УДК 519.21

Д. В. Гусак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЗАДАЧУ РУЙНАЦІЇ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО НАПІВНЕПЕРЕРВНОГО ЦІЛОЗНАЧНОГО ПРОЦЕСУ

For a process $\xi(t) = \xi_1(t) + \chi(t)$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$ nonhomogeneous in time, we study a ruin problem associated with corresponding random walk in a finite interval, where $\xi_1(t)$ is a homogeneous Poisson process with positive integral-valued jumps, $\chi(t)$ is a nonhomogeneous lower semi-continuous process with integral-valued jumps $\xi_n \ge -1$.

Для неоднорідного за часом процесу $\xi(t) = \xi_1(t) + \chi(t)$, $t \ge 0$, $\xi(0) = 0$, вивчається задача руйнації, пов'язана з відповідним випадковим блуканням в скінченному інтервалі, де $\xi_1(t)$ — однорідний пуассонівський процес з додатними цілозначними стрибками, $\chi(t)$ — неоднорідний неперервний знизу процес з цілозначними стрибками $\xi_n \ge -1$.

Різні граничні задачі для однорідних напівнеперервних пуассонівських процесів досліджувались в роботах [1 – 3], напівнеперервний однорідний пуассонівський процес з цілозначними стрибками і відповідні граничні задачі — в [4]. Для неоднорідних процесів $\xi(t)$, заданих на суперпозиціях двох процесів відновлення, деякі граничні задачі вивчались в [5 – 7]. В роботі [8] для таких процесів розвинено факторизаційний підхід до вивчення граничних задач, пов'язаних з розподілом екстремумів цих процесів, моменту першого досягнення екстремумів або фіксованого рівня, перестрибу та стрибка, що накриває фіксований рівень. При цьому основна увага приділялась випадку, коли стрибки процесу $\xi(t)$ неперервно розподілені. В даній роботі розглядається випадок, коли стрибки цілозначні, і досліджується задача руйнації, пов'язана з блуканням в обмеженому інтервалі. Для цього узагальнюється поняття резольвенти, введене В. С. Королюком [1, 2] для однорідних напівнеперервних пуассонівських процесів.

Нехай $\xi_1(t)$ — однорідний цілозначний пуассонівський процес з твірною функцією (т. ф.)

$$\mathrm{E} z^{\xi_1(t)} = e^{t\psi(z)}, \quad |z| \le 1, \quad t \ge 0,$$

і кумулянтою, що виражається через т. ф. стрибків процесу $\xi_1(t)$,

$$\psi(z) = \lambda(P_1(z) - 1), \quad P_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p'_k z^k.$$

Неперервний знизу неоднорідний за часом процес $\chi(t)$ задається двовимірною послідовністю незалежних випадкових величин

$$\{\xi_n; \zeta_n\}, \quad 1 \le n < \infty, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad S_0 = 0,$$

$$p_k = \mathrm{P}\{\xi_n = k\}, \quad k \ge -1; \quad p_{-1} > 0, \quad p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k p_k;$$

$$G(t) = \mathrm{P}\{\zeta_n < t\}, \quad G(0) = 0, \quad t > 0,$$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k, \quad \nu(t) = \max\{n > 0 : \sigma_n \le t\}.$$

Розглядається сумарний процес

$$\xi(t) = \xi_1(t) + \chi(t), \quad \chi(t) = S_{\nu(t)}.$$

Нехай θ_s — незалежна від $\xi_1(t)$ та $\chi(t)$ показниково розподілена випадкова величина $(\{P\{\theta_s > t\}) = e^{-st},\ s>0,\ t>0)$,

$$\xi^{\pm}(t) = \sup_{0 \le u \le t} (\inf)\, \xi(u),$$

$$\varphi(s,z) = \mathrm{E}z^{\xi(\theta_s)}; \quad \varphi_{\pm}(s,z) = \mathrm{E}z^{\xi^{\pm}(\theta_s)}.$$

Тоді (див. [8], § 4.3) при $|z| = 1$ т. ф. для $\xi(\theta_s)$ визначається співвідношенням

$$\varphi(s,z) = \frac{s}{s-\psi(z)} \frac{1-g(s-\psi(z))}{1-p(z) g(s-\psi(z))}, \tag{1}$$

$$\mathrm{E}z^{\xi_1(\theta_s)} = \frac{s}{s-\psi(z)}, \quad \psi(z) = \lambda(P_1(z)-1), \quad |z| \le 1.$$

Для неї має місце зображення

$$\varphi(s,z) = \frac{s}{s-\psi(z)} \frac{1-g(s-\psi(z))}{1-g(s)} \varphi_*(s,z),$$

де

$$\varphi_*(s,z) = \mathrm{E}z^{\xi_*(\theta_s)} = \frac{1-g(s)}{1-p(z)\, g(s-\psi(z))}$$

є генератрисою допоміжного процесу

$$\xi_*(t) = \sum_{k \le \nu(t)} \xi_k^*, \quad \xi_k^* = \xi_k + \xi_1(\zeta_k). \tag{2}$$

