УДК 517.925.51

И. Е. Витриченко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛИУСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

For essentially nonlinear differential systems with the limit matrix of coefficients of a first approximation system, we obtain sufficient conditions of function polystability which generalizes a notion of exponential polystability.

Одержано достатні умови функціональної полістійкості, що узагальнює поняття експоненціальної полістійкості, для суттєво нелінійних диференціальних систем з граничною матрицею коефіцієнтів системи першого наближення.

Введение. Исследование [1 – 3] критических случаев устойчивости дифференциальных систем (д. с.) с медленно изменяющимися коэффициентами позволяет ввести понятие функциональной полиустойчивости, обобщающее понятие экспоненциальной полиустойчивости [4].

Результаты по функциональной Y_{n_s}-устойчивости и полиустойчивости получены с помощью обобщенных „срезающих" [1], нелинейных „замороженных" [5], методов А. В. Костина [6] и функций Ляпунова [7].

1. Постановка задачи. Исследуется д. с. возмущенного движения

$$Y' = F(t, Y), \tag{1}$$

где $Y = \mathrm{col}\,(y_1, \ldots, y_n)$, $t \in \Delta \equiv [t_0, \omega[$, $t_0 \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R} \equiv\,]-\infty, +\infty[$, $\omega \le +\infty$, F: $\Delta \times S(Y, r) \Rightarrow \boldsymbol{R}^n$, $S(Y, r) \equiv \{Y, Y^T\colon \|Y\| \le r;\ r \in \boldsymbol{R}_+\}$, $\boldsymbol{R}_+ \equiv\,]0, +\infty[$, $\boldsymbol{R}^n$ — n-мерное вещественное евклидово пространство,

$$F \equiv \pi P Y + G,\ \ \pi\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+,\ \ P = \|p_{sk}\|,\ \ p_{sk} \in \boldsymbol{C}_{\Delta}^{(h)},\ \ p_{sk} = p_{sk}^0 + o_{sk}(1),$$
$$p_{sk}^{(l)} = o_{skl}(1),\ \ t \uparrow \omega,\ \ p_{sk}^0 \in \boldsymbol{R},\ \ s, k = \overline{1, n},\ \ l \in \{\overline{1, h}\},\ \ h \in \boldsymbol{N},$$

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел.

Уравнение $\det(P_0 - \lambda E_n) = 0$, $P_0 = \|p_{sk}^0\|$, $s, k = \overline{1, n}$, имеет n_0 корней λ_0 с условием $\mathrm{Re}\,\lambda_0 = 0$, а все остальные его корни λ^* имеют свойство $\mathrm{Re}\,\lambda^* \ne 0$;

$$G \equiv \sum_{\|Q\|=2}^{m} G_Q Y^Q + R_m,$$

$G_Q \equiv \mathrm{col}\,(G_{1Q}, \ldots, G_{nQ})$, $G_{kQ} \in \boldsymbol{C}_{\Delta}^{(h)}$, $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $q_k \in \{0\} \cup \boldsymbol{N}$, $k = \overline{1, n}$, $Y^Q \equiv \prod_{k=1}^{n} y_k^{q_k}$, $\|R_m\| \le L\,\|X\|^{m+\alpha}$, $L\colon \Delta \Rightarrow \{0\} \cup \boldsymbol{R}_+$, $L \in \boldsymbol{C}_{\Delta}$, $m \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}_+$.

Пусть состояние равновесия $Y = \overline{0}$, $\overline{0} \equiv (0, \ldots, 0)$, является единственным для д. с. (1) при $Y \in S(Y, r)$.

Ниже приняты следующие обозначения и определения: $X = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$, $X \equiv \mathrm{col}\,(X_{n_0}, X_{n-n_0}) \equiv \mathrm{col}\,(X_{n_1}, \ldots, X_{n_{k_0}})$, $X_k = \mathrm{col}\,(x_{1,k}, \ldots, x_{k,k})$, X_k — субвектор вектора X,

$$\|X_k\| \equiv \left(\sum_{s=1}^{k} |x_{s,k}|^2\right)^{1/2}, \quad \|X\| \equiv \left(\sum_{s=1}^{n} |x_s|^2\right)^{1/2} \equiv \left(\sum_{k=1}^{k_0} \|X_{n_k}\|^2\right)^{1/2};$$

E_k, H_k — соответственно матрицы единичная и сдвига размеров $k \times k$, $P_{s,k}$ — матрица размера $s \times k$, $P_{s,s} \equiv P_s$;

$$\|A\| \equiv \left(\sum_{s,k=1}^{n} |a_{sk}|^2 \right)^{1/2}, \quad A = \|a_{sk}\|, \quad s, k = \overline{1, n},$$

$$X^{-1} = \operatorname{col}(x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}), \quad \langle X, Y \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k y_k, \quad XY \equiv \operatorname{col}(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n);$$

$$\Lambda = \operatorname{maxi}\{ f_k : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R},\ k = \overline{1, n} \}, \text{ если } \Lambda : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+, \ \Lambda^{-1} f_k = c_k + o_k(1),$$

$$t \uparrow \omega, \quad c_k \in \boldsymbol{R}, \quad k = \overline{1, n}, \quad \sum_{k=1}^{n} |c_k| = 0;$$

$$\operatorname{grad} V(t, x) \equiv \operatorname{col}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right);$$

$$\boldsymbol{R}_- \equiv]-\infty, 0[; \quad \boldsymbol{S}^*(X; \rho_1, \rho_2) \equiv \{ X : \rho_1 \le \|X\| \le \rho_2; \ \rho_1, \rho_2 \in \boldsymbol{R}_+ \};$$

C — множество комплексных чисел.

