УДК 517.9

Я. Р. Петришин (Чернів. ун-т)

УСЕРЕДНЕННЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

By using the averaging method, we prove the solvability of multipoint problem with parameters for a nonlinear oscillating system with pulse influence at fixed time moments. We establish estimates of deviation of solutions of initial and averaged problems.

За допомогою методу усереднення доведено розв'язність багатоточкової задачі з параметрами для нелінійної коливної системи, що підлягає імпульсній дії у фіксовані моменти часу. Встановлено оцінки відхилення розв'язків вихідної та усередненої задач.

Розглядається багаточастотна нелінійна коливна система звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, \varphi, \tau), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x, \varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j^{(s)}, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_j^{(s)}} = \varepsilon f_s(x, \varphi), \quad \Delta\varphi|_{\tau=\tau_j^{(s)}} = \varepsilon g_s(x, \varphi), \tag{2}$$

де $s = \overline{1, l}$, $0 < \tau_1^{(1)} < \tau_1^{(2)} < \ldots < \tau_1^{(l)} \leq 2\pi\varepsilon$, $\tau_{j+1}^{(s)} = \tau_j^{(s)} + 2\pi\varepsilon$ для всіх $j \geq 1$ і $s = \overline{1, l}$, $\tau = \varepsilon t$ — „повільний час", $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малий параметр, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D \subset R^n$, D — обмежена область, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in R^m$.

Такі системи виникають при вивченні властивостей слабко зв'язаних осциляторів з повільно змінними частотами, що підлягають імпульсній дії у фіксовані моменти часу [1, 2]. Вважатимемо, що дійсні функції a, b, f_s і g_s, $s = \overline{1, l}$, мають неперервні і рівномірно обмежені сталою σ_1 частинні похідні по $(x, \varphi, \tau) \in D \times R^m \times [0, L]$ до другого порядку включно, майже періодичні по φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, причому

$$[a; b] = \sum_{k=0}^{\infty} [a_k(x, \tau); b_k(x, \tau)] e^{i(\lambda_k, \varphi)} \equiv c(x, \varphi, \tau),$$

$$[f_s; g_s] = \sum_{k=0}^{\infty} [f_{k,s}(x); g_{k,s}(x)] e^{i(\lambda_k, \varphi)} \equiv d_s(x, \varphi).$$

Тут i — уявна одиниця, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k \neq 0$ при $k \geq 1$, (λ_k, φ) — скалярний добуток векторів $\lambda_k = (\lambda_k^{(1)}, \ldots, \lambda_k^{(m)})$ і $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, а функції $c_k(x, \tau) = [a_k(x, \tau); b_k(x, \tau)]$ та $d_{k,s}(x) = [f_{k,s}(x); g_{k,s}(x)]$ справджують нерівності

$$\sup\|c_0\| + \sup\left\|\frac{\partial c_0}{\partial x}\right\| + \sum_{\nu=1}^{n} \sup\left\|\frac{\partial^2 c_0}{\partial x \partial x_\nu}\right\| + \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\left(\|\lambda_k\| + \frac{1}{\|\lambda_k\|}\right)\sup\|c_k\| +$$
$$+ \left(1 + \frac{1}{\|\lambda_k\|}\right)\left(\sup\left\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial c_k}{\partial \tau}\right\|\right) +$$
$$+ \frac{1}{\|\lambda_k\|}\left(\sup\left\|\frac{\partial^2 c_k}{\partial x \partial \tau}\right\| + \sum_{\nu=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2 c_k}{\partial x \partial x_\nu}\right\|\right)\Bigg] \leq \sigma_1, \tag{3}$$

$$\sup\|d_{0,s}\| + \sup\left\|\frac{\partial d_{0,s}}{\partial x}\right\| + \sum_{\nu=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2 d_{0,s}}{\partial x\,\partial x_\nu}\right\| + \sum_{k\ge1}\left[\left(\|\lambda_k\|^3 + \frac{1}{\|\lambda_k\|}\right)\sup\|d_{k,s}\| + \right.$$

$$\left. + \left(\|\lambda_k\|^2 + \frac{1}{\|\lambda_k\|}\right)\sup\left\|\frac{\partial d_{k,s}}{\partial x}\right\| + \left(\|\lambda_k\| + \frac{1}{\|\lambda_k\|}\right)\sum_{\nu=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2 d_{k,s}}{\partial x\,\partial x_\nu}\right\|\right] \le \sigma_1,$$

в яких супремум береться по всіх $x \in D$, $\tau \in [0, L]$.