Для нього неважко встановити основну тотожність, яка узагальнює тотожність нескінченно подільної факторизації (див. [8])

$$\varphi_*(s,z) = \varphi_*^+(s,z)\, \varphi_*^-(s,z), \quad |z| = 1, \tag{3}$$

$$\varphi_*^{\pm}(s,z) = \mathrm{E}z^{\xi_*^{\pm}(\theta_s)}, \quad \xi_*^{\pm}(t) = \sup_{0 \le u \le t} (\inf)\, \xi_*(u).$$

У термінах компонент цієї факторизації виражаються розподіли всіх граничних функціоналів, в тому числі й генератриси екстремумів та їх доповнень:

$$\varphi_{\pm}(s,z) = \mathrm{E}z^{\xi^{\pm}(\theta_s)},$$

$$\Phi_-(s,z) = \mathrm{E}z^{\overline{\xi}(\theta_s)}, \quad \overline{\xi}(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^+(\theta_s),$$

$$\Phi_+(s,z) = \mathrm{E}z^{\breve{\xi}(\theta_s)}, \quad \breve{\xi}(\theta_s) = \xi(\theta_s) - \xi^-(\theta_s);$$

при цьому $\varphi_{\pm}(s,z)$ та $\Phi_{\pm}(s,z)$ відрізняються суттєво між собою, якщо $G(t)$ — не показникова функція розподілу (див. відповідні твердження в [8], § 4.2, 4.3).

У роботі [8] (див. § 4.2 – 4.4) встановлено, що розподіли всіх ґраничних функціоналів задовольняють інтегральні рівняння, що виражаються ускладненою згорткою

$$\mathcal{K}_s(x) - \int \mathcal{K}_s(x-y)\, \mathrm{E}[e^{-s\zeta},\ \xi_* \in dy] = 0 \tag{4}$$

(інтегральною або сумарною, залежно від того, неперервно чи дискретно розподілена ξ_*). Інтегральний член рівняння, як правило, розбивається на кілька доданків, залежно від обмежень на ξ, ζ та $\xi_1(\zeta)$, що наводяться в стохастичних зображеннях граничних функціоналів і ускладнюють операцію згортки.

Інколи умова на розподіл самого функціонала обумовлює виділення із згортки доданка, незалежного від $\mathcal{K}_s(x)$, який переноситься в праву частину рівняння (4). Наприклад, для

$$\mathcal{K}_s(x) = \mathrm{E}e^{-s\tau^+(x)}(x \ge 0), \qquad \tau^+(x) = \inf\{t > 0 : \xi(t) \ge x\},$$

з умови $\mathcal{K}_s(x) = 1$ при $x < 0$ випливає

$$\mathcal{K}_s(x) - \int_{-\infty}^{x} \mathcal{K}_s(x-y)\,\mathrm{E}[e^{-s\zeta},\ \xi_* \in dy] = B_s(x), \tag{5}$$

де

$$B_s(x) = \int_{x}^{\infty} \mathrm{E}[e^{-s\zeta},\ \xi_* \in dz] = \mathrm{E}[e^{-s\zeta},\ \xi_* \in dz],$$

а сам інтеграл з межами $[-\infty; x)$, в свою чергу, теж може розбиватися ще на складові доданки.

Інтегральні рівняння типу (4) або (5) в операторному вигляді можна записати так:

$$L\,\mathcal{K}_s(x) = B_s(x), \qquad L = I - S, \tag{6}$$

де I — тотожний оператор, а S — оператор повної або зрізаної згортки.

Символ оператора L визначається оберненим значенням т. ф. $\xi_*(\xi_s)$:

$$K(s,z) = 1 - p(z)\,g(s - \psi(z)) = (1 - g(s))\,\varphi_*^{-1}(s,z). \tag{7}$$

Тому процес $\xi_*(t)$ (див. (2)) і факторизацію його символу, яка по суті виражається факторизаційною тотожністю (3), можна вважати базовими або опорними для вивчення всіх граничних функціоналів основного процесу $\xi(t)$.

Зауважимо, що з умови неперервності знизу процесу $\chi(t)$

$$p(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k p_k, \quad p_{-1} = \mathrm{P}\{\xi_n = -1\} > 0, \quad p_k = 0, \quad k < -1, \tag{8}$$

випливає, що т. ф. $\xi_*(\theta_s)$ можна подати у вигляді

$$\varphi_*(s,z) = \frac{1 - g(s)}{1 - g(s)\,f_s(z)} \tag{9}$$

і розглядати її як генератрису неперервного знизу дискретного випадкового блукання з параметризованим розподілом його кроку

$$f_s(z) = p(z)\,g^{-1}(s)\,g(s - \psi(z)) = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k(s)\,z^k. \tag{10}$$

На цій підставі для вивчення граничних задач, пов'язаних з блуканням в обмеженому інтервалі, доцільно узагальнити поняття резольвенти для параметризованої схеми неперервного знизу блукання (9), (10) з символом

$$k_s(z) = 1 - g(s)\,f_s(z). \tag{11}$$

Аналогічно до наслідку 4.1 в [8] та леми 1 в [4] встановлюється твердження про розподіл екстремальних значень $\xi_*^-(\theta_s) \doteq \xi^-(\theta_s)$ та $\xi_*^+(\theta_s) \neq \xi^+(\theta_s)$.

