langle\chi_n(\cdot), a^n\rangle\|_{H^{\chi}(p,q)} = \|l\|\, \|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}\, n!\, K^{qn/2},$$

откуда и следует (69).

Из (21) и сходимости ряда (66) вытекает, что $\forall\, x \in Q$

$$\chi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle, \quad \lambda \in N_p, \quad \|\lambda\|_{N_p} < R^q, \quad (70)$$

причем этот ряд сходится по норме пространства $H^{\chi}(p,q)$. Применяя к (70) функционал l и пользуясь (69) при $a^n = \lambda^{\otimes n}$, получаем

$$\hat{l}(\lambda) = l\overline{(\chi(\cdot,\lambda))} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, l\overline{\left(\langle\lambda^{\otimes n}, \chi_n(\cdot)\rangle\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \alpha_n\rangle.$$

Оценка в (69) дает: $\forall\, r < R^q$ при $\|\lambda\|_{N_p} \le r$

$$\left|\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \alpha_n\rangle\right| \le \|\lambda\|_{N_p}^n \|l\|\, K^{qn/2} \le \|l\|\,(rK^{q/2})^n, \quad rK^{q/2} < 1.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость последнего ряда и требуемая аналитичность $\hat{l}(\lambda)$.

Будем считать $p = q = 1$, т.е. $l \in H^{\chi}(-1,-1)$. *Предположим, что* $\hat{l}(0) = l(1) \ne 0$. Тогда функция $1/\hat{l}(\lambda)$ переменной $\lambda \in N_1$ является аналитичной в 0 и допускает представление типа (20): $\exists\, R^1 > 0$

$$\frac{1}{\hat{l}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \beta^n\rangle,$$
$$\lambda \in B_1^1 = \{\lambda \in N_1 \mid \|\lambda\|_{N_1} \le R^1\}, \quad \beta^n = (D^n(\hat{l}^{-1}(\cdot)))(0) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}. \quad (71)$$

Примерами функционала l могут служить

$$l = \delta_e \quad (l(\varphi) = \overline{\varphi(e)},\ \varphi \in H^{\chi}(1,1)),$$
$$l = 1 \quad \left(l(\varphi) = \int_Q 1 \cdot \overline{\varphi(x)}\, d\rho(x),\ \varphi \in H^{\chi}(1,1) \right). \tag{72}$$

В первом случае $\hat{l}(\lambda) = 1$, $\lambda \in B_1^1$ и конструкция, которая будет излагаться ниже, даст прежние характеры Дельсарта. Во втором случае $l = 1 \in H_0 \subseteq \subseteq H^{\chi}(-1,-1)$ (напомним, что мера ρ вероятностная), $\hat{l}(0) = \rho(Q) = 1$, так как $\chi(e,\lambda) = 1$ $\forall\, \lambda \in B_0$; такой функционал в классическом случае приводит к полиномам Аппеля.

Согласно (21) и (71) $\forall\, x \in Q$ функция $\sigma(x,\lambda) = \chi(x,\lambda)\hat{l}^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in N_1$, является аналитической в окрестности 0 и допускает представление: $\forall\, x \in Q$

$$\sigma(x,\lambda) = \frac{\chi(x,\lambda)}{\hat{l}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle, \quad \lambda \in B_1^1 = \{ \lambda \in N_1 \mid \|\lambda\|_{N_1} \le R^1 \}. \tag{73}$$

Для каждого $x \in Q$ коэффициенты $P_n(x) = \left(D_{\lambda}^n \sigma(x,\cdot) \right)(0) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}$; их будем называть характерами Аппеля (отвечающими $l \in H^{\chi}(-1,-1)$). Сравнивая (73) и (71) и учитывая, что $\chi(e,\lambda) = 1$, $\lambda \in B_1^1$, получаем

$$P_0(x) = 1,\ x \in Q, \qquad P_n(e) = \beta^n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{74}$$

Из непрерывности $\forall\, \lambda \in B_1^1$ функции $Q \ni x \mapsto \sigma(x,\lambda) \in \mathbb{C}^1$ следует непрерывность $Q \ni x \mapsto \langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, P_n(x) \rangle \in \mathbb{C}$ $\forall\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in B_1^1$. Как и в случае характеров Дельсарта, справедливы аналоги представления (22) и оценок (24) и (26); в них $\chi(x,\lambda)$ и $\chi_n(x)$ должны быть заменены на $\sigma(x,\lambda)$ и $P_n(x)$, N_{p_0} на N_1, p_1 на $p_2 > 1$ с квазиядерным вложением $N_{p_2} \hookrightarrow N_1$; разумеется $r \in (0, R^1)$.

Характеры Аппеля и Дельсарта выражаются друг через друга. Так, перемножая разложения (21) (при $\lambda \in B_1^1 \subset N_1$) и (71), получаем $\forall\, x \in Q$

$$\sigma(x,\lambda) = \frac{\chi(x,\lambda)}{\hat{l}(\lambda)} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \langle \lambda^{\otimes n}, \beta^n \rangle \langle \lambda^{\otimes m}, \chi_m(x) \rangle =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \lambda^{\otimes n}, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \beta^{n-m} \hat{\otimes} \chi_m(x) \right\rangle, \quad \lambda \in B_1^1.$$

Сравнивая это разложение с (73), заключаем, что

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \beta^{n-m} \hat{\otimes} \chi_m(x), \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{75}$$

Аналогично

$$\chi_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \alpha^{n-m} \hat{\otimes} P_m(x), \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{76}$$

где $\alpha^n \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}$ определяются из разложения (68) (при $p = 1$).

Из (75) и леммы 2, в частности, вытекает, что *каждый характер Аппеля* $Q \ni x \mapsto P_n(x) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}$, *слабо непрерывен и локально ограничен, т. е.* $P_n \in \hat{C}^n_{\mathrm{loc}\, b}(Q)$.

Как и для характеров Дельсарта, введем n-элементарные функции типа (38) и скалярное произведение $(\cdot, \cdot)_{H^{n,P}(p)}$ для них типа (39): $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$Q \ni x \mapsto \varphi^n(x) = \langle P_n(x), a^n \rangle \in \mathbb{C}^1, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n};$$

$$(\varphi^n, \psi^n)_{H^{n,P}(p)} = (a^n, b^n)_{N_p^{\hat{\otimes} n}} \qquad (\varphi^n = \langle P_n(\cdot), a^n \rangle, \ \psi^n = \langle P_n(\cdot), b^n \rangle). \quad (77)$$

Из (75) следует, что эти функции являются линейными комбинациями функций (38) и поэтому входят в пространство H_0. Подобно предыдущему, обозначим через $H^{n,P}(p)$ гильбертово пространство функций (77) с указанным скалярным произведением; $H^{n,P}(p) \subseteq H_0$, однако непрерывность этого вложения пока не ясна.

Вместе с тем, $\forall\, p \in \mathbb{N}$ *л.о. пространств* $H^{n,P}(p)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *т. е. функций* (77), *плотна в* H_0: л.о. функций (38) плотна в H_0, а согласно (76) и равенствам типа (46) каждая такая функция является линейной комбинацией функций (77).

Покажем, что предположение п. 5 о линейной независимости пространств $H^{n,\chi}(p)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, влечет такую же независимость для $H^{n,P}(1)$ (и следовательно, для $H^{n,P}(p) \subseteq H^{n,P}(1)$ при любом фиксированном $p \in \mathbb{N}$).

Лемма 9. *Пространства* $H^{n,P}(1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *линейно независимы.*

Доказательство. Зафиксируем $l \in \mathbb{N}$ и рассмотрим гильбертово пространство $N_- = \oplus_{n=0}^{l} N_{-1}^{\hat{\otimes} n}$. Каждый ограниченный оператор $A : N_- \to N_-$ изображается матрицей $\mathcal{A} = \left(a_{j,k}\right)_{j,k=0}^{l}$ с элементами $a_{j,k}$, являющимися ограниченными операторами: $\forall\, \alpha = (\alpha^0, \ldots, \alpha^l) \in N_-$ с координатами $\alpha^n \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}$

$$(A\alpha)^j = \sum_{k=0}^{l} a_{j,k} \alpha^k, \quad a_{j,k}\colon N_{-1}^{\hat{\otimes} k} \to N_{-1}^{\hat{\otimes} j}. \quad (78)$$

Обратно, каждая матрица $\mathcal{A}$ с ограниченными операторами $a_{j,k}$ порождает согласно (78) оператор $A : N_- \to N_-$.

По A строится естественным образом в пространстве $N_+ = \oplus_{n=0}^{l} N_1^{\hat{\otimes} n}$ сопряженный относительно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ оператор A^+. Его матрица $\mathcal{A}^+ = \left(a^+_{j,k}\right)_{j,k=0}^{l}$ „транспонирована" относительно $\mathcal{A}$: она состоит из операторов $a^+_{j,k} : N_1^{\hat{\otimes} k} \to N_1^{\hat{\otimes} j}$, которые определяются равенством $\langle a^+_{j,k} \varphi^k, \alpha^j \rangle = \langle \varphi^k, a_{k,j} \alpha^j \rangle$, $\varphi^k \in N_1^{\hat{\otimes} k}$, $\alpha^j \in N_{-1}^{\hat{\otimes} j}$. Отметим, что если $a_{j,j} = id$, то и $a^+_{j,j} = id$.

После напоминания этой простой конструкции определим в соответствии с (75) нижнюю треугольную матрицу $\mathcal{B} = \left(b_{j,k}\right)_{j,k=0}^{l}$, где $b_{j,k} = 0$ при $j < k$, а при $j \geq k$ этот оператор задается равенством

$$N_{-1}^{\hat{\otimes} k} \ni \alpha^k \mapsto b_{j,k}\alpha^k = \frac{j!}{n!(j-k)!} \beta^{j-k} \hat{\otimes}\, \alpha^k \in N_{-1}^{\hat{\otimes} j}. \quad (79)$$

Каждый оператор (79) ограничен, поэтому ограничен и оператор $B: N_- \to N_-$, отвечающий матрице $\mathcal{B}$.