Задамо для (1), (2) багатоточкові крайові умови вигляду

$$\begin{gathered} F(x|_{\tau=\tau_1}, \ldots, x|_{\tau=\tau_r}, \mu, \varepsilon) = 0, \quad \underset{\sim}{x}|_{\tau=0} = \underset{\sim}{x}^0, \\ \sum_{\nu=1}^{r} B_\nu \varphi|_{\tau=\tau_\nu} = B(x|_{\tau=\tau_1}, \ldots, x|_{\tau=\tau_r}, \mu, \varepsilon), \end{gathered} \tag{4}$$

де $0 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_r \le L$, $r \ge 2$, $\underset{\sim}{x} = (x_{n+1-r_1}, \ldots, x_n)$ — вектор, координатами якого є $r_1 < n$ останніх координат x-компоненти розв'язку $(x; \varphi)$ системи (1), (2), $\underset{\sim}{x}^0$ — заданий r_1-вимірний вектор, $G \ni \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{r_1})$, $\mu_1, \ldots, \mu_{r_1}$ — невідомі параметри, $R^{r_1} \supset G$ — обмежена область, F і B — відповідно n- і m-вимірні вектор-функції змінних $Q = (p_1, \ldots, p_r, \mu) \in D \times \ldots \times D \times G \equiv K$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, B_ν — $m \times m$-матриці. Вважатимемо, що $F(Q, \varepsilon)$, $B(Q, \varepsilon)$, $\frac{\partial}{\partial Q}F(Q, \varepsilon)$ і $\frac{\partial}{\partial Q}B(Q, \varepsilon)$ рівностайно по $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ рівномірно неперервні по $Q \in K$, причому

$$\left\|\frac{\partial}{\partial Q}F(Q, \varepsilon)\right\| + \left\|\frac{\partial}{\partial Q}B(Q, \varepsilon)\right\| \le \sigma_1 \quad \forall\, (Q, \varepsilon) \in K \times (0, \varepsilon_0]. \tag{5}$$

Згідно з прийнятою термінологією [3, 4], задача (1), (2), (4) називається багатоточковою задачею з параметрами. Для її розв'язання, тобто для знаходження розв'язку $(x; \varphi)$ системи (1), (2) і невідомих параметрів $\mu_1, \ldots, \mu_{r_1}$, які задовольняють умови (4), скористаємось методом усереднення за всіма швидкими змінними φ. Розглянемо усереднену задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x}, \tau) + \bar{f}(\bar{x}), \tag{6а}$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x}, \tau) + \bar{g}(\bar{x}), \tag{6б}$$

$$F(\bar{x}|_{\tau=\tau_1}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau_r}, \mu, \varepsilon) = 0, \quad \underset{\sim}{\bar{x}}|_{\tau=0} = \underset{\sim}{x}^0, \tag{6в}$$

$$\sum_{\nu=1}^{r} B_\nu \bar{\varphi}|_{\tau=\tau_\nu} = B(\bar{x}|_{\tau=\tau_1}, \ldots, \bar{x}|_{\tau=\tau_r}, \mu, \varepsilon), \tag{6г}$$

в якій

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \lim_{T\to\infty} T^{-m}\int_0^T \ldots \int_0^T [a(\bar{x}, \varphi, \tau); b(\bar{x}, \varphi, \tau)]\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m = [a_0(\bar{x}, \tau); b_0(\bar{x}, \tau)],$$

$$[\bar{f}, \bar{g}] = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{l} \lim_{T\to\infty} T^{-m} \int_0^T \ldots \int_0^T [f_s(\bar{x}, \varphi); g_s(\bar{x}, \varphi)]\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_m =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{l} [f_{0,s}(\bar{x}); g_{0,s}(\bar{x})].$$

Усереднена задача (6а) – (6г) часто буває простішою для розв'язання, ніж вихідна, оскільки, по-перше, вона не містить імпульсів, і по-друге, рівняння (6а) для повільних змінних $\bar{x}$ не залежить від швидких змінних $\bar{\varphi}$. Для того щоб в процесі еволюції розв'язки системи (1), (2) мало відрізнялись від відповідних розв'язків усередненої системи (6а), (6б) при $\tau \in [0, L]$, потрібно накласти певні обмеження на координати $\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)$ вектора частот $\omega(\tau)$. Вважатимемо, що $\omega(\tau) \in C^p_{[0,L]}\ (p \geq m)$ і

$$\det\left(\Gamma_p^*(\tau)\,\Gamma_p(\tau)\right) > 0 \quad \forall\, \tau \in [0, L], \tag{7}$$

де $\Gamma_p(\tau)$ і $\Gamma_p^*(\tau)$ позначають відповідно матрицю $\left(\dfrac{d^k \omega_\nu(\tau)}{d\tau^k}\right)_{k,\nu=1}^{p,m}$ і транспоновану до неї.

Як і в роботі [2], можна довести наступну лему.