Лема. *Розподіл мінімуму* $\xi_*^-(\theta_s) \doteq \xi^-(\theta_s)$ *визначається генератрисою* (*т. ф.*)

$$\varphi_*^-(s,z) = \mathrm{E} z^{\xi_*^-(\theta_s)} = \frac{z\,p_-(s)}{z - q_-(s)}, \tag{12}$$

$$\mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s) = -k\} = p_-(s)\,q_-^k(s), \quad k \ge 0,$$

$q_-(s) = \mathrm{P}\{\xi^-(\theta_s) < 0\} = \mathrm{P}\{\xi_*^-(\theta_s) < 0\}$ — *додатний корінь рівняння* $k_s(q_-) = 0$. *Крім того,*

$$p_-(s) = 1 - q_-(s) = \frac{p_0^*(s)}{\mathrm{P}\{\xi_*(\theta_s) \le 0\}}, \tag{13}$$

$$p_k^*(s) = \mathrm{P}\{\xi_*(\theta_s) = k\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Розподіл максимуму $\xi_*^+(\theta_s)$ *визначається так*:

$$p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(s)}[p_k^*(s) - q_-(s)\,p_{k+1}^*], \quad k \ge 0, \tag{14}$$

генератриса

$$\varphi_*^+(s,z) = \mathrm{E} z^{\xi_*^+(\theta_s)} =$$

$$= \frac{1}{p_-(s)}\left(\mathrm{E}[z^{\xi_*(\theta_s)},\ \xi_*(\theta_s) \ge 0] - g_-(s)\,\mathrm{E}[z^{\xi_*(\theta_z)-1},\ \xi_*(\theta_s) > 0]\right). \tag{15}$$

Доведення для $\xi_*^-(\theta_s)$ (див. (12)) аналогічне доведенню леми 1 в [4]. Доведення співвідношень (14), (15) для $\xi_*^+(\theta_s)$ базується на операції проектування

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k u^k\right]_+^0 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k$$

в співвідношенні, що встановлюється на основі факторизаційного розкладу (3):

$$p_-(s)\,\varphi_*^+(s,z)\,z = (z - q_-(s))\,\varphi_*(s,z). \tag{16}$$

Застосувавши до (16) операцію проектування $[\,]_+^0$ і зібравши коефіцієнти при однакових степенях z, одержимо співвідношення (14), з якого випливає (15) для $\varphi_*^+(s,z)$. Підсумувавши (14) по $k \ge 0$, знайдемо значення $p_-(s)$ в (13). Таким чином, для неперервного знизу дискретного блукання, що описується процесом $\xi_*(t)$, розподіли екстремумів $\xi_*^\pm(\theta_s)$ визначаються через розподіли додатних та від'ємних значень цього процесу.

Завдяки тому, що $\xi_*^-(\theta_s)$ має геометричний розподіл (див. (12)), можна ввести резольвенту для $\xi_*(\theta_s)$ аналогічно тому, як це зроблено для звичайного неперервного знизу цілозначного пуассонівського процесу (див. (18) в [4]).

Означення. *Резольвентою неперервного знизу параметризованого дискретного випадкового блукання* (9), (10) *назвемо послідовність* $\{R_n(s)\}_{n\ge 0}$, $R_0(s) = 0$, *яка при достатньо малих* z *задовольняє співвідношення*

$$R(s, z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n(s) = -[k_s(z)]^{-1}. \tag{17}$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися в тому, що

$$R_n(s) = \frac{p_-(s)}{1-g(s)} \sum_{k=0}^{n-1} q_-^{k-n}(s)\, p_k^+(s), \quad n \geq 1, \tag{18}$$

де ймовірності

$$p_k^+(s) = \mathrm{P}\{\xi_*^+(\theta_s) = k\}, \quad k \geq 0,$$

визначаються формулою (14).

Зауважимо, що при умові

$$p(z) = z^{-1}, \quad \mathrm{P}\{\xi_n = -1\} = 1 \tag{19}$$

неоднорідний процес $\chi(t)$ має одиничні стрибки вниз, а процес $\xi(t) = \xi_1(t) + \chi(t)$ досягає верхнього рівня лише за допомогою стрибків пуассонівського процесу $\xi_1(t)$.

