УДК 517.5

А. И. Степанец, А. С. Сердюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЕ СУММАМИ ФУРЬЕ И НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КЛАССАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *

We establish asymptotic equalities for upper bounds of approximations by the Fourier sums and for the best approximations in the metrics C and L_1 on classes of convolutions of periodic functions which can be regularly extended into a fixed strip of the complex plane.

Знайдено асимптотичні рівності для верхніх меж наближень сумами Фур'є та для найкращих наближень в метриках C і L_1 на класах згорток періодичних функцій, що можуть бути регулярно продовжені у фіксовану смугу комплексної площини.

В работе продолжаются исследования аппроксимационных свойств классов $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ 2π-периодических суммируемых функций, которые вводятся следующим образом [1].

Пусть $f(\cdot)$ — 2π-периодическая интегрируемая на периоде функция ($f \in \in L$) и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье.

Пусть, далее, $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots,$ — произвольные системы действительных чисел, $\psi_1(0) = 1$. Если для заданной функции $f(\cdot)$ ряд

$$\begin{gathered}\sum_{k=0}^{\infty} \psi_1(k) A_k(f;x) + \psi_2(k)\tilde{A}_k(f;x), \\ \tilde{A}_k(f;x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx,\end{gathered} \tag{2}$$

является рядом Фурье некоторой функции $F(\cdot)$, то эту функцию назовем $\overline{\psi}$-интегралом функции $f(\cdot)$ и будем писать $F(x) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)$. Множество $\overline{\psi}$-интегралов всех функций $f \in L$ обозначается через $L^{\overline{\psi}}$; если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций $f \in L$, то $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$ обозначает множество $\overline{\psi}$-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$. Если C — подмножество непрерывных функций из L, то полагаем $C \cap L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = C^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$.

Если $F(x) = \mathcal{J}^{\overline{\psi}}(f;x)$, то функцию $f(\cdot)$ естественно называть $\overline{\psi}$-производной функции $F(\cdot)$. При этом пишем $f(x) = D^{\overline{\psi}}(F;x) = F^{\overline{\psi}}(x)$.

В работе [1] показано, что если пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ такова, что

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \neq 0 \qquad \forall\, k \in N \tag{3}$$

и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi_1(k) \cos kx + \psi_2(k) \sin kx \tag{4}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi(x)$ (при этом пишем $\overline{\psi} \in \mathcal{L}$), то для любой $f \in L^{\overline{\psi}}$ почти всюду выполняется равенство

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований при Министерстве Украины по делам науки и технологий.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\Psi}}(x-t)\,\Psi(t)\,dt \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{a_0}{2} + (f^{\overline{\Psi}} * \Psi)(x), \tag{5}$$

в котором a_0 — свободный член разложения в ряд Фурье функции $f(\cdot)$.

В работе будут использованы также классы $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$, определяемые следующим образом [2, с. 33].

Пусть $f \in L$ и ряд (1) — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi = \psi(k)$ и $\overline{\beta} = \beta_k$ — произвольные фиксированные последовательности действительных чисел. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)}\left(a_k \cos\left(kx + \beta_k\frac{\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \beta_k\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\beta_k(\pi/2)}{\psi(k)} A_k(f;x) - \frac{\sin\beta_k(\pi/2)}{\psi(k)} \tilde{A}_k(f;x) \tag{6}$$

является рядом Фурье некоторой интегрируемой функции $f^{\psi}_{\overline{\beta}}(\cdot)$, то ее называют $(\psi, \overline{\beta})$-производной функции $f(\cdot)$. Множество всех функций из L, имеющих $(\psi, \overline{\beta})$-производные, обозначается через $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$. Если $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ и, кроме того, $f^{\psi}_{\overline{\beta}} \in \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $L^0 = \{f\colon f \in L,\ f \perp 1\}$, то полагают $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$. В случае, когда выполняется тождество $\beta_k \equiv \beta$, $(\psi, \overline{\beta})$-производная обозначается через $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$, а множества $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ и $L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}$ — соответственно через L^{ψ}_{β} и $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Кроме того, полагают

$$C^{\psi}_{\overline{\beta}} = C \cap L^{\psi}_{\overline{\beta}}, \quad C^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N}, \quad C^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N} = C \cap L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}.$$

В [1] показано, что каждая $(\psi, \overline{\beta})$-производная функции $f \in L$ является и $\overline{\psi}$-производной, если компоненты $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ подобраны согласно равенствам

$$\psi_1(k) = \psi(k)\cos\beta_k\frac{\pi}{2}, \quad \psi_2(k) = \psi(k)\sin\beta_k\frac{\pi}{2} \tag{7}$$

и любая $\overline{\psi}$-производная есть $(\psi, \overline{\beta})$-производной, если параметры $\psi(k)$ и $\beta(k)$ определить согласно формулам

$$\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}, \quad \cos\beta_k\frac{\pi}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\psi(k)}, \quad \sin\beta_k\frac{\pi}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}. \tag{8}$$

В обоих случаях выполняются равенства

$$L^{\overline{\psi}} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}, \quad L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N} = L^{\psi}_{\overline{\beta}}\mathfrak{N} \quad \forall\, \mathfrak{N} \in L^0. \tag{9}$$