Определение 1. *Состояние равновесия* $Y = \overline{0}$ *д. с.* (1) *называется функционально* Y_{n_s}*-устойчивым (в малом), если существуют* $f_{n_s} : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $f_{n_s}(t) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что для субвектора* $Y_{n_s} = Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0)$ *произвольного решения* $Y(t; T_\varepsilon, Y_0)$, $Y_0 \equiv Y(T_\varepsilon; T_\varepsilon, Y_0)$ *д. с.* (1) *выполняется неравенство*

$$\| Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0) \| \le \varepsilon f_{n_s}(t), \tag{2}$$

для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ *при* $\|Y_0\| \le \delta_\varepsilon$ *и* $\|Y\|^2 - \|Y_{n_s}\|^2 < +\infty$, $1 \le s \le k_0$.

Определение 2. *Состояние равновесия* $Y = \overline{0}$ *д. с.* (1) *называется функционально полиустойчивым (в малом), если существуют* $r_s \in \boldsymbol{R}_+$, $s = \overline{1, k_0}$, $f : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $f = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что для субвекторов* $Y_{n_s} = Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0)$ *произвольного решения* $Y(t; T_\varepsilon, Y_0)$, $Y_0 \equiv Y(T_\varepsilon; T_\varepsilon, Y_0)$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{s=1}^{k_0} \|Y_{n_s}(t; T_\varepsilon, Y_0)\|^{2r_s} \le \varepsilon f(t) \tag{3}$$

для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ *при* $\|Y_0\| \le \delta_\varepsilon$.

***Замечание* 1.** В частном случае, когда $T_\varepsilon \equiv t_0$, $f(t) \equiv \exp[-\lambda(t - t_0)]$, $\lambda \in \boldsymbol{R}_+$, определения 1, 2 совпадают с определениями экспоненциальной полиустойчивости □[4].

2. Основные результаты. Рассмотрим сначала самый простой случай, когда для д. с. (1) задача типа (А) [1] ранга n_0 решена полностью без редукции ее к задачам типа (А) рангов, меньших n_0. Тогда с помощью обобщенных „срезающих" [1] и нелинейных „замороженных" [5] преобразований можно построить невырожденную замену

$$
\begin{aligned}
Y_{n_0} &= R_{n_0} X_{n_0} + R_{n_0, n-n_0} \left[X_{n-n_0} + \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} h_{Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}} \right], \\
Y_{n-n_0} &= R^*_{n-n_0, n_0} X_{n_0} + R^*_{n-n_0} \left[X_{n-n_0} + \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} h_{Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}} \right],
\end{aligned} \tag{4}
$$

где R_{n_0}, $R_{n_0, n-n_0}$, $R^*_{n-n_0, n_0}$, $R^*_{n-n_0}$ — известные матрицы; $\|R_{n_0, n-n_0}\|$, $\|R^*_{n-n_0, n_0}\| \equiv O(\|P - P_0\|)$, $t \uparrow \omega$; $\|R_{n_0}\|$, $\|R^*_{n-n_0}\| \le M_0$, $M_0 \in \boldsymbol{R}_+$, $h_{Q_{n_0}}: \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $\|Q_{n_0}\| = \overline{2, m}$, — известные функции, приводящую д. с. (1) к д. с. вида

$$
\begin{aligned}
X'_{n_0} &= \pi \sigma P_{n_0} X_{n_0} + \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} g_{n_0, Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}} + \Phi_{n_0}(t, X), \\
X'_{n-n_0} &= \pi P^*_{n-n_0} X_{n-n_0} + X_{n-n_0} \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m-1} g^*_{n-n_0, Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}} + \Phi^*_{n-n_0}(t, X),
\end{aligned} \tag{5}
$$

$P_{n_0} \equiv \pi \sigma \operatorname{diag}(\mu_1 E_{n_1} + H_{n_1}, \ldots, \mu_{s_0} E_{n_{s_0}} + H_{n_{s_0}})$ или $P_{n_0} \equiv \|0\|$, $\mu_s \in C$, $s = \overline{1, s_0}$,

$$
\sum_{s=1}^{s_0} n_s = n_0,
$$

$$
P^*_{n-n_0} \equiv \pi \operatorname{diag}(\lambda_1^* E_{m_1} + H_{m_1}, \ldots, \lambda^*_{p_0} E_{m_{p_0}} + H_{m_{p_0}}), \quad \operatorname{Re} \lambda_k^* \ne 0, \ k = \overline{1, p_0},
$$

$$
\sum_{s=1}^{p_0} m_s = n - n_0,
$$

$g_{n_0, Q_{n_0}}$, $g^*_{n-n_0, Q_{n_0}}$ — известные функции; $\Phi_{n_0}(t, X)$, $\Phi^*_{n-n_0}(t, X)$ — малы в некотором смысле.