При умові (19) на основі зображення

$$g(s - \psi(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \tilde{\rho}_k(s), \quad s \geq 0, \tag{20}$$

$$\tilde{\rho}_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy}\,\mathrm{P}\{\xi_1(y) = k\}\, dG(y),$$

$$\tilde{\rho}_k(0) = \mathrm{P}\{\xi_1(\zeta) = k\}, \quad k \geq 0,$$

з (16) випливає співвідношення

$$\left(z - \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\rho}_k(s) z^k\right) p_-(s)\, \varphi_*^+(s, z) = (z - q_-(s))\,(1 - g(s)). \tag{21}$$

З (21) одержуємо

$$p_0^+(s) = \frac{1-g(s)}{p_-(s)\,\tilde{\rho}_0(s)}\, q_-(s), \quad p_k^+(s) = P\{\xi_*^+(\theta_s) = k\},$$

$$p_1^+(s) = \frac{1-g(s)}{p_-(s)\,\tilde{\rho}_0(s)}\, [q_-(s)(1 - \tilde{\rho}_1(s)) - 1]$$

та низку рекурентних співвідношень

$$p_{k+1}^+(s) = \frac{1}{\tilde{\rho}_0(s)}\left[(1 - \tilde{\rho}_1(s))\, p_k^+(s) - \sum_{r=1}^{k} \tilde{\rho}_{r-1}(s)\, p_{k-r}^+(s)\right], \quad k \geq 1, \tag{22}$$

з яких випливає

$$p_k^+(s) = \frac{1-g(s)}{p_-(s)}\, F_k(s), \tag{23}$$

$$F_k(s) = F(q_-(s), \tilde{\rho}_0(s), \ldots, \tilde{\rho}_k(s)).$$

Нехай середні значення та дисперсії процесів $\chi(t)$ та $\xi_1(t)$ обмежені:

$$m' = \mathrm{E}\xi' > 0, \quad m = \mathrm{E}\xi < 0, \quad \mathrm{E}\zeta = c > 0,$$
$$\mathrm{D}\xi = b^2 < \infty, \quad \mathrm{D}\xi' < \infty, \quad -\infty < \mathrm{E}\xi_* = m + \lambda m' c < \infty. \tag{24}$$

При умові обмеженості моментів (24) з леми випливає твердження про існування невиродженого розподілу абсолютних екстремумів:

$$\xi^- = \inf_{t<\infty} \xi(t), \quad \xi_*^- = \inf_{t<\infty} \xi_*(t), \quad \xi_*^+ = \sup_{t<\infty} \xi_*(t).$$

Наслідок. 1. *При умовах* (24) *у випадку* $\mathrm{E}\,\xi_* > 0$ *існує невироджений розподіл абсолютного мінімуму*

$$\varphi_*^-(z) = \mathrm{E} z^{\xi_*^-} = \mathrm{E} z^{\xi^-} = \frac{z\, p_-(0)}{z - q_-(0)}, \tag{25}$$

де $q_-(0) = \lim_{s\to 0} P\{\xi^-(\theta_s) < 0\}$ *задовольняє рівняння*

$$1 - g(-\psi(z))\, p(z) = 0.$$

2. *Якщо* $\mathrm{E}\,\xi_* < 0$, *то існує невироджений розподіл абсолютного максимуму*

$$p_*^+(k) = \lim_{s\to 0} p_k^+(s) =$$

$$= \frac{1}{p'_-(0)} \int_0^\infty [\mathrm{P}\{\xi_*(t) = k\} - \mathrm{P}\{\xi_*(t) = k+1\}]\, dt, \qquad k \ge 0, \tag{26}$$

де $p'_-(0) = \lim_{s\to 0} s^{-1} p_-(s)$.

Доведення наслідку базується на граничному переході в (12) та (14) при $s \to 0$. З (26) випливає

$$\mathrm{P}\{\xi_*^+ \le k\} = \frac{1}{p'_-(0)} \int_0^\infty [\mathrm{P}\{\xi_*(t) = 0\} - \mathrm{P}\{\xi_*(t) = k+1\}]\, dt. \tag{27}$$

Якщо $p(z) = z^{-1}$, то при умові $\mathrm{E}\,\xi_* < 0$ із (23) випливає

$$p_*^+(k) = \frac{c\, F_k(0)}{p'_-(0)}, \quad c = \mathrm{E}\,\zeta, \quad k \ge 0, \tag{28}$$

де $F_k(0)$ обчислюються на основі рекурентних формул (22) і виражаються через

$$\tilde{\rho}_k(0) = \mathrm{P}\{\xi_1(\zeta) = k\} = \int_0^\infty \mathrm{P}\{\xi_1(y) = k\}\, dG(y).$$

Повернемось до загального випадку (8) і розглянемо блукання в обмеженому інтервалі $(0; N)$ для процесу $\xi_u(t) = u + \xi(t)$, $0 < u \dot{<} N$. Позначимо момент першого виходу $\xi_u(t)$ з інтервалу $(0; N)$ через його нижню границю

$$\tau_N^-(u) = \inf\{t > 0;\ \xi_u(t) \overline{\in} (0; N),\ \xi_u(\tau_N^-) < 0\}.$$

Покладемо $\tau_N^-(u) = 0$ при $u \le 0$, а при $u \ge 1$ для $\tau_N^-(u)$ має місце стохастичне зображення

$$\tau_N^-(u) \doteq \zeta + \tau_N^-(u + \xi_*), \qquad u + \xi_* < N, \quad \xi_* = \xi + \xi_1(\eta). \tag{29}$$