Сопряженный оператор B^+ задается верхней треугольной матрицей $\mathcal{B}^+ = \left(b_{j,k}^+\right)_{j,k=0}^{l}$, элементы которой указанным выше образом подсчитываются по (79). Из (79) следует, что $\forall\, j \;\; b_{j,j} = id$, поэтому и $b_{j,j}^+ = id$. Но тогда из треугольности матрицы $\mathcal{B}^+$ вытекает, что уравнение $B^+\varphi = \psi$ относительно $\varphi = (\varphi^0, \ldots, \varphi^l) \in N_+$ при любом $\psi \in N_+$ разрешимо, причем φ непрерывно зависит от ψ. Таким образом, $\exists\, (B^+)^{-1}: N_+ \to N_+$.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы. Предположим, что пространства $H^{n,P}(1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, линейно зависимы: существуют $l \in \mathbb{Z}_+$, такие $a^j \in N_1^{\hat{\otimes} j}$, $j = 0, \ldots, l$, и не все равные нулю числа $c_0, \ldots, c_l \in \mathbb{C}^1$, что

$$\sum_{j=0}^{l} c_j \langle P_j(x), a^j \rangle = 0$$

в пространстве $H_0 = L_2(Q, d\rho(x))$. Т. е. в этом пространстве

$$\sum_{j=0}^{l} \langle P_j(x), \varphi^j \rangle = 0, \tag{80}$$

где $\varphi^j = c_j a^j \in N_1^{\hat{\otimes} j}$ не все равны нулю. Из слабой непрерывности характеров Аппеля следует непрерывность левой части в (80), а так как мера ρ положительна на открытых множествах, то (80) влечет такое же равенство $\forall\, x \in Q$.

Зафиксируем $x \in Q$ и заметим, что (75) может быть переписано в силу (79) в виде

$$P_j(x) = \sum_{k=0}^{l} b_{j,k} \chi_k(x), \quad j = 0, \ldots, l.$$

Подставляя эти выражения в (80), находим

$$0 = \sum_{j=0}^{l} \langle P_j(x), \varphi^j \rangle = \sum_{j,k=0}^{l} \langle b_{j,k}\chi_k(x), \varphi^j \rangle =$$

$$= \sum_{j,k=0}^{l} \langle \chi_k(x), b_{k,j}^+ \varphi^j \rangle = \sum_{k=0}^{l} \langle \chi_k(x), \psi^k \rangle, \tag{81}$$

$$\psi^k = \sum_{j=0}^{l} b_{k,j}^+ \varphi^j \in N_1^{\hat{\otimes} k}.$$

Это равенство выполняется $\forall\, x \in Q$, т. е. в H_0. Но по предположению пространства $H^{n,\chi}(1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, линейно независимы в H_0, поэтому равенство (81) влечет равенство $\psi^0 = \ldots = \psi^l = 0$. Связь (81) между φ^j и ψ^k означает, что $\psi = B^+\varphi$. Но, как было показано, B^+ обратим. Поэтому $\varphi = 0$, что противоречит допущению.

8. Пространства Аппеля основных и обобщенных функций. Мы убедились, что исходные предположения п. 5 о характерах Дельсарта приводят к аналогичным фактам для характеров Аппеля. Это дает возможность строить аналогичные пп. 5, 6 пространства, но уже по характерам Аппеля. Осталось выяснить лишь наличие оценки типа (37).

Как уже говорилось, для характеров Аппеля справедлива оценка типа (26). Именно, пусть $p_2 > 1$ таково, что вложение $N_{p_2} \hookrightarrow N_1$ квазиядерно; выбрасывая пространства $N_2, \ldots, N_{p_2-1}$, сразу *будем считать* $p_2 = 2$. *Тогда* $\forall\, x \in Q$

$$\| P_n(x) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} \le \frac{n^n \| O_{2,1} \|_{HS}^n}{r^n} \max_{\|\lambda\|_{N_1} = 1} |\sigma(x, \lambda)|, \quad r \in (0, R^1), \; n \in \mathbb{N}. \tag{82}$$

Доказывается эта оценка так же, как и (26).

В дальнейшем при построении пространств по характерам Аппеля значение $p = 2$ и соответствующие пространства $N_2^{\hat{\otimes} n}$ и $N_{-2}^{\hat{\otimes} n}$ будут играть ту же роль, что и $p = 1$ в случае характеров Дельсарта. В связи с этим отметим, что из сказанного в п. 7 и леммы 9 вытекает: *пространства* $H^{n,P}(2)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *линейно независимы и их линейная оболочка плотна в* H_0. Далее, справедлива следующая лемма.

Лемма 10. *Справедлива оценка*

$$\exists\, D > 0 : \left\| \| P_n(\cdot) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} \right\|_{H_0} \le D^n n!, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{83}$$

Доказательство. С учетом равенств (73), (74) и $\chi(e, \lambda) = 1$, из оценки (82) с помощью формулы Стирлинга следует $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\exists\, C_4 > 1$:

$$\begin{gathered} \| \beta^n \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} = \| P_n(e) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} \le C_1 C_2^n \frac{n^n}{r^n} \le C_4 \left(\frac{C_3}{r} \right)^n n!; \\ C_1 = \max_{\|\lambda\|_{N_1} \le R^1} |\hat{l}(\lambda)|^{-1}, \quad C_2 = \| O_{2,1} \|_{HS}, \quad C_3 = C_2 e, \quad r \in (0, R^1). \end{gathered} \tag{84}$$

В силу (84) из (75) получаем $\forall\, x \in Q$

$$\begin{aligned} \| P_n(x) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} &\le \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \| \beta^{n-m} \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \| \chi_m(x) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} m}} \le \\ &\le C_4 n! \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\frac{C_3}{r} \right)^{n-m} \| \chi_m(x) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} m}} \le \\ &\le C_4 \left(\frac{C_3}{r} \right)^n n! \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\frac{r}{C_3} \right)^m \| \chi_m(x) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} m}} \le \\ &\le C_4 \left(\frac{C_3}{r} \right)^n n! \left(\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r}{C_3} \right)^m \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r}{C_3} \right)^m \frac{1}{(m!)^2} \| \chi_m(x) \|^2_{N_{-2}^{\hat{\otimes} m}} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Возводя в квадрат это неравенство и интегрируя по $d\rho(x)$, с помощью (37), где $-p_1$ заменено на -2, находим

$$\int_Q \| P_n(x) \|^2_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} d\rho(x) \le C_4^2 \left(\frac{C_3}{r} \right)^{2n} (n!)^2 \left(\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r}{C_3} \right)^m \right) \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r C^2}{C_3} \right)^m \tag{85}$$

(поясним, что (37) предполагается выполненным при $-p_1 = -1$, но так как $\| \cdot \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} \le \| \cdot \|_{N_{-1}^{\hat{\otimes} n}}$, то оно имеет место и при $-p_1 = -2$).

Выбирая $r \in (0, R^1)$ столь малым, чтобы $r < \min\{C_3, C_3 C^{-2}\}$, и заменяя в (85) суммы рядами до $n = \infty$, получаем $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_Q \| P_n(x)\|^2_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}} d\rho(x) \le D^{2n}(n!)^2, \quad D = \frac{C_4 C_3^3}{r(C_3 - r)(C_3 - C^2 r)}.$$

Таким образом, можно повторить конструкцию п. 5, заменяя $\chi_n(x)$ на $P_n(x)$ и считая $p = 2, 3, \ldots, q \in \mathbb{N}$. Вместо пространств (40) при фиксированном $K > 1$ возникают пространства

$$H^P(p, q) = \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(x), \varphi^n \in H^{n,P}(p) \,\Big|\, \|\varphi\|_{H^P(p,q)} = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \left\|\varphi^n\right\|^2_{H^{n,P}(p)} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}, \tag{86}$$

где φ^n и $H^{n,P}(p)$ определяются формулами (77). Как и в случае характеров Дельсарта, каждое пространство $H^P(p, q)$ плотно в H_0.

Аналог леммы 3 здесь сохраняется: *при* $K > 1$ *достаточно большом пространство* $H^P(2, 1) \subseteq C_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$, *т. е. состоит из непрерывных локально ограниченных функций на* Q. *Для каждого шара* $U \subset Q$

$$\exists\, B_U > 0: \ |\varphi(x)| \le B_U \|\varphi\|_{H^P(2,1)}, \quad x \in U, \quad \varphi \in H^P(2, 1). \tag{87}$$

Доказательство этого факта ничем не отличается от доказательства леммы 3, нужно только воспользоваться (77) и (82) вместо (39) и (26).

Лемма 4 справедлива также. Поэтому имеется плотное непрерывное вложение $H^P(2, 1) \subset H_0$ и можно строить соответствующие цепочки пространств. Выбор константы K подобен указанному в п. 5:

$$K > \max\left\{1, D^2, \|O_{2,1}\|^2_{HS} e^2 (R^1)^{-2}\right\}.$$

Мы сейчас не будем выписывать соотношений типа (44) для пространств $H^P(p, q)$, они выглядят совершенно аналогично (44). Эти соотношения будут приведены ниже, в общей теореме типа теоремы 2 для пространств $H^P(p, q)$ и им сопряженных.

Приведем важный результат о связи пространств $H^\chi(p, q)$ и $H^P(p, q)$. Константа $K > 1$, фигурирующая в определении этих пространств, берется общей для них.

Отметим прежде всего формулы для пересчета коэффициентов a^n при записи функций в виде сумм (38) и (77). Так, рассмотрим конечную сумму функций $\varphi^n(x) = \langle P_n(x), a^n \rangle$ вида (77), подставим сюда выражение (75) для $P_n(x)$ и воспользуемся равенствами (46). В результате получим

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n(x), a^n \rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\langle \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \beta^{n-m} \hat{\otimes} \chi_m(x), a^n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \left\langle \beta^{n-m} \hat{\otimes} \chi_m(x), a^n \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left\langle \chi_m(x), \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m_{\beta^{n-m}} \right\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \left\langle \chi_m(x), \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m_{\beta^{n-m}} \right\rangle.$$

Таким образом, $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$ конечная сумма имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n(x), a^n \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle \chi_m(x), b^m \rangle,$$

$$b^m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m_{\beta^{n-m}} \in N_p^{\hat{\otimes} m}; \tag{88}$$

$$\left\| a^m_{\beta^{n-m}} \right\|_{N_p^{\hat{\otimes} m}} \le \left\| \beta^{n-m} \right\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \left\| a^n \right\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}.$$

Аналогичная формула имеет место при переходе от конечных сумм (38) к суммам (77) нужно воспользоваться (38), (76) и (46): $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $\forall\, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \chi_n(x), a^n \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \langle P_m(x), b^m \rangle,$$

$$b^m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m_{\alpha^{n-m}} \in N_p^{\hat{\otimes} m}; \tag{89}$$

$$\left\| a^m_{\alpha^{n-m}} \right\|_{N_p^{\hat{\otimes} m}} \le \left\| \alpha^{n-m} \right\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \left\| a^n \right\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}.$$

В (89) $\alpha^j \in N_{-p}^{\hat{\otimes} j}$ — коэффициенты разложения (68).

Теорема 3. *Существует* $t \in \mathbb{Z}_+$ *такое, что* $\forall\, p = 2, 3, \ldots$ *и* $\forall\, q \in \mathbb{N}$ *справедливы плотные непрерывные вложения*

$$H^{\chi}(p, q+t) \hookrightarrow H^{P}(p, q), \qquad H^{P}(p, q+t) \hookrightarrow H^{\chi}(p, q). \tag{90}$$

Нормы операторов вложений (90) *не превышают некоторого числа, зависящего лишь от меры* ρ *и функционала* l.