***Замечание* 2.** Величины σ, μ_s, $s = \overline{1, s_0}$, определяются в процессе приведения д. с. (1) к д. с. (5).

Рассмотрим вопрос о функциональной Y_{n_0}-устойчивости. Выделим из д. с. (5) д. с. вида

$$
X'_{n_0} = \pi \sigma P_{n_0} X_{n_0} + \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} g_{n_0, Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}}. \tag{6}
$$

Предположим, что д. с. (6) можно привести к эквивалентному ей дифференциальному уравнению (д. у.) n_0-го порядка относительно одной из компонент вектор-столбца X_{n_0}. Тогда методом, например, А. В. Костина [6] можно получить асимптотическое представление всех так называемых правильных решений полученного д. у. Обозначим через $\Psi_{n_0} = \Psi_{n_0}(t)$ вектор-столбец асимптотического представления решения д. с. (6), соответствующего одному из правильных решений д. у. n_0-го порядка.

Теорема 1. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *преобразование* (4) *приводит ее к виду* (5);

2) *существуют вектор-столбец* $\Psi_{n_0} = \Psi_{n_0}(t)$ *асимптотического пред-*

ставления одного из решений д. с. (6) *такой, что существует* $\Psi_{n_1}^{-1}$, $t \in \Delta$, $\|\Psi_{n_0}\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и*

$$\|\Psi_{n_0}\| \neq 0, \quad \|\Psi_{n_0}\| \leq M_1, \quad \|P - P_{n_0}\| \, \|\Psi_{n_0}\|^{-1} \leq M_1,$$

$$\|h_{Q_{n_0}}\| \|\Psi_{n_0}\|^{Q_{n_0}} \leq M_1, \quad t \in \Delta, \quad M_1 \in \boldsymbol{R}_+, \quad \|Q_{n_0}\| = \overline{2, m};$$

3) *существует положительно определенная, допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова* $V = V(t, X_{n_0})$ *такая, что*

$$\left\langle \operatorname{grad} V(t, X_{n_0}), \ \Psi_{n_0}^{-1} \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} g_{n_0, Q_{n_0}} \Psi_{n_0}^{Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}} \right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda \left[W_0(t, X_{n_0}) + W_1(t, X_{n_0}) \right],$$

$$\Lambda \equiv \operatorname{maxi} \left\{ \Psi_{n_0}^{-1} g_{n_0, Q_{n_0}} \Psi_{n_0}^{Q_{n_0}}; \ \|Q_{n_0}\| = \overline{2, m} \right\},$$

$W_0(t, X_{n_0})$ — *определенно отрицательная функция,* $W_1(t, X_{n_0}) = o(1)$,

$$\Lambda^{-1} \|\Psi_{n_0}^{-1} \Psi_{n_0}'\| = o(1), \quad \Lambda^{-1} \frac{\partial V}{\partial t} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\|X_{n_0}\| < +\infty;$$

4) $\Lambda^{-1} \sigma \pi = o(1)$, $\Lambda^{-1} \|\Psi_{n_0}^{-1} \Phi_{n_0}(t, \Psi_{n_0} X_{n_0}, X_{n-n_0})\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\|X\| < +\infty$.

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n_0}*-устойчиво в малом.*

Доказательство. В силу условия 2 теоремы существует

$$\sup_{t \in \Delta} \|\Psi_{n_0}\| \left[M_0 + \|R_{n_0, n-n_0}\| \|\Psi_{n_0}\|^{-1} \left(1 + \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} \|h_{Q_{n_0}}\| \|\Psi_{n_0}\|^{Q_{n_0}} \right) \right] =$$

$$= h_0 < +\infty.$$

В д. с. (5) выполним замену

$$X_{n_0} = \Psi_{n_0} Z_{n_0}, \qquad X_{n-n_0} = Z_{n-n_0}, \tag{7}$$

где $Z = \operatorname{col}(Z_{n_0}, Z_{n-n_0}) \in S(Z, r^*)$, $r^* = \min\{1, h_0^{-1} r\}$.

Покажем, что новая д. с. устойчива [8] относительно части (Z_{n_0}) своих переменных. Тогда относительно Z_{n_0} получим д. с. вида

$$Z_{n_0}' = (\pi \sigma P_{n_0} - \Psi_{n_0}^{-1} \Psi_{n_0}' E_{n_0}) Z_{n_0} +$$

$$+ \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} \Psi_{n_0}^{-1} g_{n_0, Q_{n_0}} \Psi_{n_0}^{Q_{n_0}} Z_{n_0}^{Q_{n_0}} + \Psi_{n_0}^{-1} \Phi_{n_0}(t, \Psi_{n_0} Z_{n_0}, Z_{n-n_0}), \tag{8}$$

для которой (при $\|Z_{n-n_0}\| \leq r^* < +\infty$) имеем задачу [9] о центре $Z_{n_0} = \overline{0}$ притяжения ее решений при $t \uparrow \omega$.