В работе [2] показано, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \beta_k\frac{\pi}{2}\right) \tag{10}$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Psi_{\overline{\beta}}(t)$, то элементы $f(\cdot)$ множества $L^{\psi}_{\overline{\beta}}$ почти всюду представимы равенствами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_{\overline{\beta}}^{\psi}(x-t)\,\Psi_{\overline{\beta}}(t)\,dt. \tag{11}$$

Через $\mathfrak{D}_q$ обозначим множество последовательностей $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = q, \quad q \in [0,1]. \tag{12}$$

Основные результаты данной работы получены для классов $L^{\overline{\psi}}\mathfrak{N}$, определяющие параметры $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ которых таковы, что последовательности $\psi(k) = (\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k))^{1/2}$ принадлежат множеству $\mathfrak{D}_q$ при некотором $q \in \in [0,1)$. В этом случае множества $C^{\overline{\psi}}$ и $C_{\overline{\beta}}^{\psi}$ состоят из 2π-периодических функций $f(x)$, допускающих регулярное продолжение в полосу $|\operatorname{Im} z| \le \ln\frac{1}{q}$ [2, с. 35].

Важным примером ядер вида (10), коэффициенты $\psi(k)$ которых удовлетворяют условию (12), являются ядра

$$P_{q,\overline{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \beta_k\frac{\pi}{2}\right), \quad q \in (0,1), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

которые при $\beta_k \equiv \beta$ являются известными ядрами Пуассона и обозначаются через $P_{q,\beta}(\cdot)$.

Классы $L_{\overline{\beta}}^{\psi}\mathfrak{N}$, порождаемые ядрами (13), обозначаются через $L_{\overline{\beta}}^{q}\mathfrak{N}$, а соответствующие $(\psi,\overline{\beta})$-интегралы — через $\mathcal{J}_{\overline{\beta}}^{q}(f;x)$.

Введем еще ряд обозначений. Как обычно, L_p, $1 \le p \le \infty$, — пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|f\|_p$; при этом

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty),$$

так что $L_1 = L$, а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty \stackrel{\mathrm{df}}{=} \|f\|_M = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Единичный шар в L_p обозначим через U_p; кроме того, полагаем

$$L^{\overline{\psi}} U_p^0 = L_p^{\overline{\psi}}, \quad L_{\overline{\beta}}^{\psi} U_p^0 = L_{\overline{\beta},p}^{\psi}, \quad U_p^0 = \{\varphi\colon \varphi \in U_p,\ \varphi \perp 1\}.$$

Пусть теперь $f \in L$,

$$S_n(f;x) = S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

— частные суммы Фурье функции f порядка n и

$$\rho_n(f;x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x) - S_{n-1}(f;x).$$

Пространство тригонометрических многочленов t_{n-1}, порядок которых не превышает $n-1$, обозначим через $\mathcal{T}_{2n-1}$. Величина

$$E_n(f)_s \overset{\mathrm{df}}{=} \inf_{t_{n-1}} \| f - t_{n-1} \|_s$$

— наилучшее приближение f в метрике L_s тригонометрическими полиномами порядка $n-1$.

В настоящей работе исследуются величины $\| \rho_n(f;x) \|_s$ и $E_n(f)_s$, $f \in L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — некоторое фиксированное подмножество из L_p, $0 \le p, s \le \infty$, а также величины

$$\mathcal{E}_n(L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N})_s = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N}} \| f - S_{n-1}(f) \|_s$$

и

$$E_n(L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N})_s = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N}} E_n(f)_s = \sup_{f \in L^{\overline{\psi}} \mathfrak{N}} \inf_{t_{n-1}} \| f - t_{n-1} \|_s$$

с целью получения для них асимптотических равенств, когда $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$.

Основная идея работы отражена в приведенной ниже лемме 1, суть которой состоит в том, что остатки $\rho_n(\Psi_{\overline{\beta}})$ ядра $\Psi_{\overline{\beta}}(t)$ вида (10) при $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, при $n \to \infty$ ведут себя примерно так же, как и остатки $\rho_n(P^q_{\overline{\beta}})$ ядра $P^q_{\overline{\beta}}(t)$. Это позволяет, в частности, сводить задачу о получении асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{\psi}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ к аналогичным задачам для величин $\mathcal{E}_n(L^{q}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{q}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ соответственно. В ряде важных случаев для величин $\mathcal{E}_n(L^{q}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{q}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ асимптотические равенства (и даже их точные значения) известны. В этих случаях появляется возможность выписать асимптотические равенства и для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$ и $E_n(L^{\psi}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$. В частности, таким путем, отправляясь от известных результатов С. М. Никольского [3] и С. Б. Стечкина [4], удается получить асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ и $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1$ для всех $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$. Ранее этот случай не был исследован.

Более подробно ознакомиться с известными результатами, связанными с получением асимптотических равенств для $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\overline{\beta}} \mathfrak{N})_s$, и историей этого вопроса можно, например, по работам [1–11].