Доказательство. Установим второе вложение в (90).

Зафиксируем некоторое $t \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n \in H^{P}(p, q+t),$$

где лишь конечное число функций $\varphi^n(x) = \langle P_n(x), a^n \rangle$, $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$, отлично от нуля. Оценим $\|\varphi\|_{H^{\chi}(p,q)}$. Согласно (88)

$$\|\varphi\|^2_{H^{\chi}(p,q)} = \sum_{m=0}^{\infty} \|b^m\|^2_{N_p^{\hat{\otimes} m}} (m!)^2 K^{qm} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left\| \sum_{n=m}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} a^m_{\beta^{n-m}} \right\|^2_{N_p^{\hat{\otimes} m}} (m!)^2 K^{qm} \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^2 K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{\infty}\frac{n!}{m!(n-m)!}\|\beta^{n-m}\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}}\|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes}n}}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{\infty}(m!)^2 K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{\infty}\|a^n\|^2_{N_p^{\hat{\otimes}n}}(n!)^2K^{(q+t)n}\right)\left(\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\|\beta^{n-m}\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}}}{(m!(n-m)!)^2K^{(q+t)n}}\right)^2 \le$$

$$\le \|\varphi\|^2_{H^p(p,q+t)}\sum_{m=0}^{\infty}K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\|\beta^{n-m}\|^2_{N_{-2}^{\hat{\otimes}(n-m)}}}{((n-m)!)^2K^{(q+t)n}}\right).$$

Оценим теперь $\|\beta^{(n-m)}\|_{N_{-2}^{\hat{\otimes}(n-m)}}$ посредством неравенства (84), следующего из (82). В результате получаем $\forall\, r\in(0,R^1)$

$$\|\varphi\|^2_{H^{\chi}(p,q)} = \|\varphi\|^2_{H^p(p,q+t)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}C_4^2(C_3r^{-1})^{2(n-m)}K^{-(q+t)n+qm} =$$

$$= C_4^2\|\varphi\|^2_{H^p(p,q+t)}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\left((C_3r^{-1})^2K^{-(q+t)}\right)^{n-m}K^{-tm} =$$

$$= C_4^2\|\varphi\|^2_{H^p(p,q+t)}\sum_{m=0}^{\infty}K^{-tm}\sum_{n=0}^{\infty}\left((C_3r^{-1})^2K^{-(q+t)}\right)^{n}. \tag{91}$$

Зафиксируем r и выберем $t\in\mathbb{Z}_+$ столь большим, чтобы $C_5=(C_3r^{-1})^2K^{-t}<1$. Тогда $K^{-t}<1$ и $\forall\, q\in\mathbb{Z}_+$ $(C_3r^{-1})^2K^{-(q+t)}=C_5K^{-q}<C_5<1$. Суммируя ряды в правой части (91), получаем

$$\|\varphi\|^2_{H^{\chi}(p,q)} \le C_4^2\frac{K^t}{K^t-1}\frac{1}{1-C_5K^{-q}}\|\varphi\|^2_{H^p(p,p+t)}. \tag{92}$$

Неравенство (92) влечет второе вложение в (90), а из вида константы в (92) следует высказанное утверждение о норме оператора вложения.

Первое вложение в (90) доказывается аналогично. При этом нужно воспользоваться формулами (89) и оценивать

$$\|\alpha^{n-m}\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \le \|\alpha^{n-m}\|_{N_{-2}^{\hat{\otimes}(n-m)}}$$

следующим образом. Коэффициенты $\alpha^n\in N_{-1}^{\hat{\otimes}n}$ определяются из разложения (68) при $p=1$ подобно $\chi_n(x)$ или $P_n(x)$ из разложений (21) и (73) соответственно. Поэтому может быть повторен вывод оценки (26), (82), которая выглядит сейчас следующим образом:

$$\|\alpha^n\|_{N_{-2}^{\hat{\otimes}n}} \le \frac{n^n\|O_{2,1}\|^2_{HS}}{r^n}\max_{\|\lambda\|_{N_1}=r}|\hat{l}(\lambda)|,\quad r\in(0,R^1),\ r\in\mathbb{N}. \tag{93}$$

Из (93) вытекает аналог неравенства (84): зафиксируем $R\in(0,R^1)$, тогда $\forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, C_4>1$:

$$\|\alpha^n\|_{N_{-2}^{\hat{\otimes}n}} \le C_4\left(\frac{C_3}{r}\right)^n n!,\qquad C_3 = e\|O_{2,1}\|_{HS},\quad e,r\in(0,R). \tag{94}$$

Неравенство (94) позволяет повторить вывод (91) и получить оценку типа (92): $\|\varphi\|^2_{H^P(p,q)} \le C_6 \|\varphi\|^2_{H^\chi(p,q+t)}$, где C_6 имеет вид коэффициента в (92) с достаточно большим $t \in \mathbb{Z}_+$. Затем нужно взять максимальное t из (92) и последнего неравенства.

***Замечание* 5.** *В классическом случае функционала* $l = 1$ характеры Аппеля $P_n(x)$ можно определять из разложения типа (21):

$$\exists R^1 > 0 : \sigma(x, \lambda) = \frac{\chi(x, \lambda)}{\hat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle,$$
$$\hat{\rho}(\lambda) = \hat{l}(\lambda) = \int_Q \chi(x, \lambda)\, d\rho(x), \quad \lambda \in N_{p_0}, \quad \|\lambda\|_{N_{p_0}} \le R^1; \; x \in Q. \tag{95}$$

Для разложения (95) можно повторить все, связанное с построением характеров Дельсарта на основании (21), и тем самым ввести „классические" характеры Аппеля непосредственно, не прибегая к интерпретации функционала $l = 1$ как функционала над $H^\chi(1, 1)$. *Это позволяет получить оценки* (82) *и* (83) *с заменой пространства* N_{-2} *на* N_{-1}. *Поэтому для* $l = 1$ *пространства* $H^P(p, q)$ (86) *можно вводить и для* $p = 1$, $H^P(1, 1) \subseteq C_{\mathrm{loc}\, b}(Q)$, *а теорема* 3 *сохраняется для* $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$.

Перейдем к рассмотрению пространств обобщенных функций $H^P(p, q) = = (H^P(p, q))'$ со спариванием $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ и соответствующих кохарактеров. Удобнее начать со случая классических характеров Аппеля, отвечающих $l = 1$, и пользоваться замечанием 5. Таким образом, пространство $H^P(p, q)$ определено посредством (86) при $p, q \in \mathbb{N}$.

Отметим прежде всего, что операция $\partial(\alpha^m)$, определенная посредством (45) на линейных комбинациях функций $\langle \chi_n(x), a^n \rangle$, а значит, и на функциях $\langle P_n(x), a^n \rangle$, действует на последних аналогичным (45) образом. Именно: $\forall\, x \in Q$ *справедливы равенства:*

$$\partial(\alpha^m)\langle P_n(x), a^n \rangle = \frac{n!}{(n-m)!} \left\langle \alpha^m \hat{\otimes} P_{n-m}(x), a^n \right\rangle, \quad m \le n,$$
$$\partial(\alpha^m)\langle P_n(x), a^n \rangle = 0, \quad m > n;$$
$$\alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}, \quad m, n \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in \mathbb{N} \tag{96}$$
$$(P_n(x) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n} \subseteq N_{-p}^{\hat{\otimes} n}).$$

В самом деле, пусть $m \le n$. В силу (75), (46) и (45) имеем $\forall\, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$, $\forall\, x \in Q$

$$\partial(\alpha^m)\langle P_n(x), a^n \rangle = \partial(\alpha^m) \left\langle \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \beta^{n-k} \hat{\otimes} \chi_k(x), a^n \right\rangle =$$
$$= \partial(\alpha^m) \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \langle \chi_k(x), a^k_{\beta^{n-k}} \rangle =$$
$$= \sum_{k=m}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k!}{(k-m)!} \langle \alpha^m \hat{\otimes} \chi_{k-m}(x), a^k_{\beta^{n-k}} \rangle =$$

$$= n! \sum_{l=0}^{n-m} \frac{1}{l!(n-m-l)!} \langle \beta^{n-m-l} \hat{\otimes} \alpha^m \hat{\otimes} \chi_l(x), a^n \rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{l=0}^{n-m} \frac{(n-m)!}{l!(n-m-l)!} \langle \beta^{n-m-l} \hat{\otimes} \chi_l(x), a_{\alpha^m}^{n-m} \rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} \langle P_{n-m}(x), a_{\alpha^m}^{n-m} \rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} \langle \alpha^m \hat{\otimes} P_{n-m}(x), a^n \rangle.$$

В случае $m > n$ эти же выкладки и вторая формула в (45) дают $\partial(\alpha^m)\langle P_n(x), a^n \rangle = 0$.

Таким образом, сейчас сохраняется аналог формулы (48) с заменой $\chi_n(x)$ на $P_n(x)$ и, следовательно, лемма 5: *в каждом пространстве* $H^P(p, q)$, p, $q \in \mathbb{N}$, *оператор* $\partial(\alpha^m)$, *где* $\alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{N}$, *действует непрерывно (его норма не превышает* $\|\alpha^m\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} m}} K^{-qm/2}$*)*. Разумеется, он определен в проективном пределе этих пространств.

Сопряженный относительно $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ оператор $\partial^+(\alpha^m)$ действует непрерывно в негативном пространстве $H^P(-p, -q)$ и подобно (50) можно ввести кохарактер Аппеля с коэффициентом $\alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}$:

$$Q(\alpha^m) = \partial^+(\overline{\alpha^m}) 1 \in H^P(-p, -q), \quad p, q \in \mathbb{N}, \tag{97}$$

где функция $1 \in H_0 \subseteq H^P(-p, -q)$. Покажем, что, как и в случае характеров Дельсарта, кохарактеры (97) дают возможность более явно описать пространства обобщенных функций $H^P(-p, -q)$.