Полную производную функции $V = V(t, Z_{n_0})$ по t в силу уравнений д. с. (8) можно представить в виде

$$\frac{\partial V}{\partial t} \equiv \Lambda^{-1}\Big\{W_0(t, Z_{n_0}) + W_1(t, Z_{n_0}) +$$

$$+ \Lambda^{-1}\langle \operatorname{grad} V(t, Z_{n_0}), (\pi\sigma P_{n_0} - \Psi^{-1}\Psi'_{n_0} E_{n_0}) Z_{n_0}\rangle +$$

$$+ \Lambda^{-1}\langle \operatorname{grad} V(t, Z_{n_0}), \Psi_{n_0}^{-1}\Phi_{n_0}(t, \Psi_{n_0} Z_{n_0}, Z_{n-n_0})\rangle + \Lambda^{-1}\frac{\partial V}{\partial t}\Big\}. \tag{9}$$

Зададим произвольное сколь угодно малое $\varepsilon \in]0, r^*]$. Тогда в силу свойств функции $V = V(t, Z_{n_0})$ существует $\inf\limits_{t\in\Delta,\ \|Z_{n_0}\|=\varepsilon} V(t, Z_{n_0}) \equiv l_\varepsilon > 0$. Кроме того, существует $r_\varepsilon \in]0, \varepsilon[$ такое, что $\sup\limits_{t\in\Delta,\ \|Z_{n_0}\|=r_\varepsilon} V(t, Z_{n_0}) \equiv q_\varepsilon,\ q_\varepsilon < l_\varepsilon$.

Из условий 2 – 4 теоремы и (9) следует существование $T_\varepsilon \in \Delta$ такого, что для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ в кольцеобразной области $S^*(Z_{n_0}; r_\varepsilon, \varepsilon)$ выполняется неравенство $\dfrac{dV}{dt} < 0$.

Пусть

$$\inf_{\substack{t\in[T_\varepsilon,\omega[,\ Z_{n_0}\in S^*(Z_{n_0};r_\varepsilon,\varepsilon)\\ \|Z_{n-n_0}\|\le r^*}} \left|\frac{dV}{dt}\right| \equiv p_\varepsilon > 0.$$

Выберем $\delta_\varepsilon \in]0, r_\varepsilon]$, начальную точку $Z = Z_0$, $\|Z_0\| \le \delta_\varepsilon$, и рассмотрим произвольное решение $Z_{n_0} = Z_{n_0}(t; T_\varepsilon, Z_0)$ д. с. (8). Покажем, что для всех $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ выполняется неравенство $\|Z_{n_0}(t; T_\varepsilon, Z_0)\| < \varepsilon$. Допустим противное. Тогда пусть $T_1 \in [T_\varepsilon, T_2[$, $T_2 \in [T_\varepsilon, \omega[$ — моменты времени такие, что $\|Z_{n_0}(T_1; T_\varepsilon, Z_0)\| = r_\varepsilon$, $\|Z_{n_0}(T_2; T_\varepsilon, Z_0)\| = \varepsilon$, и для всех $t \in [T_1, T_2]$ решение $Z_{n_0}(t; T_\varepsilon, Z_0)$ принадлежит кольцеобразной области $S^*(Z_{n_0}; r_\varepsilon, \varepsilon)$. В результате получаем неравенство

$$0 < l_\varepsilon - q_\varepsilon \le$$

$$\le V[T_2, Z_{n_0}(T_2; T_\varepsilon, Z_0)] - V[T_1, Z_{n_0}(T_1; T_\varepsilon, Z_0)] = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dV}{dt}\,dt \le$$

$$\le -\int_{T_1}^{T_2} \left|\frac{dV}{dt}\right| dt \le -\int_{T_1}^{T_2} p_\varepsilon\,dt = -p_\varepsilon(T_2 - T_1) < 0.$$

Полученное противоречие опровергает допущение. Тогда из замен (4), (7) для соответствующего решения $Y_{n_0} = Y_{n_0}(t; T_\varepsilon, Y_0)$ д. с. (1) вытекает оценка $\|Y(t; T_\varepsilon, Y_0)\| \le f_{n_0}(t)\varepsilon$, где $f_{n_0}(t) \equiv \|\Psi_{n_0}(t)\|\,[M_0 + r^* + M_1(m-1)]$.

Теорема 2. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *замена* (4) *приводит ее к виду* (5), *где* $\operatorname{Re}\lambda_k^* \in \boldsymbol{R}_-$, $k = \overline{1, p_0}$, $\pi^{-1} g^*_{n-n_0, Q_{n_0}} = o(1)$, $t\uparrow\omega$, $\|Q_{n_0}\| = \overline{2, m}$;

2) *существует функция* $f\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $f \in C^{(1)}_\Delta$, *такая, что* $f = o(1)$, $t\uparrow\omega$, *и*

$$f \le M_1,\ \|P - P_0\| f^{-1} \le M_1,\ \|h_{Q_{n_0}}\| f^{-1} \le M_1,\ t\in\Delta,\ M_1 \in \boldsymbol{R}_+,\ \|Q_{n_0}\| = \overline{2, m},$$

$$\pi^{-1} f' f^{-1} = o(1), \quad \pi^{-1} f^{-1} \| \Phi^*_{n-n_0}(t, X_{n_0}, f\, X_{n-n_0}) \| = o(1), \ t \uparrow \omega, \ \|X\| < +\infty.$$

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n-n_0}*-устойчиво в малом.*

Доказательство. В силу условия 2 теоремы существует

$$\sup_{t \in \Delta} f \left[\| R^*_{n_0, n-n_0} \| f^{-1} + M_0 \left(1 + \sum_{\|Q_{n_0}\| = 2}^{m} \| h_{Q_{n_0}} \| f^{-1} \right) \right] = h_0 < +\infty.$$

В д. с. (5) выполним замену

$$X_{n_0} = Z_{n_0}, \quad X_{n-n_0} = f Z_{n-n_0}, \tag{10}$$

где $Z = \operatorname{col}(Z_{n_0}, Z_{n-n_0}) \in S(Z, r^*)$, $r^* = \min\{1, h_0^{-1} r\}$.