1. Оценка остатка ряда Фурье для аналитических функций. Следующая теорема устанавливает связь между нормами в пространстве L_s остатков ряда Фурье $\overline{\psi}$-интегралов $\mathcal{J}^{\psi}_{\overline{\beta}}(\varphi)$, $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, и остатков ряда Фурье интегралов $\mathcal{J}^{q}_{\overline{\beta}}(\varphi)$, $\varphi \in L_p$.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p, s \le \infty$ *и* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тогда для любой функции* $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}} L_p$ *при* $n \to \infty$ *справедливо равенство*

$$\| \rho_n(f) \|_s = \psi(n) \left(q^{-n} \| \rho_n(\mathcal{J}^{q}_{\overline{\beta}}(f^{\psi}_{\overline{\beta}})) \|_s + O(1) \frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\overline{\beta}})_p}{(1-q)^2} \right), \tag{14}$$

в котором $\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно параметров* n, p, s, q, $\psi(k)$ *и* β_k.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующее утверждение, которое представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть* $\psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, *— произвольная числовая последовательность из* $\mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$. *Тогда для любой последовательности действительных чисел* γ_k, $k = 1, 2, \ldots$, *справедливо равенство*

$$\sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos(kt-\gamma_k) = \psi(n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_n(t)\right); \tag{15}$$

при этом для величины $r_n(t) = r_n(\psi, \bar{\gamma}, t)$, *начиная с некоторого номера* n_0, *имеет место оценка*

$$|r_n(t)| \leq \frac{\varepsilon_n}{(1-q-\varepsilon_n)(1-q)}, \tag{16}$$

$$\varepsilon_n = \sup_{k\geq n}|\delta_k|, \qquad \delta_k = \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q. \tag{16'}$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \psi(n+i)\cos((n+i)t - \gamma_{n+i}) =$$

$$= \psi(n)\left(\cos(nt-\gamma_n) + \sum_{i=1}^{\infty}\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)}\cos((n+i)t-\gamma_{n+i})\right) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\sum_{k=n}^{\infty} q^k\cos(kt-\gamma_k) + r_n(t)\right),$$

где

$$r_n(t) = r_n(\psi, \bar{\gamma}, t) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)} - q^i\right)\cos((n+i)t-\gamma_{n+i}). \tag{17}$$

Докажем неравенство (16). Вследствие (17) имеем

$$|r_n(t)| \leq \sum_{i=1}^{\infty}|\tilde{q}_i - q^i|, \tag{18}$$

где

$$\tilde{q}_i = \prod_{l=0}^{i-1}\frac{\psi(n+l+1)}{\psi(n+l)}. \tag{19}$$

В случае, когда $\tilde{q}_i \geq q^i$,

$$|\tilde{q}_i - q^i| = \tilde{q}_i - q^i \leq \prod_{l=0}^{i-1}(q+\varepsilon_n) - q^i = (q+\varepsilon_n)^i - q^i.$$

Если же $\tilde{q}_i < q^i$, то в силу выпуклости функции t^k, $k = 1, 2, \ldots$, $t > 0$,

$$|\tilde{q}_i - q^i| = q^i - \tilde{q}_i \leq \prod_{l=0}^{i-1}(q-\varepsilon_n) - q^i = (q-\varepsilon_n)^i - q^i \leq (q+\varepsilon_n)^i - q^i.$$

Таким образом, всегда

$$|\bar{q}_i - q^i| \leq (q+\varepsilon_n)^i - q^i. \tag{20}$$

Учитывая вытекающий из (12) и (16 ′) факт монотонного убывания к нулю последовательности ε_n, замечаем, что, начиная с некоторого номера n_0, $\varepsilon_n < 1 - q$. Поэтому, учитывая (18) и (20), при $n \geq n_0$ находим

$$|r_n(t)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} ((q+\varepsilon_n)^i - q^i) = \frac{\varepsilon_n}{(1-q)(1-q-\varepsilon_n)}.$$

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $f \in L^{\psi}_{\bar{\beta}} L_p$, $1 \leq p \leq \infty$. Тогда в силу (11) почти всюду

$$\rho_n(f;x) = f(x) - S_{n-1}(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_{\bar{\beta},n}(t)\, f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)\,dt, \tag{21}$$

где

$$\Psi_{\bar{\beta},n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta_k \pi}{2}\right).$$

Полагая

$$P_{q,\bar{\beta},n}(t) \overset{\text{df}}{=} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right), \quad 0<q<1, \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

на основании (21) и (15) заключаем, что почти всюду

$$\rho_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(n)\left(q^{-n} P_{q,\bar{\beta},n}(t) + r_n(t)\right) f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)\,dt =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{q^{-n}}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{q,\bar{\beta},n}(t)\, f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)\,dt + R_n(f;x)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n}\rho_n(\mathcal{J}^{q}_{\bar{\beta}}(f^{\psi}_{\bar{\beta}};x)) + R_n(f;x)\right), \tag{22}$$

где

$$R_n(f;x) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r_n(t)\, f^{\psi}_{\bar{\beta}}(x-t)\,dt,$$

а функция $r_n(t)$ определена формулой (17) при $\gamma_k = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Покажем, что для любого тригонометрического полинома $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$

$$\|R_n(f)\|_s \leq 4\pi \|f^{\psi}_{\bar{\beta}} - t_{n-1}\|_p \|r_n\|_\infty, \quad 1 \leq p, s \leq \infty. \tag{23}$$