В соответствии с (86) подобно (44) справедливы следующие соотношения для классических характеров Аппеля: $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$, $\exists\, t \in \mathbb{Z}_+$

$$H^P(p, q) = \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(x), \varphi^n \in H^{n,P}(p) \,\middle|\, \|\varphi\|^2_{H^P(p,q)} = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi^n\|^2_{H^{n,P}(p)} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} =$$

$$= \left\{ \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle P_n(x), a^n \rangle, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n} \,\middle|\, \|\varphi\|_{H^P(p,q)} = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \|a^n\|^2_{N_p^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\};$$

$$\Phi^P = \operatorname*{prlim}_{p,q \in \mathbb{N}} H^P(p, q) = \bigcap_{p,q \in \mathbb{N}} H^P(p, q), \tag{98}$$

$$(\Phi^P)' = \operatorname*{indlim}_{p,q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q) = \bigcup_{p,q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q),$$

$$H^P(-p, -q) = (H^P(p, q))',$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(\Phi^P)' \supset \ldots \supset H^P(-p,-q) \supset \ldots \supset & H_0 & \supset \ldots \supset H^P(p,q) \supset \ldots \supset \Phi^P \\
\| & \| & \| \\
(\Phi^\chi)' \supset \ldots \supset H^\chi(-p,-q) \supset \ldots \supset & H_0 & \supset \ldots \supset H^\chi(p,q) \supset \ldots \supset \Phi^\chi \\
\| & & \| \\
\Phi' & & \Phi
\end{array}
$$

$$H^\chi(p, q+t) \subsetneq H^P(p,q), \quad H^P(p,q+t) \subsetneq H^\chi(p,q);$$

$$H^P(-p,-q) \subsetneq H^\chi(-p, -(q+t)),$$

$$H^\chi(-p,-q) \subsetneq H^P(-p, -(q+t)).$$

Последние два вложения написаны на основании теоремы 3, эти вложения влекут равенства $\Phi^P = \Phi^\chi$, $(\Phi^P)' = (\Phi^\chi)'$ в (98). Число $t \in \mathbb{Z}_+$ не зависит от p, q но зависит от K и меры ρ.

Теорема 4. *Негативное пространство $H^P(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, обобщенных функций в случае классических характеров Аппеля имеет вид*

$$H^P(-p,-q) = \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n, \xi^n \in H^{-n,P}(p,q) \,\middle|\, \|\xi\|^2_{H^P(-p,-q)} = \right.$$

$$\left. = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi^n\|^2_{H^{-n,P}(-p)} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}, \tag{99}$$

$$H^{-n,P}(-p) = (\mathbf{I}^P(p,q))^{-1} H^{n,P}(p),$$

$$\|\xi^n\|_{H^{-n,P}(-p)} = \|\mathbf{I}^P(p,q)\xi^n\|_{H^{n,P}(p)},$$

где $\mathbf{I}^P(p,q)$ — оператор $\mathbf{I}$, связанный с цепочкой

$$H^P(-p,-q) \supset H_0 \supset H^P(p,q). \tag{100}$$

При $p = 2, 3, \ldots$ элементарные обобщенные функции ξ^n также совпадают с точностью до множителей с кохарактерами Аппеля (97)*. Именно*:

$$\xi^n = n!\, K^{qn} Q(\alpha^n), \quad \alpha^n = (I_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} a^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}, \tag{101}$$

где $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$ определяются из равенства $\mathbf{I}^P(p,q)\xi^n = \langle P_n(\cdot), a^n \rangle$; при этом

$$\|\xi^n\|_{H^{-n,P}(-p)} = \|\alpha^n\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{102}$$

Доказательство. Представления (99), (100) вытекают из общей формулы (4) и (14).

Для доказательства (101), (102) нужно повторить доказательство леммы 6, используя (96) вместо (45), и соответствующей части теоремы 2. При этом вместо соотношения (51), которое существенно для доказательства этой леммы, нужно убедиться в равенстве (см. (53)) : $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \le n$, $\forall\, p = 2, 3, \ldots$

$$\int_Q 1 \cdot \overline{\langle \overline{\alpha^m} \,\hat{\otimes}\, P_{n-m}(x), a^n \rangle}\, dx = \delta_{n,m} \left\langle \alpha^m, \overline{a^n} \right\rangle, \quad \alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}. \tag{103}$$

Равенство (103) вытекает из следующей леммы, которую мы докажем несколько ниже.

Лемма 11. *Справедливо равенство*

$$\int_Q 1 \cdot \overline{\langle P_n(x), a^n \rangle}\, d\rho(x) = \delta_{n,0}\, \overline{a^0}, \tag{104}$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad p = 2, 3, \ldots, \quad \forall\, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n} \quad (N_p^0 = \mathbb{C}^1).$$

Выведем (103) из (104). Благодаря равенству (47) при $m \le n$

$$\langle \overline{\alpha^m} \,\hat{\otimes}\, P_{n-m}(x), a^n \rangle = \langle P_{n-m}(x), a_{\overline{\alpha^m}}^{n-m} \rangle,$$

поэтому для $m < n$ (103) вытекает из (104). В случае $m = n$ имеем: комплексное число

$$a_{\overline{\alpha^m}}^0 = a_{\overline{\alpha^n}}^0 = \langle 1, a_{\overline{\alpha^n}}^0 \rangle = \langle \overline{\alpha^n}, a^n \rangle,$$

поэтому (104) при $n = 0$ дает (103) при $n = m$.

Итак, (103) имеет место. Поэтому справедлив аналог леммы 6: $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}_+$

$$\langle\langle Q(\alpha^m), \langle P_n(\cdot), a^n \rangle \rangle\rangle = \delta_{n,m}\, n!\, \langle \alpha^n, \overline{a^n} \rangle, \quad \alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}. \tag{105}$$

Завершается доказательство точно так же, как и доказательство теоремы 2, нужно только вместо (52) использовать (105).

Доказательство леммы 11. Прежде всего заметим, что при $\lambda \in N_2 \subset N_{p_0}$, $\| \lambda \|_{N_2} < d = \min\{R^1, D^{-1}\}$, где D взято из (83), ряд (95) сходится в пространстве H_0. Более того, для указанного λ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \| \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(\cdot) \rangle \|_{H_0} < \infty.$$

В самом деле, с помощью (83) получаем

$$\| \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(\cdot) \rangle \|_{H_0}^2 = \int_Q |\langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle|^2 d\rho(x) \le$$

$$\le \int_Q \| \lambda^{\otimes n} \|_{N_2^{\hat{\otimes} n}}^2 \| P_n(x) \|_{N_{-2}^{\hat{\otimes} n}}^2 d\rho(x) \le \| \lambda \|_{N_2}^{2n} D^{2n} (n!)^2,$$

откуда и следует сходимость последнего ряда для указанных λ.

Но и тогда для этих λ ниже можно поменять местами интегрирование и суммирование, и мы получим

$$1 = \int_Q \frac{\chi(x, \lambda)}{\hat{\rho}(\lambda)} d\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_Q \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle\, d\rho(x). \tag{106}$$

Подставляя сюда $\lambda = ze$, где e — орт пространства N_2, $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| < d$, заключаем, что

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_Q \langle e^{\otimes n}, P_n(x) \rangle\, d\rho(x), \quad |z| < d, \tag{107}$$

откуда

$$\int_Q P_0(x)\, d\rho(x) = 1,$$

т. е. (104) при $n = 0$ справедливо. Далее, из (107) имеем

$$\int_Q \langle e^{\otimes n}, P_n(x)\rangle \, d\rho(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это равенство, поляризационное тождество и линейность приводят к тому, что

$$\int_Q \langle b^n, P_n(x)\rangle \, d\rho(x) = 0$$

для плотного $N_p^{\hat{\otimes} n}$, $p = 2, 3, \ldots$, множества векторов b^n. Аппроксимируя такими векторами b^n произвольное $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$ в этом пространстве и переходя к пределу под знаком интеграла, получаем (104) при $n \in \mathbb{N}$. Переход к пределу возможен благодаря оценке: $\forall\, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$

$$\left| \int_Q \langle a^n, P_n(x)\rangle \, d\rho(x) \right| \le \|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}} \int_Q \|P_n(x)\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} \, d\rho(x) \le \|a^n\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}} D^n n!.$$

Как и в случае характеров Дельсарта, сейчас могут быть выписаны и координатные формулы типа (61) – (64): $\forall\, p = 2, 3, \ldots$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$

$$H^P(-p,-q) = \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} Q(\alpha^n)\, n! K^{qn} \;\middle|\; \|\xi\|^2_{H^P(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}; \tag{108}$$

$\forall\, \xi \in H^P(-p,-q)$, $\forall\, \varphi \in H^P(p,q)$ в виде (98):

$$\langle\langle \xi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha^n, \overline{a^n} \rangle (n!)^2 K^{qn}. \tag{109}$$

Сделав замену переменных в координатах обобщенной функции $\xi \in H^P(-p,-q)$: $N_{-p}^{\hat{\otimes} n} \ni \alpha^n \mapsto \beta^n = n!\, K^{qn} \alpha^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}$, перепишем (108) и (109) в виде: $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$

$$H^P(-p,-q) = \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} Q(\beta^n) \;\middle|\; \|\xi\|^2_{H^P(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\beta^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \right\},$$
$$\langle\langle \xi, \varphi \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \beta^n, \overline{a^n} \rangle n!. \tag{110}$$

Выясним теперь, какие изменения нужно внести в предыдущие результаты в случае замены классических характеров Аппеля, отвечающих функционалу $l = 1$, на общие, когда $l \in H^{\chi}(-1,-1)$, $\hat{l}(0) = l(1) \ne 0$.

Как уже говорилось, в связи с необходимостью оценки (83) пространства $H^P(p,q)$ (86) нужно сейчас рассматривать при $p = 2, 3, \ldots$ и $q \in \mathbb{N}$; для этих значений индексов формулы (98), очевидно, сохраняются.

При определении кохарактеров Аппеля в (97) 1 нужно заменить на $l \in$

$\in H^{\chi}(-1,-1)$ и интерпретировать его как элемент из некоторого $H^P(-p,-q)$ (при этом $p = 2, 3, \ldots$). В силу теоремы 3 $\forall q \in \mathbb{N}$ $H^P(2, q+t) \subsetneq \subsetneq H^{\chi}(2, q) \subsetneq H^{\chi}(1, 1)$, поэтому $l \in H^{\chi}(-1,-1) \subset H^P(-2,-(q+t))$. Таким образом, кохарактер Аппеля с коэффициентом $\alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}$ вводится равенством

$$
\begin{gathered}
Q(\alpha^m) = \partial^+(\overline{\alpha^m})\, l \in H^P(-p,-(q+t)), \\
l \in H^P(-2,-(q+t)), \quad p = 2, 3, \ldots, \quad q \in \mathbb{N}.
\end{gathered} \tag{111}
$$

Поясним, что аналог леммы 5 сохраняется и каждый оператор $\partial(\alpha^m)$, $\alpha^m \in \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{N}$, действует непрерывно в пространстве $H^P(p, q)$, $p = 2, 3, \ldots$, $q \in \mathbb{N}$. Поэтому в (111) $Q(\alpha^m) \in H^P(-p,-(q+t))$.