Лема 1. *Якщо виконується нерівність* (7) *і* $\alpha(\tau)$ *— довільна неперервно диференційовна на* $[0, L]$ *скалярна функція, то при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *існує така незалежна від* ε, λ_k *і* α *стала* σ_0, *що для кожних* $\tau \in [0, L]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *справедлива оцінка*

$$\varepsilon \left| \sum_{\tau_j^{(s)} \leq \tau} \alpha\left(\tau_j^{(s)}\right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j^{(s)}} (\lambda_k, \omega(z))\, dz \right\} \right| \leq$$

$$\leq \sigma_0\, \varepsilon^{\frac{1}{p+1}} \left(\|\lambda_k\| + \frac{1}{\|\lambda_k\|} \right) \left(\max_{[0,L]} |\alpha(\tau)| + \max_{[0,L]} \left| \frac{d\alpha(\tau)}{d\tau} \right| \right). \tag{8}$$

Надалі через $(x(\tau, y, \psi, \varepsilon); \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ і $(\bar{x}(\tau, y); \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon))$ позначатимемо ті розв'язки систем відповідно (1), (2) та (6а), (6б), які при $\tau = 0$ набувають значення $(y; \psi)$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (3), (7) *та існує така область* $D_1 \subset \subset D$, *що для кожних* $\tau \in [0, L]$ *і* $y \in D_1$ *крива* $\bar{x} = \bar{x}(\tau, y)$ *лежить в* D *разом із своїм* ρ*-околом. Тоді можна вказати такі сталі* ε_1 *і* σ_2, *що при* $\tau \in [0, L]$, $y \in D_1$, $\psi \in R^m$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$, *справджується нерівність*

$$\|u\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial \psi}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\| \leq \sigma_2\, \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}, \tag{9}$$

в якій $u = u(\tau, y, \psi, \varepsilon) = (x(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, y);\ \varphi(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon))$.

Доведення. Нерівність вигляду

$$\|u\| \leq \sigma_2^{(1)}\, \varepsilon^{\frac{1}{p+1}} \tag{10}$$

одержується із (3), (8) за допомогою відповідним чином модифікованої методики, наведеної в [2]. Із рівнянь (1), (2), (6а), (6б) випливає зображення

$$\frac{\partial}{\partial\psi}u(\tau, y, \psi, \varepsilon) = \int_0^\tau A_1 \frac{\partial}{\partial\psi}u(t, y, \psi, \varepsilon)\,dt + $$

$$+ \varepsilon \sum_{\tau_j^{(s)} \le \tau} \left[A_2^{(s)} \frac{\partial}{\partial\psi}u(t, y, \psi, \varepsilon) + A_3^{(s)} + A_4^{(s)} \right]\Bigg|_{t=\tau_j^{(s)}},$$

де

$$A_1 = \left(\frac{\partial c(c, \varphi, t)}{\partial x} \frac{\partial c(x, \varphi, t)}{\partial \varphi} \right), \quad A_2^{(s)} = \left(\frac{\partial d_s(x, \varphi)}{\partial x} \frac{\partial d_s(x, \varphi)}{\partial \varphi} \right),$$

$$A_3^{(s)} = \frac{\partial d_s(\overline{x}, \overline{\varphi})}{\partial \varphi}, \quad A_4^{(s)} = \frac{\partial d_s(x, \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial d_s(\overline{x}, \overline{\varphi})}{\partial \varphi},$$

$$x = x(t, y, \psi, \varepsilon), \quad \varphi = \varphi(t, y, \psi, \varepsilon), \quad \overline{x} = \overline{x}(t, y), \quad \overline{\varphi} = \overline{\varphi}(t, y, \psi, \varepsilon).$$

Якщо далі позначити $v(\tau) = \left\| \frac{\partial}{\partial\psi}u(\tau, y, \psi, \varepsilon) \right\|$ і скористатись умовами (3), то одержимо нерівність

$$v(\tau) \le \sigma_1 \int_0^\tau v(t)\,dt + \varepsilon\sigma_1 \sum_{\tau_j^{(s)} \le \tau} [v(t) + \|u(t, y, \psi, \varepsilon)\|]_{t=\tau_j^{(s)}} + $$

$$+ \varepsilon \left\| \sum_{\tau_j^{(s)} \le \tau} \sum_{k \ge 1} P_{k,s}\left(\tau_j^{(s)}\right) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^{\tau_j^{(s)}} (\lambda_k, \omega(z))\,dz \right\} \right\|. \tag{11}$$

Тут через $P_{k,s}(\tau)$ позначено $(n+m) \times m$-матрицю

$$\left(c_{k,s}(\overline{x}(\tau), \tau)\lambda_k^{(1)}, \ldots, c_{k,s}(\overline{x}(\tau), \tau)\lambda_k^{(m)} \right) e^{i(\lambda_k, \overline{\Theta})} = P_{k,s}(\tau),$$

в якій $\overline{\Theta} = \overline{\varphi}(\tau, y, \psi, \varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \omega(z)\,dz$.