Воспользовавшись неравенством Хаусдорфа–Юнга для сверток [12, с. 67]

$$\|y * z\|_s \leq \frac{1}{\pi}\|y\|_p \|z\|_r, \quad 1 \leq p \leq s \leq \infty,$$

$$\frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{s}, \quad y \in L_p, \quad z \in L_r,$$

при $p \leq s$ получим

$$\| R_n(f) \|_s = \|(f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1}) * r_n \|_s \le \frac{1}{\pi} \| f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1} \|_p \| r_n \|_r . \tag{24}$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\frac{1}{r} = \left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{s}\right) \in [0, 1]$, то

$$\| r_n \|_r \le \| r_n \|_\infty (2\pi)^{1/r} \le 2\pi \| r_n \|_\infty . \tag{25}$$

Сопоставляя оценки (24) и (25), получаем

$$\| R_n(f; x) \|_s \le 2 \| f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1} \|_p \| r_n \|_\infty . \tag{26}$$

Пусть теперь $1 \le s \le p \le \infty$. В силу неравенства Гельдера

$$\forall f \in L_p \quad \| f \|_s \le (2\pi)^{(p-s)/ps} \| f \|_p, \quad 1 \le s \le p \le \infty,$$

поэтому

$$\| R_n(f) \|_s = \|(f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1}) * r_n \|_s \le 2\pi \|(f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1}) * r_n \|_p \le$$
$$\le 2 \| f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1} \|_p \| r_n \|_1 \le 4\pi \| f_{\beta}^{\psi} - t_{n-1} \|_p \| r_n \|_\infty \tag{27}$$

и формула (23) вытекает из оценок (26) и (27).

Выбирая в качестве $t_{n-1}(\cdot)$ полином $t_{n-1}^*(t)$ наилучшего приближения в пространстве L_p функции $f_{\beta}^{\psi}(\cdot)$, а также используя неравенство (16), получаем следующую оценку:

$$\| R_n(f; x) \|_s = O(1) \frac{\varepsilon_n E_n (f_{\beta}^{\psi})_p}{(1-q)^2}, \quad 1 \le p, s \le \infty. \tag{28}$$

Объединяя формулы (22) и (28), получаем равенство (14).

Если $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, то в силу признака Даламбера сходимости числовых положительных рядов ряд (10) сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, если $f \in C_{\beta}^{\psi} L_p$, то равенство (11), а значит, и равенства (21) и (22) выполняются в каждой точке x. Поэтому из приведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть* $1 \le p \le \infty$ *и* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тогда для любой функции* $f \in C_{\beta}^{\psi} L_p$ *при* $n \to \infty$ *справедливо равенство*

$$\| \rho_n(f) \|_C = \psi(n) \left(q^{-n} \| \rho_n (\mathcal{J}_{\beta}^{q} (f_{\beta}^{\psi})) \|_C + O(1) \frac{\varepsilon_n E_n (f_{\beta}^{\psi})_p}{(1-q)^2} \right), \tag{14′}$$

в котором $\varepsilon_n = \sup_{k \ge n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|$, $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная относительно* n, p, q, $\psi(k)$ *и* β_k.

Рассматривая верхние грани обеих частей соотношения (14) по классам $L_{\beta,p}^{\psi}$, а соотношения (14′) — по классам $C_{\beta,p}^{\psi}$ и учитывая, что

$$\sup_{f \in L_{\beta,p}^{\psi}} \| \rho_n (f; \cdot) \|_s = \sup \{ \| \rho_n (\mathcal{J}_{\beta}^{\psi} (\varphi; \cdot) \|_s : \| \varphi \|_p \le 1, \ \varphi \perp 1 \},$$

получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p, s \le \infty$ *и* $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$

$$\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \tag{29}$$

$$\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C = \psi(n)\left(q^{-n}\mathcal{E}_n(C^{q}_{\beta,p})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \tag{30}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \ge n}\left|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные относительно* n, p, s, q, $\psi(k)$ *и* β_k.

Величины $q^{-n}\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s$ и $q^{-n}\mathcal{E}_n(C^{q}_{\beta,p})_C$ при $n \to \infty$ являются ограниченными сверху и снизу некоторыми положительными числами, зависящими, возможно, только от q, p и s. Действительно,

$$\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s = \sup_{\substack{\|\varphi\|_p \le 1 \\ \varphi \perp 1}}\left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x-t)\left(\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right)dt\right\|_s \le$$

$$\le \sup_{\substack{\|\varphi\|_p \le 1 \\ \varphi \perp 1}} C^{(1)}_{p,s}\|\varphi\|_p\left\|\sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_k\pi}{2}\right)\right\|_C \le$$

$$\le C^{(1)}_{p,s}\sum_{k=n}^{\infty} q^k = C^{(1)}_{p,s}\frac{q^n}{1-q},$$

следовательно,

$$q^{-n}\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s \le C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1}.$$

Чтобы получить нужную оценку снизу, рассмотрим функцию $f_n(x)$,

$$f_n(x) = q^n\|\sin t\|_p^{-1}\sin\left(nx - \frac{\beta_n\pi}{2}\right),$$

которая, очевидно, принадлежит классу $L^{q}_{\beta,p}$:

$$q^{-n}\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s \ge q^{-n}\|\rho_n(f_n;x)\|_s = \frac{\|\sin t\|_s}{\|\sin t\|_p} = C^{(2)}_{p,s},$$