Теорема 5. *Для общих характеров Аппеля теорема* 4 *и все соотношения* (108) – (110) *сохраняются при* $p = 2, 3, \ldots$ *и* $q = 1+t, 2+t, \ldots$, *где* $t \in \mathbb{Z}_+$ *определено в теореме* 3 *и зависит лишь от меры* ρ *и функционала* l. *Соотношения* (98), (99) *сохраняются при* $p = 2, 3, \ldots$ *и* $q \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Оно остается прежним, нужно лишь вместо равенства (104) убедиться в справедливости равенства: $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}_+$, $p = 2, 3, \ldots$

$$
l\left(\left\langle \overline{\alpha^m} \,\hat{\otimes}\, P_{n-m}(x), a^n \right\rangle\right) = \delta_{n,m}(\alpha^m, \overline{a^n}), \quad \alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}. \tag{112}
$$

Как и при доказательстве теоремы 4,

$$
\left\langle \overline{\alpha^m} \,\hat{\otimes}\, P_{n-m}(x), a^n \right\rangle = \left\langle P_{n-m}(x), a_{\overline{\alpha^m}}^{n-m} \right\rangle
$$

и равенство (112) сводится к следующему аналогу леммы 11:

$$
l\left(\left\langle P_n(x), a^n \right\rangle\right) = \delta_{n,0}\, \overline{a^0}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p = 2, 3, \ldots, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}. \tag{113}
$$

Для проверки (113) сформулируем в виде леммы, которая нам понадобится в дальнейшем, один простой факт, аналогичный лемме 7 (его доказательство приведем чуть ниже).

Лемма 12. *Пусть* $p, q \in \mathbb{N}$. *При* $\lambda \in N_p$, $\|\lambda\|_{N_p} < R^{1,q} = \min\{K^{-q/2}, R^1\}$, *функция* (73) $\sigma(\cdot, \lambda) \in H^P(p, q)$;

$$
\|\sigma(\cdot, \lambda)\|_{H^P(p,q)} = (1 - \|\lambda\|_{N_p}^2 K^{q/2})^{-1/2}. \tag{114}
$$

Докажем (113), а значит, и теорему. Из леммы 12 следует, что ряд (73) при указанном в этой лемме λ сходится в пространстве $H^P(p, q)$. Функционал $l \in \in H^P(-2,-(q+t))$, поэтому его можно почленно применять к (73) и мы получаем

$$
1 = l\left(\overline{\frac{\chi(\cdot, \lambda)}{\hat{l}(\lambda)}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, l\left(\overline{\left\langle \lambda^{\otimes n}, P_n(\cdot) \right\rangle}\right), \quad \|\lambda\|_{N_2} < R^{1,q+t}.
$$

Отсюда, как и в (106), (107), заключаем, что $l(\overline{P_0(\cdot)}) = 1$ и $l\left(\overline{\left\langle e^{\otimes n}, P_n(\cdot) \right\rangle}\right) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, где e — произвольный орт пространства N_2.

Первое из этих равенств приводит к (113) при $n = 0$, а второе дает $l\left(\overline{\left\langle b^n, P_n(\cdot) \right\rangle}\right) = 0$, для плотного в $N_p^{\hat{\otimes} n}$ множества векторов b^n. Аппроксимируя в $N_p^{\hat{\otimes} n}$ векторами b^n произвольный вектор a^n этого пространства и переходя к пределу, получаем (113) при $n \in \mathbb{N}$. Переход к пределу возможен, так как $l \in H^P(-2, -(q+t))$, а $\left\| \overline{\langle a^n, P_n(\cdot) \rangle} \right\|_{H^P(-2,-(q+t))} = \| a^n \|_{N_p^{\hat{\otimes} n}}$.

Доказательство леммы 12. В соответствии с (86), (98), (73) и (40), (44), (21) норма в пространстве $H^P(p, q)$ функции $\sigma(\cdot, \lambda)$ такая же, как норма в пространстве $H^\chi(p, q)$ функции $\chi(\cdot, \lambda)$. Поэтому доказательство этой леммы следует из доказательства леммы 7.

9. C-преобразование. Сравнение формул (98) и (44) для пространств $H^P(p, q)$ и $H^\chi(p, q)$ показывает, что эти пространства становятся изоморфными, если $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ положить $\langle P_n(x), a^n \rangle \leftrightarrow \langle \chi_n(x), a^n \rangle$, $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$. Оказывается, этот изоморфизм имеет простой аналитический вид. Найдем его, ограничиваясь пока случаем классических характеров Аппеля, т. е. когда функционал $l = 1$.

C-преобразованием называется оператор, действующий на непрерывных функциях $f \in C(Q)$ следующим образом:

$$(Cf)(x) = \int_Q (T_x f)(y)\, d\rho(y), \quad x \in Q. \tag{115}$$

Мы ниже выясним, что оператор (115) определен на функциях из пространства $H^P(p, q) \subset C(Q)$ и является упомянутым изоморфизмом.

Теорема 6. *Для* $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ *в случае классических характеров Аппеля* C-*преобразование* (115) *является унитарным оператором, переводящим* $H^P(p, q)$ *в* $H^\chi(p, q)$. *При этом характеры Аппеля переходят в характеры Дельсарта в следующем смысле*:

$$\big(C\langle P_n(x), a^n \rangle\big)(x) = \langle \chi_n(x), a^n \rangle, \quad x \in Q, \quad a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}. \tag{116}$$

Доказательство. Из определений (98), (44) пространств $H^P(p, q)$, $H^\chi(p, q)$ следует, что для доказательства теоремы достаточно установить формулу (116).

На формальном уровне типа рассуждений (32) эта формула устанавливается весьма просто: применим к разложению (95) оператор T_x и пронесем его через знаки суммы и $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Тогда $\forall\, x, y \in Q$

$$\frac{\chi(x, \lambda)\, \chi(y, \lambda)}{\hat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, (T_x P_n(\cdot))(y) \rangle.$$

Интегрируя это равенство относительно $d\rho(y)$ и пользуясь разложением (21), находим при $\| \lambda \|_{N_{p_0}}$ достаточно малом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\langle \lambda^{\otimes n}, \int_Q (T_x P_n(\cdot))(y)\, d\rho(y) \right\rangle = \int_Q \frac{\chi(x, \lambda)\, \chi(y, \lambda)}{\hat{\rho}(\lambda)}\, d\rho(y) =$$

$$= \chi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle,$$

откуда благодаря произвольности λ

$$\int\limits_Q (T_x P_n(\cdot))(y)\, d\rho(y) = \chi_n(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x, y \in Q. \tag{117}$$

Соотношение (117) эквивалентно (116).

Приведем строгое доказательство (116). Удобнее всего использовать следующую формулу для $(T_x P_n(\cdot))(y)$ типа (31).

Лемма 13. *Для общих характеров Аппеля справедливо равенство:* $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$

$$(T_x P_n(\cdot))(y) = \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!\, l!\, m!} \beta^k \hat{\otimes} \chi_l(x) \hat{\otimes} \chi_m(y) =$$

$$= \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!\, l!\, m!} \alpha^k \hat{\otimes} P_l(x) \hat{\otimes} P_m(y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \chi_m(x) \hat{\otimes} P_{n-m}(y), \qquad x, y \in Q, \tag{118}$$

где β^k, α^k *определяются из разложений* (71), (68).

Доказательство. Зафиксируем $x, y \in Q$; $n \in \mathbb{Z}_+$. Согласно (75) и (31) имеем:

$$(T_x P_n(\cdot))(y) = \left(T_x \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \beta^{n-r} \hat{\otimes} \chi_r(\cdot)\right)\right)(y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \beta^{n-r} \hat{\otimes} (T_x \chi_r(\cdot))(y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \beta^{n-r} \hat{\otimes} \left(\sum_{s=0}^{r} \frac{r!}{s!\,(r-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y)\right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} \frac{n!}{(n-r)!\, s!\,(r-s)!} \beta^{n-r} \hat{\otimes} \chi_s(x) \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y) =$$

$$= \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!\, l!\, m!} \beta^k \hat{\otimes} \chi_l(x) \hat{\otimes} \chi_m(y). \tag{119}$$

Первое выражение для $(T_x P_n(\cdot))(y)$ установлено.

Докажем третье. Из (119) с помощью (75) получаем требуемое:

$$(T_x P_n(\cdot))(y) = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} \left(\sum_{r=s}^{n} \frac{(n-s)!}{(n-r)!\,(r-s)!} \beta^{n-r} \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y)\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} \left(\sum_{t=0}^{n-s} \frac{(n-s)!}{t!\,(n-s-t)!} \beta^{n-s-t} \hat{\otimes} \chi_t(y)\right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} P_{n-s}(y).$$

Для доказательства второго выражения нужно в третье подставить представление (76) для $\chi_m(x)$.

Перейдем к выводу (116). Используя третье выражение $(T_x P_n(\cdot))(y)$ из (118) и равенства (30) и (47), получаем $\forall\, a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$, $\forall\, x, y \in Q$

$$(T_x \sigma P_n(\cdot), a^n\rangle)(y) = \langle (T_x P_n(\cdot))(y), a^n \rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \chi_n(x) \hat{\otimes} P_{n-m}(y), a^n \right\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \langle \chi_n(x) \hat{\otimes} P_{n-m}(y), a^n \rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \langle P_{n-m}(y), a^{n-m}_{\chi_n(x)} \rangle. \tag{120}$$

При фиксированном $x \in Q$ $\forall\, m = 0, \ldots, n$ вектор $a^{n-m}_{\chi_n(x)} \in N_p^{\hat{\otimes}(n-m)}$ и поэтому функция $Q \ni y \mapsto \langle P_{n-m}(y), a^{n-m}_{\chi_n(x)} \rangle \in \mathbb{C}^1$ входит в H_0. Но тогда согласно (120) $f(sy) = (T_x \langle P_n(\cdot), a^n \rangle)(y)$ входит в H_0, т. е. интегрируема с квадратом относительно $d\rho(y)$ и, следовательно, интегрируема. Таким образом, интеграл (115) существует и левая часть равенства (116) имеет смысл.

Само это равенство вытекает из (120) и (104):

$$\int_Q \left(T_x \langle P_n(\cdot), a^n \rangle\right)(y)\, d\rho(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \int_Q \langle P_{n-m}(y), a^{n-m}_{\chi_n(x)} \rangle\, d\rho(y) =$$

$$= a^0_{\chi_n(x)} = \langle 1, a^0_{\chi_n(x)} \rangle = \langle \chi_n(x), a^n \rangle.$$

Отметим, что оператор (115) в пространстве H_0, т. е. в $L_2(Q, d\rho(x))$, как правило, не является ограниченным.