Позначимо $\eta_*(y) = \xi + \xi_1(y)$,

$$\tilde{\rho}_k^*(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, \mathrm{P}\{\eta_*(y) = k\}\, dG(y), \qquad k \ge -1, \tag{30}$$

$$Q_N(s,u) = \mathrm{E}\, e^{-s\tau_N^-(u)}.$$

Теорема 1. *Генератриса* $\tau_N^-(u)$ *визначається співвідношенням*

$$Q_N(s,u) = \frac{R_{N-u}(s)}{R_N(s)}, \qquad 0 < u < N, \tag{31}$$

де $R_n(s)$ *виражається формулою* (18).

Доведення. З (29) встановлюємо, що

$$Q_N(s,u) = \sum_{k=-1}^{N-u-1} \int_0^\infty e^{-sy} Q_N(s, u+k)\, \mathrm{P}\{\eta_*(y) = k\}\, dG(y).$$

Звідси на підставі (30) випливає рівняння для $Q_N(s,u)$:

$$Q_N(s,u) = \sum_{k=-1}^{N-u-1} Q_N(s, u+k)\, \tilde{p}_k^*(s), \qquad 0 < u < N, \tag{32}$$

$$Q_N(s,0) = 1, \qquad Q_N(s, N+k) = 0, \qquad k \ge N. \tag{33}$$

Для рівняння (32) типу сумарної згортки ядерна послідовність $\tilde{p}_k^*(s)$, $k \ge -1$, має твірне перетворення

$$\tilde{P}_*(s,z) = \sum_{k=-1}^{\infty} z^k\, \tilde{p}_k^*(s) = p(z)\, g(s - \psi(z)). \tag{34}$$

Отже, символом оператора рівняння (32) є функція (11)

$$k_s(z) = 1 - p(z)\, g(s - \psi(z)),$$

розглянута вище для неперервного знизу параметризованого блукання.

З другої граничної умови (33) випливає, що (32) можна записати як однорідне рівняння з повною згорткою:

$$Q_N(s,u) - \sum_{k=-1}^{\infty} Q_N(s, u+k)\, \tilde{p}_k^*(s) = 0, \qquad 0 < u < N. \tag{35}$$

На підставі третьої властивості резольвенти (див. [2, с. 194]) розв'язок рівняння (35) шукаємо у вигляді

$$Q_N(s,u) = C_s R_{N-u}(s), \qquad 0 < u < N,$$

$N - u$ — віддаль до неперервно досяжної границі з початкового стану $\xi_u(0) = u$, C_s визначається з першої умови (33)

$$Q_N(s,0) = C_s R_s(N) = 1.$$

Теорему доведено.

У випадку $p(z) = z^{-1}$ в зображенні резольвенти (18) для ймовірностей $p_k^+(s)$ розподілу максимуму можна використати формулу (23), а не загальну формулу (14).

З теореми 1 випливає твердження для ймовірності руйнації.

Теорема 2. 1. *Якщо при умові* (24) $\mathrm{E}\,\xi_* > 0$, *то ймовірність руйнації*

$$Q_N(u) = \mathrm{P}\{\xi_u(\tau_N^-) < 0\} = \lim_{s\to 0} Q_N(s,u) = \frac{R_{N-u}^+(0)}{R_N^+(0)}, \tag{36}$$

де

$$R_n^+(0) = \frac{p_-(0)}{c}\sum_{k=0}^{n-1} q_-^{k-n}(0)\,\dot p_k^+(0), \tag{37}$$

$$p_-(0) = \mathrm{P}\{\xi^- = 0\}, \quad q_-(0) = 1 - p_-(0), \quad c = \mathrm{E}\zeta,$$

$$\dot p_k^+(0) = \lim_{s\to 0} s^{-1}\mathrm{P}\{\xi_*^+(\theta_s) = k\}, \quad k \ge 0.$$

2. *Якщо* $\mathrm{E}\xi_* < 0$, *то існує невироджений розподіл абсолютного максимуму (див.* (26)) $p_*^+(k) = \mathrm{P}\{\xi_*^+ = k\}$, $k \ge 0$,

$$\lim_{s\to 0} p_-(s) = 0, \quad \lim_{s\to 0} q_-(s) = 1, \quad \lim_{s\to 0} s^{-1} p_-(s) = p_-'(0),$$

а ймовірність руйнації визначається співвідношенням

$$Q_N(u) = \lim_{s\to 0} Q_N(s,u) = \frac{R_{N-u}^-(0)}{R_N^-(0)} = \frac{\mathrm{P}\{\xi_*^+ < N-u\}}{\mathrm{P}\{\xi_*^+ < N\}}, \tag{38}$$

де

$$R_n^-(0) = \frac{p_-'(0)}{c}\mathrm{P}\{\xi_*^+ < n\}, \tag{39}$$

$$\mathrm{P}\{\xi_*^+ < n\} = \frac{1}{p_-'(0)}\int_0^\infty [\mathrm{P}\{\xi_*(t) = 0\} - \mathrm{P}\{\xi_*(t) = n\}]\,dt.$$