так что

$$C^{(2)}_{p,s} \le q^{-n}\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s \le C^{(1)}_{p,s}(1-q)^{-1}, \qquad C^{(i)}_{p,s} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{31}$$

Такими же рассуждениями доказывается, что и

$$C^{(2)}_{p} \le q^{-n}\mathcal{E}_n(C^{q}_{\beta,p})_C \le C^{(1)}_{p}(1-q)^{-1}, \qquad C^{(i)}_{p} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{31$'$}$$

Поскольку последовательность ε_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то с учетом (29) и (30) в случаях, когда известны асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}_n(L^{q}_{\beta,p})_s$ и $\mathcal{E}_n(C^{q}_{\beta,p})_C$, соотношения (14) и (14′) дают возможность записать аналогичные равенства и для величин $\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s$ и $\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,p})_C$ соответственно.

Согласно определению множеств $\mathfrak{D}_q$ (см. (12)), из того, что $\psi \in \mathfrak{D}_{q_1}$, а $\varphi \in \mathfrak{D}_{q_2}$, $0 \le q_1, q_2 \le 1$, вытекает, что $\psi_1 \psi_2 \in \mathfrak{D}_{q_3}$ при $q_3 = q_1 q_2$ (в частности, если $\psi \in \mathfrak{D}_{q_1}$, а $\varphi \in \mathfrak{D}_1$, то $\psi\varphi \in \mathfrak{D}_q$, $0 \le q \le 1$). Таким образом, множеству $\mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, принадлежат любые последовательности вида $\psi(k) = q^k \varphi(k)$, где $0 \le q < 1$ и $\varphi \in \mathfrak{D}_1$. С другой стороны, если $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 \le q < 1$, то, представляя $\psi(k)$ в виде

$$\psi(k) = q^k \frac{\psi(k)}{q^k} = q^k \varphi(k),$$

где $\varphi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{\psi(k)}{q^k}$, убеждаемся, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} = 1.$$

Поэтому справедливо такое утверждение.

Утверждение 1. *Для того чтобы последовательность $\psi(k)$ принадлежала множеству $\mathfrak{D}_q$, $0 \le q < 1$, необходимо и достаточно, чтобы имело место представление*

$$\psi(k) = q^k \varphi(k),$$

в котором $\varphi(k)$ — некоторая последовательность из $\mathfrak{D}_1$.

В частности к $\mathfrak{D}_q$, $0 \le q < 1$, принадлежат последовательности $\psi^*(k) = q^k k^r$, $r \in (-\infty, +\infty)$; $\psi^{**}(k) = q^k e^{\alpha k^r}$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$, $r \in (0, 1)$, и др.

В случае, когда $\beta_k = \beta$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, как уже отмечалось, ядра $P_{q,\overline{\beta}}(t)$ являются ядрами Пуассона

$$P_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

Классы $L^q_{\overline{\beta},p}$ в этом случае обозначим через $L^q_{\beta,p}$.

В 1946 г. С. М. Никольский [3, с. 221 – 223] нашел асимптотические равенства для величин $\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty})_C$ и $\mathcal{E}_n(L^q_{\beta,1})_1$.

Следующее утверждение воспроизводит результат С. М. Никольского с уточненным С. Б. Стечкиным [4, с. 139] остаточным членом.

Теорема A. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < q < 1$. Тогда при $n \to \infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}_n(C^q_{\beta,\infty})_C = q^n \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{33}$$

$$\mathcal{E}_n(L^q_{\beta,1})_1 = q^n \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{33'}$$

в которых $K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а $O(1)$ — величины, равномерно ограниченные относительно параметров n, q и β.

Объединяя теорему 2 и теорему A, получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть классы* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *порождены ядром*

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{34}$$

$$\beta \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) \ge 0, \quad \psi \in \mathfrak{D}_q, \quad 0 < q < 1.$$

Тогда при $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{35}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}\boldsymbol{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{35'}$$

в которых $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $\boldsymbol{K}(q) = \int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2 u}}$, *а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные относительно параметров* n, β *и* ψ.

***Замечание* 1.** Асимптотические равенства (35) и (35′) остаются справедливыми, если в теореме 3 условие $0 < q < 1$ заменить условием $0 \le q < 1$. Действительно, формально полагая $q = 0$ и замечая, что $\boldsymbol{K}(0) = \pi/2$, оценки (35) и (35′) запишем в виде

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\psi(n+1), \tag{36}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\psi(n+1). \tag{36'}$$

Истинность асимптотических равенств (36) и (36′) для $\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$, вытекает, например, из [1, с. 1103–1104] (см. также [13, 14]).

Условиям теоремы 3 удовлетворяют ядра Пуассона бигармонического уравнения

$$B_{q,\beta}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1-q^2}{2}k\right)q^k\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{37}$$

$$0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

а также ядра Неймана

$$N_{q,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{q^k}{k}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0 < q < 1, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{38}$$

Легко проверить, что для коэффициентов $\psi(k)$ ядер $B_{q,\beta}(t)$ и $N_{q,\beta}(t)$

$$|\varepsilon_k| = \left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right| \le \frac{q}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{39}$$

Следовательно, из теоремы 3 и соотношений (39) получаем следующие утверждения.