Из (98) и доказанной теоремы следует, что сужение C на $\Phi = \Phi^P = \Phi^\chi$ является непрерывным обратимым оператором в этом пространстве. Отсюда следует, что *сопряженный оператор* C^+ *к* C *относительно* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ *является унитарным оператором, переводящим все* $H^\chi(-p, -q)$ *во все* $H^P(-p, -q)$, $p = 2, 3, \ldots$, $q \in \mathbb{N}$, *и непрерывным обратимым в* $\Phi' = (\Phi^P)' = (\Phi^\chi)'$. Связь между C^+ и C следующая: $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$

$$\langle\langle C^+ \xi, \varphi \rangle\rangle = (C^+ \xi, \varphi)_{H_0} = (\xi, C\varphi)_{H_0} = \langle\langle \xi, C\varphi \rangle\rangle, \tag{121}$$

$$\varphi \in H^P(p, q), \quad \xi \in H^\chi(-p, -q).$$

Более того, *оператор* C^+ *переводит кохарактеры Дельсарта в кохарактеры Аппеля*:

$$C^+ \theta(\alpha^n) = Q(\alpha^n), \quad \alpha^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{122}$$

В самом деле, $\forall\, \alpha^m \in N_p^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, согласно (121), (116), (52) и (105) имеем

$$\langle\langle C^+ \theta(\alpha^n) - Q(\alpha^n), \langle P_m(\cdot), a^m \rangle \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle C^{+}\theta(\alpha^{n}), \langle P_m(\cdot), a^m\rangle\rangle\rangle - \langle\langle Q(\alpha^n), \langle P_m(\cdot), a^m\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \theta(\alpha^{n}), C\langle P_m(\cdot), a^m\rangle\rangle\rangle - \langle\langle Q(\alpha^n), \langle P_m(\cdot), a^m\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \theta(\alpha^{n}), \langle \chi_m(\cdot), a^m\rangle\rangle\rangle - \langle\langle Q(\alpha^n), \langle P_m(\cdot), a^m\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \delta_{n,m}\, n!\,\langle\alpha^n, \overline{a^n}\rangle - \delta_{n,m}\, n!\,\langle\alpha^n, \overline{a^n}\rangle = 0.$$

Но функции $\langle P_m(x), a^m\rangle$, $a^m \in N_p^{\hat{\otimes} n}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, образуют тотальное множество в H_0, поэтому из последнего равенства следует (122).

***Замечание* 6.** В формальное равенство (117) можно вложить точный смысл. Так, будем понимать $Q \ni x \mapsto \chi_n(x), P_n(x) \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n}$ как слабо непрерывные локально ограниченные функции, т. е. элементы пространства $\hat{C}^n_{\mathrm{loc}\,b}(Q)$ (при $p = 1$), а интеграл в (117) как слабый. Тогда соотношение (117) имеет место. Для доказательства нужно справа умножить (117) в смысле $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $a^n \in N_1^{\hat{\otimes} n}$ и поменять местами интеграл и $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Получим имеющее место равенство (116), поэтому и (117) справедливо.

C-преобразование в случае общих характеров Аппеля, порожденных функционалом $l \in H^{\chi}(-1,-1)$, $\hat{l}(0) \neq 0$, естественно задавать следующим обобщением формулы (115):

$$(Cf)(x) = l\left(\overline{(T_x f)(\cdot)}\right), \quad x \in Q, \tag{123}$$

где f пробегает некоторый запас функций, для которых $\forall\, x \in Q\;\; T_x f \in H^{\chi}(1,1)$. Нетрудно видеть, что и *здесь теорема* 6 *и равенство* (122) *сохраняются для* $p = 2, 3, \ldots$, $q = 1+t, 2+t, \ldots$.

В самом деле, указанные значения p, q необходимы для возможности применения теоремы 5. Сейчас формула (118) имеет место. Из нее следует $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ представление (120), показывающее, что $\forall\, x \in Q\;\; (T_x\langle P_n(\cdot), a^n\rangle)(\cdot) \in H^{P}(p,q)$. Если $p = 2, 3, \ldots$, $q = 1+t, 2+t, \ldots$, то согласно теореме 3 $H^{P}(p,q) \hookrightarrow H^{\chi}(1,1)$ и поэтому $l\left(\overline{(T_x\langle P_n(\cdot), a^n\rangle)(\cdot)}\right) = \left(C\langle P_n(\cdot), a^n\rangle\right)(x)$ имеет смысл.

Формулу (116) сейчас получаем, как и при доказательстве теоремы 6: применяем к равенству (120), над которым взята комплексная черта, функционал l и пользуемся соотношениями (113), заменяющими (104).

10. S и T-преобразования и умножение Вика. Дополнительные замечания. C-преобразование является интегральным оператором (115), переводящим характеры Аппеля в характеры Дельсарта, а его сопряженное C^{+} переводит кохарактеры Дельсарта в кохарактеры Аппеля. Другим важным интегральным оператором является S-преобразование, переводящее кохарактеры Аппеля в степени.

Так, ограничимся пока случаем классических характеров Аппеля и введем ядро $k_S(\lambda, x) = \sigma(x, \overline{\lambda})$ при $\lambda \in N_1$ (см. (95), (73)), т. е.

$$k_S(\lambda, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \overline{\lambda}^{\otimes n}, P_n(x)\rangle = \sigma(x, \overline{\lambda}) = \frac{\chi(x, \overline{\lambda})}{\hat{\rho}(\overline{\lambda})},$$

$$\lambda \in N_1, \quad \|\lambda\|_{N_1} \le R^1; \quad x \in Q, \tag{124}$$

$$\hat{\rho}(\lambda) = \int_Q \chi(x,\lambda)\, d\rho(x) = \hat{1}(\lambda).$$

S-преобразованием называется интегральный оператор с ядром (124):

$$(Sf)(\lambda) = \int_Q \overline{k_S(\lambda,x)} f(x)\, d\rho(x), \quad \lambda \in N_1, \quad \|\lambda\|_{N_1} \le R^1, \tag{125}$$

определенный на некотором множестве непрерывных функций $f \in C(Q)$.

В соответствии с леммой 12 $\forall\, p,q \in \mathbb{N}$ функция $Q \ni x \mapsto k_S(\lambda,x) \in \mathbb{C}^1$ при $\|\lambda\|_{N_p} < R^{1,q} = \min\{K^{-q/2}, R^1\}$ принадлежит пространству $H^P(p,q)$, поэтому оператор (125) можно продолжить на обобщенные функции, связанные с характерами Аппеля, полагая $\forall\, p,q \in \mathbb{N}$

$$(S\xi)(\lambda) = \langle\langle \xi, k_s(\lambda,\cdot)\rangle\rangle, \quad \xi \in H^P(-p,-q) \supseteq H_0,$$
$$\lambda \in B_p(K^{-q/2}) = \{\lambda \in N_p \mid \|\lambda\|_{N_p} < R^{1,q} = \min\{K^{-q/2}, R^1\}\}. \tag{126}$$

Действие оператора S на кохарактере Аппеля легко подсчитывается. Действительно, согласно леммам 12 и 7 ряд (124) сходится по норме пространства $H^P(p,q)$, поэтому в силу (105) имеем: $\forall\, \alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{Z}_+$,

$$(SQ(\alpha^m))(\lambda) = \left\langle\!\!\left\langle Q(\alpha^m), \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \overline{\lambda}^{\otimes n}, P_n(\cdot)\rangle \right\rangle\!\!\right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle\langle Q(\alpha^m), \langle \overline{\lambda}^{\otimes n}, P_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle = \langle \alpha^m, \lambda^{\otimes m}\rangle = \langle \lambda^{\otimes m}, \alpha^m\rangle. \tag{127}$$

Это равенство и представление (110) дают возможность подсчитать действие S на обобщенных функциях: $\forall\, \xi \in H^P(-p,-q)$

$$(S\xi)(\lambda) = \left(S\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q(\beta^n)\right)\right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (S(Q(\beta^n)))(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \beta^n\rangle;$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\beta^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} = \|\xi\|^2_{N^P(-p,-q)} < \infty; \quad \lambda \in B_p(K^{-q/2}). \tag{128}$$

Ряд в правой части (128) сходится в силу конструкции. Его равномерная сходимость при $\|\lambda\|_{N_p} \le r$, $r \in (0, R^{1,q})$, вытекает из неравенства

$$|\langle \lambda^{\otimes n}, \beta^n\rangle| \le \|\lambda^{\otimes n}\|_{N_p^{\hat{\otimes} n}} \|\beta^n\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} = \|\lambda\|^n_{N_p} \|\beta^n\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} \le$$

$$\le r^n C_1 K^{qn/2} = C_1 (rK^{q/2})^n, \quad rK^{q/2} < 1, \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

(мы воспользовались сходимостью последнего ряда в (128), $C_1 = \|\xi\|_{H^P(-p,-q)}$). Из сказанного следует, что образами обобщенных функций $\xi \in H^P(-p,-q)$ при действии S являются аналитические функции переменной $\lambda \in N_p$ в окрестности 0 с условием на коэффициенты, указанным в (128).

В связи с этим введем следующий класс аналитических функций и их ростков. Пусть $p, q \in \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное пространство $\mathrm{Hol}(N_p, q)$ аналитических функций переменной $\lambda \in N_p$ в шаре $B_p(K^{-q/2})$, имеющее вид

$$\mathrm{Hol}(N_p, q) = \left\{ f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, f^n \rangle,\ f^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n},\ \lambda \in B_p(K^{-q/2}) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \| f^n \|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \right\}. \tag{129}$$

Шары в $B_p(K^{-q/2})$ при увеличении q убывают и их радиусы стремятся к 0. Будем отождествлять две аналитические функции переменной $\lambda \in N_p$ при различных q, т. е. рассматривать ростки функций вида (129) в 0. В результате получим линейное пространство $\mathrm{Hol}_0(N_p)$ таких ростков:

$$\mathrm{Hol}_0(N_p) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \left\{ f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, f^n \rangle,\ f^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n},\ \lambda \in B_p(K^{-q/2}) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \| f^n \|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \right\}. \tag{130}$$

Из сказанного выше, (110) и (128) вытекает, что S-преобразование пространства обобщенных функций $H^P(-p, -q)$ совпадает с множеством аналитических функций (129), а пространства

$$\operatorname*{ind\,lim}_{q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q)$$

— с множеством (130). Согласно соотношениям (98)

$$\Phi' = (\Phi^P)' = \operatorname*{ind\,lim}_{p, q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{q \in \mathbb{N}} H^P(-p, -q) \right)$$

и поэтому S-образ пространства Φ' равен объединению по $p \in \mathbb{N}$ множеств (130):

$$\mathrm{Hol}_0\left(\operatorname*{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p \right) = \bigcup_{p, q \in \mathbb{N}} \left\{ f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, f^n \rangle,\ f^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n},\ \lambda \in B_p(K^{-q/2}) \,\middle|\, \sum_{n=0}^{\infty} \| f^n \|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \right\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \mathrm{Hol}_0(N_p). \tag{131}$$

Обозначение $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p)$ для последнего объединения естественно: каждая функция $f(\lambda)$ из (131) аналитична в некоторой окрестности 0, имеющей вид шара в N_p, т. е. в некоторой окрестности пространства $\mathrm{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p$. Согласно общему определению аналитичности (п. 3) $f(\lambda)$ аналитична в нуле относительно $\lambda \in \mathrm{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p$. Таким образом, (131) состоит из ростков аналитических функций переменной $\lambda \in \mathrm{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p$, т. е. равно $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p)$.