В результате относительно Z_{n-n_0} получим д. с. вида

$$Z'_{n-n_0} = \pi (P^*_{n-n_0} - \pi^{-1} f' f^{-1} E_{n-n_0}) Z_{n-n_0} +$$

$$+ Z_{n-n_0} \sum_{\|Q_{n_0}\| = 1}^{m-1} g^*_{n-n_0, Q_{n_0}} Z_{n_0}^{Q_{n_0}} + f^{-1} \Phi^*_{n-n_0}(t, Z_{n_0}, f Z_{n-n_0}), \tag{11}$$

для которой (при $\| Z_{n_0} \| \le r^* < +\infty$) имеем задачу о центре притяжения решений [9].

В качестве функции Ляпунова для д. с. (11) используем решение уравнения вида

$$\langle \operatorname{grad} V, P^*_{n-n_0} Z_{n_0} \rangle = -\| Z_{n-n_0} \|^2. \tag{12}$$

Решение $V = V(t, Z_{n_0})$ уравнения (12) существует, единственно, будучи положительно определенной квадратичной формой с постоянными коэффициентами от компонент Z_{n-n_0} [10, с. 67].

Ее полная производная $\dfrac{dV}{dt}$ в силу д. у. д. с. (11) представима в виде

$$\frac{dV}{dt} \equiv -\pi \Bigg[\| Z_{n-n_0} \|^2 +$$

$$+ \left\langle \operatorname{grad} V, \pi^{-1} f' f^{-1} E_{n-n_0} Z_{n-n_0} - Z_{n-n_0} \sum_{\|Q_{n_0}\| = 2}^{m} \pi^{-1} g^*_{n-n_0, Q_{n_0}} Z_{n_0}^{Q_{n_0}} \right\rangle -$$

$$- \langle \operatorname{grad} V, \pi^{-1} f^{-1} \Psi^*_{n-n_0}(t, Z_{n_0}, f Z_{n-n_0}) \rangle \Bigg].$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям доказательства теоремы 1. В результате получим, что субвектор $Y_{n-n_0} = Y_{n-n_0}(t; T_\varepsilon, Y_0)$ произвольного решения д. с. (1) может быть оценен таким образом:

$$\| Y_{n-n_0}(t; T_\varepsilon, Y_0) \| \le f^*_{n-n_0}(t)\, \varepsilon,$$

где $f^*_{n-n_0}(t) \equiv f(t) \{ r^* + M_0 [1 + M_1 (m+1)] \}$.

Теорема 3. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *замена* (4) *приводит ее к виду* (5), *где* $\operatorname{Re}\lambda_k^* \in \boldsymbol{R}_-$, $k = \overline{1, p_0}$, $\pi^{-1} g^*_{n-n_0, Q_{n_0}} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\|Q_{n_0}\| = \overline{2, m}$;

2) *существует вектор-столбец* $\Psi_{n_0} = \Psi_{n_0}(t)$ *асимптотического представления одного из решений д. с.* (6) *такой, что существует* $\Psi_{n_0}^{-1}$, $t \in \Delta$, *и* $\|\Psi_{n_0}\| \neq 0$, $\|\Psi_{n_0}\| \leq M_1$, $t \in \Delta$, $M_1 \in \boldsymbol{R}_+$, $\|\Psi_{n_0}\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$;

3) *существует положительно определенная, допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова* $V = V_{n_0}(t, X_{n_0})$ *такая, что*

$$\left\langle \operatorname{grad} V_{n_0}(t, X_{n_0}),\ \Psi_{n_0}^{-1} \sum_{\|Q_{n_0}\|=2}^{m} g_{n_0, Q_{n_0}} \Psi_{n_0}^{Q_{n_0}} X_{n_0}^{Q_{n_0}} \right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda [W_0(t, X_{n_0}) + W_1(t, X_{n_0})],$$

$$\Lambda \equiv \operatorname{maxi}\left\{\Psi_{n_0}^{-1} g_{n_0, Q_{n_0}} \Psi_{n_0}^{Q_{n_0}};\ \|Q_{n_0}\| = \overline{2, m}\right\},$$

$W_0(t, X_{n_0})$ — *определенно отрицательная функция*, $W_1(t, X_{n_0}) = o(1)$,

$$\Lambda^{-1} \|\Psi_{n_0}^{-1} \Psi_{n_0}'\| = o(1), \quad \Lambda^{-1} \sigma\pi = o(1),$$

$$\Lambda^{-1} \frac{\partial V_{n_0}}{\partial t} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\|X_{n_0}\| < +\infty, \quad \|P - P_0\| \, \|\Psi_{n_0}\|^{-1} \leq M_1, \quad t \in \Delta;$$