***Следствие* 1.** *Пусть классы* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *порождены ядром* $B_{q,\beta}(t)$ *вида* (37), $n \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = q^n\left(1+\frac{1-q^2}{2}n\right)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = q^n\left(1+\frac{1-q^2}{2}n\right)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

в которых величины $O(1)$ *равномерно ограничены относительно* n, q *и* β.

Следствие 2. *Пусть классы* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *порождены ядром* $N_{q,\beta}(t)$ *вида* (38), $n\in\mathbb{N}$. *Тогда при* $n\to\infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = \frac{q^n}{n}\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = \frac{q^n}{n}\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)^2}\right),$$

в которых величины $O(1)$ *равномерно ограничены относительно* n, q *и* β.

Анализируя доказательство теоремы А, содержащееся в [4, с. 139 – 142], несложно убедиться, что используемые в нем методы позволяют получить асимптотические оценки величин $\mathscr{E}_n(C^{q}_{\beta,\infty})_C$ и $\mathscr{E}_n(L^{q}_{\beta,1})_1$ для классов $C^{q}_{\beta,\infty}$ и $L^{q}_{\beta,1}$, порождаемых ядрами $P_{q,\bar\beta}(t)$ вида (13), у которых $\beta_k=\beta+k\pi$, $\beta\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$. При этом вид получаемых оценок по сравнению со случаем $\beta_k=\beta$, $k\in\mathbb{N}$, $\beta\in\mathbb{R}$, не изменится. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема Б. *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $0<q<1$, $\beta_k=\beta+k\pi$, $\beta\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$. *Тогда при* $n\to\infty$ *имеют место асимптотические равенства*

$$\mathscr{E}_n(C^{q}_{\beta,\infty})_C = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{40}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{q}_{\beta,1})_1 = q^n\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\frac{q}{n(1-q)}\right), \tag{40$'$}$$

в которых $K(q)=\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-q^2\sin^2u}}$, *а* $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные относительно параметров* n, q *и* β.

Сопоставление теорем 2 и Б позволяет сформулировать следующий аналог теоремы 3.

Теорема 3$'$. *Пусть классы* $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ *и* $L^{\psi}_{\beta,1}$ *порождены ядром*

$$\Psi_{\bar\beta}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos\left(kt-\frac{\beta_k\pi}{2}\right),\qquad \psi(k)\geq 0,$$

у которого $\psi\in\mathfrak{D}_q$, $0<q<1$, $\beta_k=\beta+k\pi$, $\beta\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$\mathscr{E}_n(C^{q}_{\beta,\infty})_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{41}$$

$$\mathscr{E}_n(L^{q}_{\beta,1})_1 = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2}K(q)+O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)}+\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right), \tag{41$'$}$$

где

$$\varepsilon_n = \sup_{k \ge n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \qquad K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}},$$

и $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные относительно параметров* n, β *и* ψ.

Теорема 3 допускает следующее обобщение на классы $C_\infty^{\overline{\Psi}}$ и $L_1^{\overline{\Psi}}$.

Теорема 4. *Пусть классы* $C_\infty^{\overline{\Psi}}$ *и* $L_1^{\overline{\Psi}}$ *порождены ядром*

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\psi_1(k) \cos kt + \psi_2(k) \sin kt \right), \tag{42}$$

в котором

$$\psi_i \in \mathcal{D}_{q_i}, \quad 0 < q_i < 1, \quad i = 1, 2. \tag{43}$$

Тогда при $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\Psi}})_C = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)} \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1) \left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right), \tag{44}$$

$$\mathcal{E}_n(L_1^{\overline{\Psi}})_1 = \sqrt{\psi_1^2(n) + \psi_2^2(n)} \left(\frac{8}{\pi^2} K(q) + O(1) \left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \right), \tag{44'}$$

где

$$q = \max\{q_1, q_2\}, \qquad K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}},$$

$$\varepsilon_n = \begin{cases} \max\limits_{i=1,2} \{\varepsilon_n^{(i)}\}, & \text{если } q_1 = q_2, \\ \varepsilon_n^{(1)}, & \text{если } q_1 > q_2, \\ \varepsilon_n^{(2)}, & \text{если } q_1 < q_2, \end{cases}$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k \ge n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q_i \right|, \quad i = 1, 2,$$

и $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные относительно* n, ψ_1 *и* ψ_2.