Можно топологизировать $\mathrm{Hol}(N_p, q)$, $\mathrm{Hol}_0(N_p)$ и $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p)$ посредством топологии, переносимой оператором S с пространств $H^P(-p,-q)$, $\operatorname{ind\,lim}_{q\in\mathbb{N}} H^P(-p,-q)$, $\Phi' = \operatorname{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}} H^P(-p,-q)$ соответственно. В частности, $\mathrm{Hol}(N_p, q)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g)_{\mathrm{Hol}(N_p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} (f^n, g^n)_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn}, \quad f, g \in \mathrm{Hol}(N_p, q), \tag{132}$$

а остальные два пространства — индуктивными пределами $\mathrm{Hol}(N_p, q)$.

Нетрудно установить, что пространство $\mathrm{Hol}_0(N_p)$ является алгеброй относительно обычного умножения функций.

Лемма 14. *Пространство* $\mathrm{Hol}_0(N_p)$ *является алгеброй относительно обычного сложения и умножения функций.*

Доказательство. Относительно суммы функций $f(\lambda)$, $\lambda \in B_p(K^{-q_1/2})$, и $g(\lambda)$, $\lambda \in B_p(K^{-q_2/2})$, это очевидно: пусть, например, $q_2 \ge q_1$, тогда $f(\lambda) + g(\lambda)$ хорошо определена в шаре $B_p(K^{-q_2/2})$ и для ее коэффициентов $f^n + g^n$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f^n + g^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-q_2 n} \le 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\|f^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} + \|g^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} \right) K^{-q_2 n} \le$$

$$\le 2 \sum_{n=0}^{\infty} \|f^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-q_1 n} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \|g^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-q_2 n} < \infty.$$

Таким образом, $f(\lambda) + g(\lambda)$ входит в правую часть (130).

Получим требуемую оценку для произведения $h(\lambda) = f(\lambda)\, g(\lambda)$, хорошо определенного также в шаре $B_p(K^{-q_2/2})$. Для коэффициентов h^n функции $h(\lambda)$ справедлива формула (ср. (32)): $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$

$$h^n = \sum_{m=0}^{n} f^m \hat{\otimes} g^{n-m}. \tag{133}$$

Пусть $q_3 > q_2$, как и ранее, считаем, что $q_2 \ge q_1$. С помощью (133) получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|h^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-q_3 n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{m=0}^{n} f^m \hat{\otimes} g^{n-m} \right\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-q_3 n} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \|f^m\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes} m}} \|g^{n-m}\|_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \right)^2 K^{-q_3 n} \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{\infty} K^{-q_3 n} \left(\sum_{m=0}^{n} \|f^m\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} m}} K^{-q_1 m} \right) \left(\sum_{m=0}^{n} \|g^{n-m}\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}} K^{q_1 m} \right) \le$$

$$\le \left(\sum_{m=0}^{\infty} \|f^m\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} m}} K^{-q_1 m} \right) \left(\sum_{m=0}^{n} \|g^{n-m}\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes}(n-m)}} K^{-q_2 (n-m)} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^{(-q_3 + q_2) n} \right) \le$$

$$\leq \left(\sum_{m=0}^{\infty} \|f^m\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} m}} K^{-q_1 m} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|g^k\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} k}} K^{-q_2 k} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^{(-q_3+q_2)n} \right) < \infty.$$

Эта оценка означает, что $f(\lambda)\, g(\lambda)$ входит в правую часть (130).

Из этой леммы следует, что и *пространство* $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p)$ *является алгеброй относительно обычных алгебраических операций.*

В самом деле, если $f, g \in \mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p)$, то в силу (131) $\exists\, p_1, p_2 \in \mathbb{N}$: $f \in \mathrm{Hol}_0(N_{p_1})$, $g \in \mathrm{Hol}_0(N_{p_2})$. Но тогда $f, g \in \mathrm{Hol}_0(N_{p_3})$, где $p_3 = \max\{p_1, p_2\}$ и вопрос сводится к лемме 14.

Подытожим полученные выше результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 7. *В случае классических характеров Аппеля S-преобразование* (125) *посредством формулы* (126) *распространяется на пространство* $\Phi' = (\Phi^P)' = \mathrm{ind}\lim_{p,q\in\mathbb{N}} H^P(-p,-q)$ *обобщенных функций, при этом кохарактер Аппеля переходит в степень, точнее* $\forall\, \xi \in H^P(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, *в координатах* (110) *имеем*

$$(S\xi)(\lambda) = \left(S \sum_{n=0}^{\infty} Q(\alpha^n) \right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \alpha^n \rangle,$$

$$\lambda \in B_p(K^{-q/2}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty. \tag{134}$$

S-образы пространств

$$H^P(-p,-q), \quad \mathrm{ind}\lim_{q\in\mathbb{N}} H^P(-p,-q) \quad \text{и} \quad \mathrm{ind}\lim_{p,q\in\mathbb{N}} H^P(-p,-q)$$

являются соответственно гильбертовым пространством $\mathrm{Hol}(N_p, q)$ (129), (132) *аналитических функций в* $B_p(K^{-q/2})$ *и индуктивными пределами* (130), (131) *ростков аналитических функций:*

$$\mathrm{Hol}_0(N_p) = \mathrm{ind}\lim_{q\in\mathbb{N}} \mathrm{Hol}(N_p, q),$$

$$\mathrm{Hol}_0\left(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p \right) = \mathrm{ind}\lim_{p,q\in\mathbb{N}} \mathrm{Hol}(N_p, q). \tag{135}$$

Оператор S осуществляет топологический изоморфизм между соответствующими пространствами; $S\colon H^P(-p,-q) \to \mathrm{Hol}(N_p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, *— унитарный оператор.*

Пространство $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p) = S(\Phi')$ *является алгеброй относительно обычного сложения и умножения функций, а*

$$\forall\, p \in \mathbb{N} \quad \mathrm{Hol}_0(N_p) = S\left(\mathrm{ind}\lim_{q\in\mathbb{N}} H^P(-p,-q) \right)$$

— ее подалгебра.

В случае общих характеров Аппеля все сказанное выше сохраняется, нужно только в соответствии с теоремой 5 считать, что $p = 2, 3, \ldots$ и $q = 1+t, 2+t, \ldots$.

Перейдем к рассмотрению T-преобразования. Оно также определяется как интегральный оператор на некотором множестве функций $f \in C(Q)$, с ядром $k_T(\lambda, x) = \chi(x, \overline{\lambda})$ при $\lambda \in N_1$ (или даже $\lambda \in N_{p_0}$):

$$(Tf)(\lambda) = \int\limits_Q \overline{k_T(\lambda, x)}\, f(x)\, d\rho(x) = \int\limits_Q \overline{\chi(x, \overline{\lambda})}\, f(x)\, d\rho(x);$$

$$k_T(\lambda, x) = \chi(x, \overline{\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \overline{\lambda}^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle, \quad \lambda \in N_1, \quad \|\lambda\|_{n_1} \le R^1; \quad x < Q. \tag{136}$$

Таким образом, T является „преобразованием Фурье относительно χ" функции f, но с интегрированием относительно произвольной, „неинвариантной", меры ρ.

Как и в случае S-преобразования, оператор (136) распространяется на обобщенные функции, но связанные с характерами Дельсарта, а не Аппеля. Именно, согласно лемме 7 $\forall\, p, q \in \mathbb{N}$ $\chi(\cdot, \lambda) \in H^\chi(p, q)$, $\lambda \in B_p(K^{-q/2})$, поэтому оператор (136) можно продолжить на обобщенные функции из $H^\chi(-p, -q)$, полагая

$$(T\xi)(\lambda) = \langle\langle \xi, k(\lambda, \cdot) \rangle\rangle, \quad \xi \in H^\chi(-p, -q) \supseteq H_0, \quad \lambda \in B_p(K^{-q/2}). \tag{137}$$

Все, что говорилось выше о S-преобразовании, сохраняется для T-преобразования, но с использованием пространств $H^\chi(p, q)$ вместо $H^P(p, q)$ и кохарактеров Дельсарта вместо кохарактеров Аппеля, т. е. с использованием теоремы 2 и соотношений (52), (63). Образы будут прежними пространствами (129), (130) и (131) аналитических функций и их ростков. Результат может быть сформулирован таким образом.

Теорема 8. *T-преобразование* (136) *посредством формулы* (137) *распространяется на пространство $\Phi' = (\Phi^\chi)' = \operatorname{ind\,lim}_{p, q \in \mathbb{N}} H^\chi(-p, -q)$ обобщенных функций, при этом кохарактер Дельсарта переходит в степень, точнее $\forall\, \xi \in H^\chi(-p, -q)$, $p, q \in \mathbb{N}$, в координатах* (63) *имеем*

$$(T\xi)(\lambda) = \left(T\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta(\alpha^n) \right) \right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \alpha^n \rangle,$$

$$\lambda \in B_p(K^{-q/2}), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|\alpha^n\|^2_{N_{-p}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty. \tag{138}$$

T-образы пространств

$$H^\chi(-p, -q), \quad \operatorname*{ind\,lim}_{q \in \mathbb{N}} H^\chi(-p, -q) \quad \text{и} \quad \operatorname*{ind\,lim}_{p, q \in \mathbb{N}} H^\chi(-p, -q)$$

являются соответственно прежними пространствами аналитических функций и их ростков $\operatorname{Hol}(N_p, q)$, $\operatorname{Hol}_0(N_p)$, $\operatorname{Hol}_0(\operatorname{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p)$.

Изоморфизмы S и T между пространством обобщенных функций

$$\Phi' = (\Phi^P)' = (\Phi^\chi)'$$

и пространством ростков аналитических функций $\operatorname{Hol}(\operatorname{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}} N_p)$ и то обстоятельство, что последнее пространство является алгеброй относительно обычного сложения и умножения функций, дает возможность ввести в Φ' умножение Вика обобщенных функций. В этой статье мы ограничимся лишь определениями.