Доведення. В умовах (24) при $\mathrm{E}\xi_* > 0$ процес $\xi_*(\theta_s)$ має невироджений розподіл абсолютного мінімуму (див. (25)), а згідно з (14)

$$\lim_{s\to 0} p_k^+(s) = 0,$$

$$\dot p_k^+(0) = \lim_{s\to 0} s^{-1} p_k^+(s) = \frac{1}{p_-(0)}\int_0^\infty [\mathrm{P}\{\xi_*(t) = k\} - \mathrm{P}\{\xi_*(t) = k+1\}]\,dt,$$

і з (31) випливає (36). В частинному випадку, коли $p(z) = z^{-1}$, для знаходження $\dot p_k^+(0)$ можна використати рекурентну систему (22) та (23).

Для доведення твердження 2 теореми 2 зауважимо, що при $\mathrm{E}\xi_* < 0$

$$\lim_{s\to 0} p_-(s) = 0, \quad \lim_{s\to 0} q_-(s) = 1$$

та існує невироджений розподіл абсолютного максимуму (див. (26)). Тоді з (18) при $s \to 0$ знаходимо $R_n^-(0)$, а з (27) — функцію розподілу ξ_*^+.

Розглянемо момент першого виходу процесу $\xi(t)$ з інтервалу $(u-N; u)$

$$\tau_N(u) = \inf\{t > 0\colon\ \xi(t) \,\overline{\in}\, (u-N; u)\}, \quad 0 < u < N,$$

та момент першого виходу $\xi(t)$ з $(u-N; u)$ через верхню границю

$$\tau_N^+(u) = \inf\{t > 0\colon\ \xi(t) \,\overline{\in}\, (u-N; u);\ \xi(\tau_N(u)) > u\}.$$

Ці два моменти частково пов'язані з моментом першого виходу пуассонівського процесу $\xi_1(t)$ через додатний рівень $z > 0$:

$$\tau'(z) = \inf\{t>0:\ \xi_1(t) \geq z\}.$$

Нагадаємо, що стрибки $\xi'_n > 0$ процесу $\xi_1(t)$ додатні, а інтервали між стрибками $\zeta'_n \geq 0$ показниково розподілені

$$\mathrm{E}e^{-s\zeta'_n} = \frac{\lambda}{s+\lambda}, \quad p'_k = \mathrm{P}\{\xi'_n = k\} > 0, \quad k \geq 1.$$

Позначимо генератриси $\tau_N(u)$ та $\tau_N^+(u)$ через $Q^N(s,u) = \mathrm{E}e^{-s\tau_N^+(u)}$ та $Q(N,s,u) = \mathrm{E}e^{-s\tau_N(u)}$, $0<u<N$, і доведемо для них наступне твердження.

Теорема 3. *Генератриса* $Q^N(s,n)$ *визначається співвідношенням*

$$Q^N(s,n) = 1 - \frac{R_n(s)}{R_N(s)}\left[1 - \sum_{k=0}^{N} R_{N-k}(s)\tilde{A}(k,s)\right] -$$

$$- \sum_{k=0}^{n} R_{n-k}(s)\tilde{A}(k,s), \qquad 0<n<N, \tag{40}$$

де $R_n(s)$ *визначається за формулою* (18), *а*

$$\tilde{A}(k,s) = 1 - g(s) + \int_0^\infty \overline{G}(z)e^{-sz}d\mathrm{P}\{\tau'(u) < z\} + \sum_{k=0}^{u-1}\rho_k(s)\overline{F}(u-k) -$$

$$- \sum_{k=u}^{\infty}\tilde{p}_k^*(s) - p_{-1}\mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)},\ \xi_1(\zeta) = u], \quad \overline{F}(k) = \mathrm{P}\{\xi \geq k\}. \tag{41}$$

Генератриса $Q(N,s,n)$ *визначається співвідношенням*

$$Q(N,s,n) = 1 + \frac{R_n(s)}{R_N(s)}\sum_{k=0}^{N}R_{N-k}(s)\tilde{A}(k,s) - \sum_{k=0}^{n}R_{n-k}(s)\tilde{A}(k,s). \tag{42}$$

Доведення. Як і в [8] (див. § 4.2, 4.3), для розглядуваних функціоналів встановлюються стохастичні співвідношення, що враховують зміни процесу і відповідних функціоналів в момент регенерації в $\zeta=\zeta_1$. Для $\tau_N^+(u)$ має місце стохастичне зображення

$$\tau_N^+(u) \doteq \begin{cases} \tau'(u), & \xi_1(\zeta) \geq u; \\ \zeta, & u-\xi \leq \xi_1(\zeta) < u; \\ \zeta + \tau_N^+(u-\xi_*), & \xi_* < u,\ \xi_1(\zeta) < u. \end{cases}$$