Доказательство. Пусть $f \in C_\infty^{\overline{\Psi}}$. Тогда

$$\rho_n(f; x) = f(x) - S_{n-1}(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t) \varphi(x-t)\, dt, \tag{45}$$

где

$$\Psi_n(t) = G_n(t) + H_n(t), \qquad n \in \mathbb{N};$$

$$G_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_1(k) \cos kt, \qquad H_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \psi_2(k) \sin kt.$$

На основании условий (43) и леммы 1, примененной к каждой из функций $G_n(t)$ и $H_n(t)$, можем записать

$$\Psi_n(t) = G_n(t) + H_n(t) =$$

$$= \psi_1(n) \left(q_1^{-n} P_{q_1,0,n}(t) + R_n(\psi_1; t) \right) + \psi_2(n) \left(q_2^{-n} P_{q_2,1,n}(t) + R_n(\psi_2; t) \right) =$$

$$= \psi_1(n)\, q_1^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q_1^k \cos kt + \psi_2(n)\, q_2^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q_2^k \sin kt +$$

$$+ O(1)\left(\frac{\varepsilon_n^{(1)} \psi_1(n)}{(1-q_1)^2} + \frac{\varepsilon_n^{(2)} \psi_2(n)}{(1-q_2)^2} \right), \tag{46}$$

где

$$P_{q_1,0,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q_1^k \cos kt, \quad P_{q_2,1,n}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q_2^k \sin kt,$$

$$\varepsilon_n^{(i)} = \sup_{k \ge n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|, \quad i = 1, 2.$$

Пусть сначала $q_1 = q_2 = q$, тогда из (46) следует

$$\Psi_n(t) = \psi(n) \left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \left(\frac{\psi_1(n)}{\psi(n)} \cos kt + \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)} \sin kt \right) + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) =$$

$$= \psi(n) \left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_n \pi}{2} \right) + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right), \tag{47}$$

где $\varepsilon_n = \max\limits_{i=1,2} \{\varepsilon_n^{(i)}\}$, $\psi(k) = \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}$ и β_n — числа из промежутка $[0, 4)$, определяемые равенствами

$$\cos \frac{\beta_n \pi}{2} = \frac{\psi_1(n)}{\psi(n)}, \quad \sin \frac{\beta_n \pi}{2} = \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)}.$$

На основании (45) и (47) заключаем, что

$$\mathcal{E}_n(C_\infty^{\overline{\psi}})_C = \sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \|\rho_n(f; x)\|_C =$$

$$= \sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty \le 1 \\ \varphi \perp 1}} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(n) \left(q^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt - \frac{\beta_n \pi}{2} \right) + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) \varphi(x-t)\, dt \right\|_C =$$

$$= \psi(n) \left(\sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty \le 1 \\ \varphi \perp 1}} q^{-n} \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{q,\beta_n,t}(t)\, \varphi(x-t)\, dt \right\|_C + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right) =$$

$$= \psi(n) \left(q^{-n} \mathcal{E}_n(C_{\beta_n,\infty}^q)_C + O(1) \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} \right). \tag{48}$$

Учитывая равномерную ограниченность величины $O(1)$ в равенстве (33) относительно параметра β, это равенство можно записать в виде

$$\mathcal{E}_n(C_{\alpha_n,\infty}^q)_C = q^n \left(\frac{8}{\pi^2} \mathbf{K}(q) + O(1) \frac{q}{n(1-q)} \right), \tag{33$'$}$$

где α_n, $n = 1, 2, \ldots,$ — любые действительные числа. Воспользовавшись этим равенством при $\alpha_n = \beta_n$, из (48) получим равенство (44).

Пусть теперь, к примеру, $q_1 < q_2 = q$. Тогда в силу (43) имеем

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi_1(k+1)\, \psi_2(k)}{\psi_2(k+1)\, \psi_1(k)} = \frac{q_1}{q_2} \le 1,$$

и, следовательно, для любого $\varepsilon \in (0, 1 - q_1/q_2)$ существует номер n_0 такой, что для всех $k \geq n_0$

$$\frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} \leq \frac{q_1}{q_2} + \varepsilon, \quad \varphi(k) := \frac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)}. \tag{49}$$

Отсюда вытекает, что для последовательностей

$$\alpha_k^{(1)} := \left|\frac{\psi_1(k)}{\psi(k)}\right|, \quad \alpha_k^{(2)} := 1 - \left|\frac{\psi_2(k)}{\psi(k)}\right|$$

справедливы равенства

$$\alpha_k^{(i)} = O(1)\left(\frac{q_1}{q_2} + \varepsilon\right)^k, \quad \varepsilon \in \left(0, 1 - \frac{q_1}{q_2}\right), \quad i = 1, 2, \tag{50}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная относительно k, q_1, q_2 и ε.

Из соотношений (46) и (50) и очевидного неравенства

$$q_i^{-n} P_{q_i,\beta,n}(t) \leq \frac{1}{1-q_i} \leq \frac{1}{1-q}, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2,$$

следует, что

$$\Psi_n(t) = \psi(n) \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\psi_1(n)}{\psi(n)} q_1^{k-n} \cos kt + \frac{\psi_2(n)}{\psi(n)} q_2^{k-n} \sin kt\right) +$$

$$+ O(1)\left(\frac{\varepsilon_n^{(1)} \psi_1(n)}{(1-q_1)^2} + \frac{\varepsilon_n^{(2)} \psi_2(n)}{(1-q_2)^2}\right) =$$

$$= \psi(n)\left(q_2^{-n} P_{q_2,1,n}(t) \operatorname{sign} \psi_2(n) + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n^{(2)}}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\left(\frac{\varepsilon_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(2)}}{1-q} + 1\right)\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(q_2^{-n} P_{q_2,1,n}(t) \operatorname{sign} \psi_2(n) + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right), \tag{51}$$

где $\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(2)}$ и $\alpha_n = \max\limits_{i=1,2} \{\alpha_n^{(i)}\}$.