Оскільки число точок $\tau_j^{(s)}$ на відрізку $[0, L]$ не перевищує $\overline{\sigma}\varepsilon^{-1}$, $\overline{\sigma} = \left(L(2\pi)^{-1} + 1 \right) l$, то на підставі оцінок (3), (8), (10) та леми 2.2 із [1, с. 17] із (11) при $\tau \in [0, L]$, $y \in D_1$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виводимо нерівність

$$\begin{gathered} v(\tau) = \left\| \frac{\partial}{\partial\psi}u(\tau, y, \psi, \varepsilon) \right\| \le \sigma_2^{(2)} \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}, \\ \sigma_2^{(2)} = \sigma_1 \left[6(1+\sigma_1)\sigma_0 + \sigma_2^{(1)} \overline{\sigma} \right] e^{L\sigma_1 + \overline{\sigma}}. \end{gathered} \tag{12}$$

Аналогічно доводиться оцінка $\left\| \frac{\partial}{\partial y}u(\tau, y, \psi, \varepsilon) \right\| \le \sigma_2^{(3)} \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$, із якої з урахуванням (10) і (12) одержуємо нерівність (9) зі сталою $\sigma_2 = \sigma_2^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_2^{(3)}$.

Лема 2. *Якщо при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *існує єдиний розв'язок* $(x_1^0, \ldots, x_{n-r_1}^0) = \tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(\varepsilon)$, $(\mu_1^0, \ldots, \mu_{r_1}^0) = \mu^0 = \mu^0(\varepsilon)$ *рівняння*

$$F\left(\bar{x}(\tau_1, x^0), \ldots, \bar{x}(\tau_r, x^0), \mu^0, \varepsilon\right) = 0,$$

в якому $x^0 = x^0(\varepsilon) = \left(\underset{\sim}{x}^0, \tilde{x}^0\right) \in D_1$, $\mu^0(\varepsilon)$ *належить* G *разом зі своїм* ρ_1-*околом і* $\det \sum_{\nu=1}^{r} B_\nu \neq 0$, *то існує єдиний розв'язок*

$$(\,\bar{x}(\tau, x^0(\varepsilon))\,;\, \overline{\varphi}(\tau, x^0(\varepsilon), \varphi^0(\varepsilon), \varepsilon)\,;\, \mu^0(\varepsilon))$$

усередненої задачі (6а) – (6г).

Для доведення леми 2 досить зазначити, що $\varphi^0(\varepsilon)$ визначається очевидним чином із (6б), (6г) при умові, що матриця $\sum_{\nu=1}^{r} B_\nu$ невироджена.

Позначимо через $S(\varepsilon)$ квадратну n-вимірну матрицю

$$\left(\sum_{\nu=1}^{r} \frac{\partial F^0}{\partial p_\nu} \frac{\partial \bar{x}(\tau_\nu, x^0)}{\partial \tilde{x}^0}, \frac{\partial F^0}{\partial \mu^0}\right),$$

де $\dfrac{\partial F^0}{\partial p_\nu}$ і $\dfrac{\partial F^0}{\partial \mu^0}$ — значення матриць частинних похідних функції $F(p_1, \ldots, p_r, \mu, \varepsilon)$ при $p_k = \bar{x}(\tau_k, x^0)$, $\mu = \mu^0$, $k = \overline{1, r}$.

Використовуючи ідеї роботи [5], легко довести наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1, *леми* 2 *і нерівності* (5) *та* $\left\| S^{-1}(\varepsilon) \right\| \leq \sigma_3 = \text{const}$ *для кожного* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. *Тоді при досить малому* $\varepsilon_0 > 0$ *в малому околі розв'язку усередненої задачі* (6а) – (6г) *існує єдиний розв'язок* $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon); \mu(\varepsilon))$ *задачі* (1), (2), (4), *причому*

$$\left\| x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau, x^0) \right\| + \left\| \varphi(\tau, \varepsilon) - \overline{\varphi}(\tau, x^0, \varphi^0, \varepsilon) \right\| + \left\| \mu(\varepsilon) - \mu^0 \right\| \leq \sigma_4 \varepsilon^{\frac{1}{p+1}}$$

$\forall\, (\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$, *де* σ_4 — *стала, незалежна від* ε.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 288 с.
2. *Астафьева М. Н.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1124 – 1126.
3. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы. — Киев: Наук. думка, 1993. – 315 с.
5. *Самойленко А. М., Петришин Я. Р.* Крайові задачі з параметрами для багаточастотної коливної системи // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 581 – 589.

Одержано 18.02.99