Звідси для $Q^N(s,u)$ випливає інтегральне співвідношення

$$Q^N(s,u) = I_1(s,u) + I_2(s,u) + I_3(s,u), \tag{43}$$

де

$$I_1(s,u) = \mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)};\ \tau'(u) < \zeta] = \int_0^\infty \overline{G}(z)e^{-sz}d\mathrm{P}\{\tau'(u) < z\},$$

$$I_2(s,u) = \mathrm{E}[e^{-s\zeta},\ u-\xi \leq \xi_1(\zeta) < u] = \sum_{k=0}^{u-1}\rho_k(s)\overline{F}(u-k),$$

$$I_3(s,u) = \mathrm{E}[e^{-s\tau_N^+(u)},\ \xi_* < u] - \mathrm{E}[e^{-s\tau_N^+(u)},\ \xi_* < u,\ \xi_1(\zeta) \geq u] =$$
$$= \mathrm{E}[e^{-s(\zeta+\tau_N^+(u-\xi_*))},\ \xi_* < u] - p_- \mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)},\ \xi_1(\zeta) = u] =$$
$$= \sum_{k=1}^{u-1} Q^N(s, u-k)\,\tilde{p}_k^*(s) - p_- \mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)},\ \xi_1(\zeta) = u].$$

Із (43) можна одержати рівняння типу згортки для $Q^N(s,u)$:

$$Q^N(s,u) - \sum_{k=-1}^{u-1} Q^N(s,u-k)\,\tilde{p}_k^*(s) =$$

$$= I_1(s,u) + I_2(s,u) - p_{-1}\mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)},\ \xi_1(\zeta) = u], \quad 0 < u < N. \tag{44}$$

Враховуючи граничні умови

$$Q^N(s,u) = 1, \quad u \leq 0, \qquad Q^N(s,u) = 0, \quad u \geq N, \tag{45}$$

рівняння (44) запишемо так:

$$Q^N(s,u) - \sum_{k=-1}^{\infty} Q^N(s,u-k)\,\tilde{p}_k^*(s) = A(u,s), \tag{46}$$

де

$$A(u,s) = I_1(s,u) + I_2(s,u) - p_{-1}\mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)},\ \xi_1(\zeta) = u] - \sum_{k=u}^{\infty} p_k^*(s).$$

Генератриса для $\tilde{p}_k^*(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,\mathrm{P}\{\zeta + \xi_1(y) = k\}\,dG(y)$ має вигляд

$$\sum_{k=-1}^{\infty} z^k p_k^*(s) = p(z)\,g(s - \psi(z)),$$

а символом оператора рівняння (46) є функція (див. (11))

$$k_s(z) = 1 - p(z)\,g(s - \psi(z)),$$

яка вище розглядалась для неперервного знизу параметризованого блукання з резольвентою (18).

Якщо позначити

$$\tilde{Q}^N(s,u) = 1 - Q^N(s,u), \qquad \tilde{A}(u,s) = 1 - g(s) + A(u,s), \tag{47}$$

то з умов (45) та рівняння (46) випливають граничні умови

$$\tilde{Q}^N(s,u) = 0, \quad u \leq 0, \qquad \tilde{Q}^N(s,u) = 1, \quad u \geq N, \tag{48}$$

та рівняння

$$\tilde{Q}^N(s,u-k)\,p_K^*(s) - \tilde{Q}^N(s,u) = \tilde{A}(u,s). \tag{49}$$

За властивістю 4 (див. [2, с. 195, 196]) розв'язок рівняння (49) з граничними умовами (48) слід шукати у вигляді

$$\tilde{Q}^N(s,n) = C_s R_n(s) + \sum_{k=0}^{n} R_{n-k}(s)\,\tilde{A}(k,s), \tag{50}$$

де згідно з другою умовою в (48)

$$C_s = R_N^{-1}(s)\left[1 - \sum_{k=0}^{N} R_{N-k}(s)\,\tilde{A}(k,s)\right].$$

Підставляючи C_s в (50), одержуємо співвідношення для $\tilde{Q}^N(s,u)$, з якого випливає (40).

Зауважимо, що момент $\overline{\tau}_N^-(u)$ першого виходу через нижню границю інтервалу $(0;N)$ процесу $\xi_u(t) = u + \xi(t)$ та момент $\tau_N^-(u)$ першого виходу через нижню границю інтервалу $(u-N;u)$ процесу $\xi(t)$ пов'язані співвідношенням

$$\overline{\tau}_N^-(u) \doteq \tau_N^-(N-u).$$

Тому

$$\mathrm{E}e^{-s\overline{\tau}_N^-(u)} = \mathrm{E}e^{-s\tau_N^-(N-u)} = \frac{R_u(s)}{R_N(s)}. \tag{51}$$

Зауважимо також, що

$$\tau_N(u) \doteq \begin{cases} \tau_N^+(u), & \xi(\tau_N(u)) > u; \\ \overline{\tau}_N^-(u), & \xi(\tau_N(u)) > u-N. \end{cases}$$

Тому, додавши генератриси $\tau_N^+(u)$ та $\overline{\tau}_N^-(u)$, з (41) та (52) одержимо співвідношення (42) для $\tau_N(u)$, що й доводить теорему.