4) *существует функция* $f\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $f \in \boldsymbol{C}_\Delta^{(1)}$, *такая, что*

$$f = o(1), \quad \pi^{-1} f' f^{-1} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\|h_{Q_{n_0}} \Psi_{n_0}^{Q_{n_0}}\| f^{-1} \leq M_1, \quad t \in \Delta, \quad \|Q_{n_0}\| = \overline{2, m};$$

$$\Lambda [W_0(t, X_{n_0}) - \pi \|X_{n-n_0}\|^2]^{-1} \times [\|\Psi_{n_0}^{-1} \Phi_{n_0}(t, \Psi_{n_0} X_{n_0}, f X_{n-n_0})\| +$$

$$+ f^{-1} \|\Phi^*_{n-n_0}(t, \Psi_{n_0} X_{n_0}, f X_{n-n_0})\|] = o(1),$$

$$t \uparrow \omega, \quad 0 < r_0 \leq \|X\| < +\infty, \quad r_0 \in \boldsymbol{R}_+.$$

Тогда ее положение равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально полиустойчиво в малом.*

Доказательство. В д. с. (5) выполним замену

$$Y_{n_0} = \Psi_{n_0} Z_{n_0}, \qquad Y_{n-n_0} = f Z_{n-n_0}.$$

Для д. с. относительно $Z = \operatorname{col}(Z_{n_0}, Z_{n-n_0})$ построим функцию Ляпунова вида

$$V = V_{n_0}(t, Z_{n_0}) + V^*_{n-n_0}(Z_{n-n_0}),$$

где $V = V^*_{n-n_0}(Z_{n-n_0})$ – положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, определяемая [10, с. 67] как единственное решение уравнения вида

$$\langle \operatorname{grad} V^*_{n-n_0}(Z_{n-n_0}), P^*_{n-n_0} Z_{n-n_0} \rangle = -\|Z_{n-n_0}\|^2.$$

Тогда ее полную производную по t можно представить в виде

$$\frac{dV}{dt} \overset{\bullet}{\equiv} [\Lambda W_0(t, Z_{n_0}) - \pi \|Z_{n-n_0}\|^2][1 + G^*(t, Z)],$$

где $G^*(t, Z) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, при $0 < r_0 \le \|Z\| < +\infty$. Далее доказательство теоремы 3 не отличается от доказательства теоремы 1.

В результате для любого сколь угодно малого $\varepsilon \in]0, r[$ существуют $\delta_\varepsilon \in \in]0, \varepsilon[$ и $T_\varepsilon \in \Delta$ такие, что произвольное решение $Y = Y(t; T_\varepsilon, Y_0)$, $\|Y_0\| \le \le \delta_\varepsilon$, д. с. (1) допускает оценку

$$\|Y(t; T_\varepsilon, Y_0)\|^2 \equiv \|Y_{n_0}(t; T_\varepsilon, Y_0)\|^2 + \|Y_{n-n_0}(t; T_\varepsilon, Y_0)\|^2 < f^*(t)\varepsilon,$$

где

$$f^*(t) \equiv (\|\Psi_{n_0}\| + f)^2 \left\{ \left\{ M_0 \frac{\|\Psi_{n_0}\|}{\|\Psi_{n_0}\| + f} + \right.\right.$$

$$\left. + \|R_{n_0, n-n_0}\| \frac{f}{\|\Psi_{n_0}\| + f} [1 + M_1(m-1)] \right\}^2 +$$

$$\left. + \left\{ \|R_{n-n_0, n_0}\| \frac{\|\Psi_{n_0}\|}{\|\Psi_{n_0}\| + f} + M_0 \frac{f}{\|\Psi_{n_0}\| + f} [1 + M_1(m-1)] \right\}^2 \right\},$$

$$r_1 = r_2 = 1.$$

Рассмотрим более общий случай. Пусть проблема типа (А) решена полностью редукцией ее к таким же проблемам рангов, меньших n_0. Тогда можно построить невырожденное преобразование [1, 5] вида

$$\begin{gathered} Y_{n_1} = R^*_{n_1} X_{n_1} + \sum_{k=2}^{k_0} R^*_{n_1, n_k} \left(X_{n_k} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{n_k, Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} \right), \\ k_0 \in N, \quad k_0 \le n, \quad n_1 < n_0, \\ Y_{n_s} = R^*_{n_s, n_1} X_{n_1} + \sum_{k=2}^{k_0} R^*_{n_s, n_k} \left(X_{n_k} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} h_{n_k, Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} \right), \\ \sum_{k=2}^{k_0} n_k = n - n_1, \end{gathered} \tag{13}$$

где $R^*_{n_s, n_k}$, $s, k = \overline{1, k_0}$, — известные матрицы; $\|R^*_{n_k}\| \le M_0$, $t \in \Delta$, $k = \overline{1, k_0}$, $\|R^*_{n_s, n_k}\| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s, k = \overline{1, k_0}$, $s \ne k$, $h^*_{n_k, Q_{n_1}} : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}$, $k = \overline{2, k_0}$, $\|Q_{n_1}\| = \overline{2, m}$, — известные функции, приводящее д. с. (1) к д. с. вида:

$$\begin{gathered} X'_{n_1} = \pi_1 P_{n_1} X_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} g_{n_1, Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_1}(t, X), \\ X'_{n_s} = \pi_s \operatorname{diag}\left[\mu_{1, n_s} E_{p_{1, n_s}} + H_{p_{1, n_s}}, \ldots, \mu_{k_{n_s}, n_s} E_{p_{k_{n_s}, n_s}} + H_{p_{k_{n_s}, n_s}}\right] X_{n_s} + \\ + X_{n_s} \sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} g_{n_s, Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_s}(t, X), \qquad \sum_{q=1}^{k_{n_s}} p_{q, n_s} = n_s, \qquad s = \overline{2, k_0}, \end{gathered} \tag{14}$$