Итак, S-образ пространства Φ' совпадает с $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p)$, $\forall\, \xi, \eta \in \in \Phi'$ введем умножение S-Вика $\Diamond_S$, полагая

$$\xi \Diamond_S \eta = S^{-1}((S\xi)(\lambda)\cdot(S\eta)(\lambda)). \tag{139}$$

Разумеется, это определение корректно и вместе с обычным сложением и умножением на скаляр обобщенных функций превращает $\Phi' = (\Phi^P)'$ в коммутативную алгебру, изоморфную $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p)$, S-прообраз $\mathrm{Hol}_0(N_p)$ при каждом $p \in \mathbb{N}$ является подалгеброй этой алгебры. Для кохарактеров Аппеля имеем: $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$Q(\alpha^n)\Diamond_S Q(\beta^m) = Q(\alpha^m \hat{\otimes} \beta^m), \tag{140}$$

$$\alpha^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}, \quad \beta^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}; \quad n, m \in \mathbb{Z}_+.$$

Действительно, S-образ левой части в (140) согласно (139) и (127) равен $\langle\alpha^n, \lambda^{\otimes n}\rangle\langle\beta^m, \lambda^{\otimes m}\rangle = \langle\alpha^n \hat{\otimes}\beta^m, \lambda^{\otimes(n+m)}\rangle$, $\lambda \in N_p$, что совпадает с S-образом правой части в (140).

Очевидно, умножение (139) можно воспринимать как умножение (140), заданное на „базисных" векторах $Q(\alpha^n)$ пространства $\Phi' = (\Phi^P)'$ (здесь $\alpha^n \in \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $p \in \mathbb{N}$), а затем по линейности распространенное на все Φ'. Сказанное выше относится к случаю классических характеров Аппеля, в общем случае все сохраняется для $p = 2, 3, \ldots$ и $q = 1 + t, 2 + t, \ldots$.

Изложенную конструкцию можно повторить для T-преобразования. Теперь вводится умножение T-Вика $\Diamond_T$ равенством $\forall\, \xi, \eta \in \Phi'$

$$\xi \Diamond_T \eta = T^{-1}((T\xi)(\lambda)\cdot(T\eta)(\lambda)), \tag{141}$$

которое порождается правилом умножения „базисных" векторов $\theta(\alpha^n)$ пространства $\Phi' = (\Phi^{\chi})'$: $\forall\, p \in \mathbb{N}$

$$\theta(\alpha^n)\Diamond_T \theta(\beta^m) = \theta(\alpha^n \hat{\otimes}\beta^m), \quad \alpha^n \in N_{-p}^{\hat{\otimes} n}, \quad \beta^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}; \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \tag{142}$$

Умножение (141), (142) опять превращает Φ' в коммутативную алгебру, изоморфную той же алгебре $\mathrm{Hol}_0(\mathrm{pr}\lim_{p\in\mathbb{N}} N_p)$, но отличную от алгебры (139), (140).

В заключение сделаем некоторые замечания, касающиеся введения играющих важную роль операторов $\partial(\alpha^m)$ (45). Именно: существует класс операторов обобщенного сдвига, для которого операторы $\partial(\alpha^m)$ появляются автоматически. Сейчас мы лишь наметим построения, детально они будут изложены в другой работе.

Будем предполагать, что в пространстве $C(Q)$ задано линейное множество $D(Q)$ и на нем семейство операторов $\mathcal{L}(\alpha^m)$,

$$D(Q) \ni f \mapsto \mathcal{L}(\alpha^m) f \in D(Q), \quad \alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad m, p \in \mathbb{N},$$

для которых характер $\chi(x, \lambda)$ является „собственной функцией" в следующем смысле: $\chi(\cdot, \lambda) \in D(Q)$ и $\forall\, \alpha^m$

$$(\mathcal{L}(\alpha^m)\chi(\cdot, \lambda))(x) = \langle\lambda^{\otimes m}, \alpha^m\rangle\chi(x, \lambda), \quad x \in Q, \quad \lambda \in N_p. \tag{143}$$

Операторы обобщенного сдвига, для которых известно наличие операторов

$\mathcal{L}(\alpha^m)$ со свойством (143), будем называть операторами обобщенного сдвига Тейлора – Дельсарта, они часто появляются независимо от конструкций предыдущих пунктов.

Нетрудно видеть, что *операторы* $\partial(\alpha^m)$ *будут, по существу, совпадать с* $\mathcal{L}(\alpha^m)$.

В самом деле, используя разложение (21) для $\lambda \in N_1$, $\|\lambda\|_{N_1} \leq R$, получаем, формально пронося $\mathcal{L}(\alpha^m)$ через сумму:

$$(\mathcal{L}(\alpha^m)\chi(\cdot,\lambda))(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{L}(\alpha^m) \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle,$$

$$\langle \lambda^{\otimes m}, \alpha^m \rangle \chi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes m}, \alpha^m \rangle \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes(n+m)}, \alpha^m \hat{\otimes} \chi_n(x) \rangle = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{(n-m)!} \langle \lambda^n, \alpha^m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(x) \rangle. \quad (144)$$

Ряды в правых частях (144) на основании (143) совпадают. Поэтому если положить $\lambda = ze$, где $e \in N_1$, $\|e\|_{N_1} \in 1$, $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| \leq R$, то из (144) найдем сравнением коэффициентов при z^n

$$\mathcal{L}(\alpha^m) \langle e^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle = 0, \quad n < m;$$

$$\mathcal{L}(\alpha^m) \langle e^{\otimes n}, \chi_n(x) \rangle = \frac{n!}{(n-m)!} \langle e^{\otimes n}, \alpha^m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(x) \rangle, \quad n \geq m, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (145)$$

С помощью поляризационной формулы заключаем, что (145) справедливо в случае, когда $e^{\otimes n}$ заменено на $e_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} e_n$, где $e_1, \ldots, e_n \in N_1$, $\|e_1\|_{N_1} = \ldots$ $\ldots = \|e_n\|_{N_1}$. Далее, с помощью оценки (26) для $p_1 = 2, 3, \ldots$ можно заключить, что (145) имеет место и при замене $e^{\otimes n}$ на $a^n \in N_p^{\hat{\otimes} n}$, $p = 2, 3, \ldots$. Тем самым мы пришли к соотношению (45), определяющему оператор $\partial(\alpha^m)$. Итак,

$$\partial(\alpha^m) = \mathcal{L}(\alpha^m), \quad \alpha^m \in N_{-p}^{\hat{\otimes} m}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad p = 2, 3, \ldots . \quad (146)$$

Конечно, этот вывод несколько формален и для справедливости равенства (146) нужны дополнительные условия на операторы $\mathcal{L}(\alpha^m)$ и их область определения $D(Q)$.

В заключение заметим, что *для операторов обобщенного сдвига Тейлора – – Дельсарта пространства* $H^{n,\chi}(1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *как линейные множества из* H_0 *линейно независимы* (т. е. соответствующее условие п. 5 выполнено автоматически).

В самом деле, пусть функции вида (38) при $p = 1$ линейно зависимы. Это эквивалентно существованию $n \in \mathbb{Z}_+$ и таких векторов $a^k \in N_1^{\hat{\otimes} k}$, $k = 0, \ldots n$, что $a^n \neq 0$ и в H_0 (или $\forall\, x \in Q$ в силу леммы 3)

$$\sum_{k=0}^{n} \langle \chi_k(x), a^k \rangle = 0.$$

Применим к этому равенству оператор $\mathcal{L}(\alpha^n)$, где $\alpha^n \in N_{-2}^{\hat{\otimes} n}$, и воспользуемся

(146) и (45). В результате получим, что $\langle \alpha^n, a^n \rangle = 0$ и поэтому $a^n = 0$ ввиду произвольности α^n. Пришли к противоречию.

1. *Хида Т.* Броуновское движение. – М.: Наука, 1987. – 304 с. (англ. изд.: New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1980).
2. *Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J., Streit L.* White noise. An infinite dimensional calculus. – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1993.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с. (англ. пер.: Providence: AMS, 1986. – xvi + 384 p.).
4. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с. (англ. пер.: Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – xvii + 577 p.; Vol. 2. – viii + 427 p.).
5. *Ito Y.* Generalized Poisson functionals // Probab. Theory and Related Fields. – 1988. – **77**. – P. 1–28.
6. *Ito Y., Kubo I.* Calculus on Gaussian and Poisson white noises // Nagoya Math. J. – 1988. – **111**. – P. 41–84.
7. *Berezansky Yu. M.* Spectral approach to white noise analysis / Proceedings of Symposium "Dynamics of Complex and Irregular Systems", Bielefeld, December, 16–20, 1991 // Bielefeld Encounters in Mathematics and Physics VIII, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong: World Scientific, 1993. – P. 131–140.
8. *Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. W.* A generalization of Gaussian white noise analysis // Methods of Funct. Analysis and Topology. – 1995. – **1**, № 1. – P. 28–55.
9. *Lytvynov E. W.* Multiple Wiener integrals and non-Gaussian white noise analysis: a Jacobi field approach // Ibid. – 1995. – **1**, № 1. – P. 61–85.
10. *Albeverio S., Daletsky Yu. L., Kondratiev Yu. G., Streit L.* Non-Gaussian infinite-dimensional analysis. – BiBoS-Preprint, Bielefeld, 1994; J. Funct. Anal. – 1996. – **138**, № 2. – P. 311–350.
11. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.-A.* Generalized functions in infinite dimensional analysis. – IIAS Preprint, 1995.
12. *Us G. F.* Dual Appell systems in Poissonian analysis // Methods of Funct. Analysis and Topology. – 1995. – **1**, № 1. – P. 93–108.
13. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог эрмитовых полиномов и обращение преобразования Фурье относительно гауссовой меры // Функцион. анализ и его прил. – 1991. – **25**. – С. 68–70.
14. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Негауссов анализ и гипергруппы // Функцион. анализ и его прил. – 1995. – **29**, № 3. – С. 51–55.
15. *Berezansky Yu. M.* A connection between the theory of hypergroups and white noise analysis // Repts Math. Phys. – 1995. – **36**. – P. 215–234.
16. *Berezansky Yu. M.* A generalization of white noise analysis by means of the theory of hypergroups // Ibid. – 1996 (to appear).
17. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gaussian analysis // Methods of Funct. Analysis and Topology. – 1996. – **2**, № 2. – (to appear).
18. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1992. – 352 с.
19. *Bloom W. R., Heyer H.* Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. – Berlin–New York: de Gruyter, 1995. – vi + 602 p.
20. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
21. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный негауссов анализ и операторы обобщенного сдвига // Функцион. анализ и его прил. – (в печати).
22. *Березанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В.* Спектральный подход к анализу белого шума // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 3. – С. 177–197.
23. *Nachbin L.* Topology on spaces of holomorphic mappings. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1969. – 68 p.
24. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращенные преобразования Фурье по негауссовой мере // Функцион. анализ и прил. – 1991. – **25**. – С. 68–70.

Получено 10.09.96