Зауваження. **1.** Якщо $\xi_1(t) \equiv 0$ $(\xi(t) = \chi(t))$, то всі твердження для аналогічних функціоналів процесу $\chi(t)$ залишаються справедливими. В цьому випадку

$$I_1(s,u) = \mathrm{E}[e^{-s\tau'(u)},\ \xi_1(\zeta) = u] = A(u,s) = 0,$$

$$I_2(s,u) = g(s)\,\overline{F}(u), \qquad \tilde{A}(u,s) = 1 - g(s),$$

а співвідношення для генератрис $\tau_N(u)$ та $\tau_N^+(u)$ набирають вигляду

$$Q(N,s,n) = 1 + (1-g(s))\frac{R_n(s)}{R_N(s)}\sum_{k=1}^{N} R_k(s) - (1-g(s))\sum_{k=1}^{n} R_k(s), \tag{52}$$

$$Q^N(s,n) = 1 - \frac{R_n(s)}{R_N(s)}\left[1 - \sum_{k=1}^{N} R_k(s)\,(1-g(s))\right] -$$

$$- (1-g(s))\sum_{k=1}^{n} R_k(s), \quad 0<n<N, \quad R_0(s) = 0. \tag{53}$$

2. Дещо спрощується генератриса $\varphi_*^+(s,z)$ (15) та розподіли відповідних функціоналів, якщо стрибки $\xi_1(t)$ геометрично розподілені (див. [9]).

Якщо стрибки $\chi(t)$ мають геометричний розподіл

$$\mathrm{E}z^{\xi_n} = \frac{1-\nu}{1-\nu z^{-1}}, \quad 0<\nu<1, \quad \xi_n \le 0, \quad |z| \ge 1, \tag{54}$$

то символ оператора L (див. (6), (7)) має вигляд

$$K(s,z) = 1 - \frac{1-\nu}{1-\nu z^{-1}} g(s-\psi(z)) = \frac{k_s^*(z)}{1-\nu z^{-1}}, \quad |z| = 1,$$

де

$$k_s^*(z) = 1 - (\nu z^{-1} + (1-\nu) g(s-\psi(z))) =$$
$$= 1 - (\nu + (1-\nu) g(s)) f_s^*(z) \tag{55}$$

можна розглядати як ядерну функцію неперервного блукання з відповідним параметризованим розподілом кроку

$$p_k^*(s) =$$
$$= (1-\nu)(\nu + (1-\nu) g(s))^{-1} \mathrm{E}[e^{-s\zeta}, \xi_1(\zeta) = k], \quad k \ge 0,$$

$$p_{-1}^*(s) = \nu(\nu + (1-\nu) g(s))^{-1}, \quad f_s^*(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} p^*(s) z^k.$$

Якщо невідома характеристика будь-якого функціонала задовольняє рівняння

$$q(s,z) K(s,z) = b(s,z), \quad |z| = 1,$$

то при умові (54) для її знаходження можна використати рівняння

$$q(s,z) k_s^*(z) = (1 - \nu z^{-1}) b(s,z), \tag{56}$$

розв'язок якого з відповідними граничними умовами виражається через видозмінену резольвенту $R_n^*(s)$, $n \ge 1$. За аналогією з означенням (17) при достатньо малих z

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n R_n^*(s) = (\nu z^{-1} + (1-\nu) g(s-\psi(z)) - 1)^{-1}.$$

1. *Королюк В. С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов. – Киев: Наук. думка, 1975. – 138 с.
2. *Королюк В. С., Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Граничные задачи для случайных блужданий. – Ашхабад: Ылым, 1987. – 256 с.
3. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями. – Киев: Наук. думка, 1990. – 246 с.
4. *Гусак Д. В.* Про узагальнений напівнеперервний пуассонівський цілозначний процес з відбиттям // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1998. – Вип. 59. – С. 37–43.
5. *Королюк В. С., Пирлиев Б.* Случайное блуждание на суперпозиции двух процессов восстановления // Укр. мат. журн. – 1984. – **36**, № 4. – С. 431–437.
6. *Братийчук Н. С., Пирлиев Б.* О величине перескока уровня случайным блужданием на суперпозиции двух процессов восстановления // Там же. – 1985. – **37**, № 5. – С. 689–695.
7. *Братийчук Н. С., Пирджанов Б.* Предельная теорема для момента достижения и величины перескока уровня регенерирующим полумарковским блужданием // Теория случайн. процессов и ее прил. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 41–48.
8. *Гусак Д. В.* Граничні задачі для процесів з незалежними приростами на скінченних ланцюгах Маркова та для напівмарковських процесів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 320 с.
9. *Gusak D. V., Rozumenko A. M.* On extrema of integer-valued processes defined by sums of a random number of addenda // Random Oper. and Stochast. Equat. – 1995. – **3**, № 1. – P. 87–100.

Одержано 19.04.99