где $\pi_s : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $\pi_s \pi_{s+1}^{-1} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $s = \overline{1, k_0 - 1}$, $\pi_{k_0} \equiv \pi$; μ_{q, n_s}, $q = \overline{1, k_{n_s}}$, $s = \overline{2, k_0}$, — известные константы; $\| P_{n_1} \| \le M_0^*$, $t \in \Delta$, $M_0^* \in \boldsymbol{R}_+$ (P_{n_1} имеет такую же структуру, как и P_{n_0}); $g_{n_s, Q_{n_s}}$, $s = \overline{1, k_0}$, — известные функции; $\| \Phi_{n_s}(t, X) \|$, $s = \overline{1, k_0}$, малы в некотором смысле.

Выделим из первой подсистемы д. с. (14) д. с., содержащую только критический субвектор X_{n_1}, т. е. д. с. вида

$$X'_{n_1} = \pi_1 P_{n_1} X_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\| = 2}^{m} g_{n_1, Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}}. \tag{15}$$

Предположим, что д. с. (15) может быть приведена к д. у. n_1 -го порядка относительно одной из компонент субвектора X_{n_1}. Тогда методом, например, А. В. Костина [6] можно получить асимптотические представления всех так называемых правильных решений полученного д. у. Обозначим через $\Psi_{n_1} = \Psi_{n_1}(t)$ вектор-столбец асимптотического представления решения д. с. (15), соответствующего одному из правильных решений д. у. n_1-го порядка.

***Замечание* 3.** Величины π_s, $s = \overline{1, k_0}$, μ_{q, n_s}, $q = \overline{1, k_{n_s}}$, $s = \overline{2, k_0}$, определяются в процессе сведения д. с. (1) к д. с. (13).

Теорема 4. *Пусть д. с.* (1) *такова, что*:

1) *преобразование* (13) *приводит ее к виду* (14);

2) *существуют вектор-столбец* $\Psi_{n_1} = \Psi_{n_1}(t)$ *асимптотического представления одного из правильных решений д. с.* (15) *такой, что существует* $\Psi_{n_1}^{-1}$, $t \in \Delta$, $\| \Psi_{n_1} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и*

$$\| \Psi_{n_1} \| \ne 0, \quad \| \Psi_{n_1} \| \le M_1^*, \quad \| R^*_{n_1, n_k} \| \| \Psi_{n_1} \|^{-1} \le M_1^*,$$

$$\| h_{n_1, Q_{n_1}} \| \| \Psi_{n_1} \|^{Q_{n_1}} \le M_1^*,$$

$$t \in \Delta, \quad M_1^* \in \boldsymbol{R}_+, \quad k = \overline{2, k_0}, \quad \| Q_{n_1} \| = \overline{2, m};$$

3) *существует положительно определенная, допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова* $V = V^*(t, X_{n_1})$ *такая, что*

$$\left\langle \operatorname{grad} V^*(t, X_{n_1}),\ \Psi_{n_1}^{-1} \sum_{\|Q_{n_1}\| = 2}^{m} g_{n_1, Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} \right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda_* [W_0^*(t, X_{n_1}) + W_1^*(t, X_{n_1})],$$

$$\Lambda_* = \operatorname{maxi} \left\{ \Psi_{n_1}^{-1} g_{n_1, Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}};\ \| Q_{n_1} \| = \overline{2, m} \right\},$$

$W_0^*(t, X_{n_1})$ — *определенно отрицательная функция*, $W_1^*(t, X_{n_1}) = o(1)$,

$$\Lambda_*^{-1} \| \Psi_{n_1}^{-1} \Psi'_{n_1} \| = o(1), \qquad \Lambda_*^{-1} \frac{\partial V^*}{\partial t} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad \| X_{n_1} \| < +\infty;$$

4) $\Lambda_*^{-1} \pi_1 = o(1)$, $\Lambda_*^{-1} \| \Psi_{n_1}^{-1} \Phi_{n_1}(t, \Psi_{n_1} X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_{k_0}}) \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $\| X \| < +\infty$.

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n_1}*-устойчиво в малом.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть д. с.* (1) *такова, что:*

1) *преобразование* (13) *приводит ее к виду* (14), *где*

$$\operatorname{Re}\mu_{q,n_s} \in \boldsymbol{R}_-, \quad q = \overline{1, k_{n_s}},$$

$$\pi_s^{-1} g_{n_s, Q_{n_1}} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad s = \overline{2, k_0}, \quad \| Q_{n_1} \| = \overline{2, m};$$

2) *существует функция* $f_s \colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $f_s \in \boldsymbol{C}_\Delta^{(1)}$, *такая, что* $f_s = o(1)$, $t \uparrow \uparrow \omega$, *и*

$$f_s \le M_1^*, \quad \|R_{n_s,n_1}^*\| f_s^{-1} \le M_1^*, \quad \|h_{n_s,Q_{n_1}}^*\| f_s^{-1} \le M_1^*, \quad t \in \Delta, \quad M_1^* \in \boldsymbol{R}_+,$$

$$\pi_s^{-1} f_s' f_s^{-1} = o(1),$$

$$\pi_s^{-1} f_s^{-1} \|\Phi_{n_s}^* (t, X_{n_1}, \ldots, X_{n_{s-1}}, f_s X_{n_s}, X_{n_{s+1}}, \ldots, X_{n_{k_0}})\| = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\| X \| < +\infty, \quad s = \overline{2, k_0}, \quad \| Q_{n_1} \| = \overline{2, m}.$$

Тогда ее состояние равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально* Y_{n_s}*-устойчиво* ($s = \overline{2, k_0}$) *в малом.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 6. *Пусть д. с.* (1) *такова, что:*

1) *преобразование* (13) *приводит ее к виду* (14), *где*

$$\operatorname{Re}\mu_{q,n_s} \in \boldsymbol{R}_-, \quad q = \overline{1, k_{n_s}},$$

$$\pi_s^{-1} g_{n_s, Q_{n_1}} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad s = \overline{2, k_0}, \quad \| Q_{n_1} \| \le \overline{2, m};$$

2) *существует вектор-столбец* $\Psi_{n_1} = \Psi_{n_1}(t)$ *асимптотического представления одного из правильных решений д. с.* (15) *такой, что существует* $\Psi_{n_1}^{-1}$, $t \in \Delta$, $\| \Psi_{n_1} \| = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и*

$$\| \Psi_{n_1} \| \ne 0, \quad \| \Psi_{n_1} \| \le M_1^*, \quad t \in \Delta, \quad M_1^* \in \boldsymbol{R}_+;$$

3) *существует положительно определенная, допускающая бесконечно малый высший предел функция Ляпунова* $V = V_{n_1}^* (t, X_{n_1})$ *такая, что*

$$\left\langle \operatorname{grad} V_{n_1}^* (t, X_{n_1}), \ \Psi_{n_1}^{-1} \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} g_{n_1, Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}} X_{n_1}^{Q_{n_1}} \right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda_* [W_0^* (t, X_{n_1}) + W_1^* (t, X_{n_1})],$$

$$\Lambda_* = \operatorname{maxi} \left\{ \Psi_{n_1}^{-1} g_{n_1, Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}}; \ \| Q_{n_1} \| = \overline{2, m} \right\},$$

$W_0^* (t, X_{n_1})$ — *определенно отрицательная функция,* $W_1^* (t, X_{n_1}) = o(1)$,

$$\Lambda_*^{-1} \| \Psi_{n_1}^{-1} \Psi_{n_1}' \| = o(1),$$

$$\Lambda_*^{-1} \pi_1 = o(1), \qquad \Lambda_*^{-1} \frac{\partial V_{n_1}}{\partial t} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\| X_{n_1} \| < +\infty, \qquad \| R_{n_1, n_k}^* \| \| \Psi_{n_1} \|^{-1} \le M_1^*, \qquad t \in \Delta, \quad k = \overline{2, k_0};$$

4) *существуют функции* $f_s : \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $f_s \in \boldsymbol{C}_\Delta^{(1)}$, *такие, что*

$$f_s = o(1), \quad \pi_s^{-1} f_s' f_s^{-1} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$\| h_{n_s, Q_{m_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{m_1}} \| f_s^{-1} \leq M_1^*, \quad t \in \Delta, \quad s = \overline{2, k_0}, \quad \| Q_{n_1} \| = \overline{2, m};$$

$$\left[\Lambda_* W_0^*(t, X_{n_1}) - \sum_{s=2}^{m} \pi_s \| X_{n_s} \|^2 \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\| \Psi_{n_1}^{-1} \Phi_{n_1}(t, \Psi_{n_1} X_{n_1}, f_2 X_{n_2}, \ldots, f_{n_{k_0}} X_{n_{k_0}} \| + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=2}^{k_0} f_s^{-1} \| \Phi_{n_s}(t, \Psi_{n_1} X_{n_1}, f_2 X_{n_2}, \ldots, f_{n_{k_0}} X_{n_{k_0}} \| \right] = o(1),$$

$$t \uparrow \omega, \quad 0 < r_0 \leq \| X \| < +\infty, \quad r_0 \in \boldsymbol{R}_+.$$

Тогда ее положение равновесия $Y \equiv \overline{0}$ *функционально полиустойчиво в малом.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110**. – P. 59–65.
2. *Витриченко И. Е.* К устойчивости одного уравнения n-го порядка // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1138–1143.
3. *Витриченко И. Е.* К устойчивости неавтономной существенно нелинейной системы в одном критическом случае // Допов. НАН України. – 1997. – № 8. – С. 25–29.
4. *Мартынюк А. А.* Об экспоненциальной полиустойчивости движения // Teorijska i Primenjena Mehanika. – 1994. – **20**. – P. 143–151.
5. *Костин А. В., Витриченко И. Е.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 4. – С. 819–822.
6. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 522–526.
7. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения и другие работы по теории устойчивости в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
8. *Аминов А. Б., Сиразетдинов Т. К.* Метод функций Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // Прикл. математика и механика. – 1987. – **5**. – С. 709–716.
9. *Витриченко И. Е., Занун Т. Ю.* О центре притяжения квазилинейной неавтономной системы в критическом случае // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 6. – С. 1081–1084.
10. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.

Получено 28.11.97