Объединяя соотношения (45) и (51) и полагая $q_2 = q$, получаем

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\overline{\Psi}})_C = \sup_{f \in C_\infty^{\overline{\Psi}}} \|\rho_n(f; x)\|_C =$$

$$= \psi(n)\left(\sup_{\substack{\|\varphi\|_\infty \leq 1 \\ \varphi \perp 1}} q^{-n} \left\|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{q,1,n}(t)\, \varphi(x-t)\, dt\right\|_C + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(q^{-n} \mathscr{E}_n(C_{1,\infty}^q)_C + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right).$$

Отсюда, учитывая равенство (35) при $\beta = 1$ и принимая во внимание, что в силу (50) $\alpha_n = o(1/n)$, находим

$$\mathscr{E}_n(C_\infty^{\overline{\Psi}})_C = \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{\alpha_n}{1-q}\right)\right) =$$

$$= \psi(n)\left(\frac{8}{\pi^2} \boldsymbol{K}(q) + O(1)\left(\frac{q}{n(1-q)} + \frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right)\right).$$

Этим соотношение (44) доказано и в случае, когда $q_1 < q_2$. Ясно, что теми же рассуждениями (44) доказывается и при $q_1 > q_2$.

Следуя схеме установления соотношения (44) и используя вместо (33) равенство (33′), приходим к равенству (44′). Теорема доказана.

Относительно условий (43) теоремы 4 отметим следующее. Если $q_1 \neq q_2$, то, как вытекает из (49), отношение $\dfrac{\psi_1(k)}{\psi_2(k)} = \varphi(k)$ всегда имеет предел при $k \to \infty$, который равен либо 0 (когда $q_1 < q_2$), либо $\pm\infty$ (когда $q_1 > q_2$). Это значит, что, определив последовательность действительных чисел β_k из промежутка $[0, 4)$ с помощью равенств (8), можем гарантировать существование предела последовательности β_k при $k \to \infty$ на этом промежутке.

Если же $q_1 = q_2 = q$, то можно указать такие последовательности $\psi_1(k)$ и $\psi_2(k)$ из $\mathfrak{D}_q$, что определяемая ими на промежутке $[0, 4)$, в соответствии с формулами (8), последовательность β_k предела иметь не будет. Такими, например, являются последовательности

$$\psi_1(k) = q^k, \quad \psi_2(k) = q^k \varphi(k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 0 < q < 1,$$

где

$$\varphi(k) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{k}{2^{2\nu+1}}, & 2^{2\nu} \leq k \leq 2^{2\nu+1}, \\[2ex] \dfrac{k}{2^{2(\nu+1)}}, & 2^{2\nu+1} \leq k \leq 2^{2(\nu+1)}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\varphi(k+1)}{\varphi(k)} = 1,$$

поэтому $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{D}_q$. В то же время $\dfrac{1}{2} \leq \varphi(k) \leq 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и при любом $\nu \in \mathbb{N}$ $\varphi(2^{2\nu}) = 1$, а $\varphi(2^{2\nu+1}) = 1/2$. Следовательно, при $k \to \infty$ функция $\varphi(k)$ предела не имеет. Значит, и соответствующая последовательность чисел β_k, заданная формулой $\beta_k = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi(k)$, будет принадлежать промежутку $\left[\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ и в силу непрерывности на этом промежутке функции $\operatorname{tg} x$ не будет иметь предела.

Замечание 2. Следуя схеме доказательства теоремы 4 и учитывая соотношения (36), (36′), (40) и (40′), нетрудно убедиться, что асимптотические равенства (44) и (44′) остаются в силе, если условия (43) теоремы 4 заменить одним из трех условий:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\psi_1(k+1)}{\psi_1(k)} = q_1, \quad |q_1| < 1,$$
$$\left|\frac{\psi_2(k+1)}{\psi_2(k)}\right| \leq q_2, \quad 0 \leq q_2 < |q_1|; \tag{43′}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi_2(k+1)}{\psi_2(k)} = q_2, \quad |q_2| < 1,$$
$$\left|\frac{\psi_1(k+1)}{\psi_1(k)}\right| \le q_1, \quad 0 \le q_1 < |q_2|; \tag{43''}$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\psi_i(k+1)}{\psi_i(k)} = q_i, \quad |q_i| < 1, \quad i=1,2, \quad |q_1| = |q_2|, \tag{43'''}$$

и положить $q = \max\{q_1, q_2\}$.

2. Оценка для наилучших приближений аналитических функций. Следующая теорема устанавливает связь между наилучшими приближениями в метрике пространства L_s $\overline{\psi}$-интегралов $\mathcal{J}^{\psi}_{\beta}(\varphi)$ при $\psi \in \mathfrak{D}_q$ и наилучшими приближениями интегралов $\mathcal{J}^{q}_{\beta}(\varphi)$ при $\varphi \in L_p$.

Теорема 5. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$ *и* $\psi(k) > 0$. *Тогда для любой* $f \in L^{\psi}_{\beta}L_p$ *при* $n \to \infty$ *имеет место равенство*

$$E_n(f)_s = \psi(n)\left(q^{-n}E_n(\mathcal{J}^{q}_{\beta}(f^{\psi}_{\beta}))_s + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\beta})_p}{(1-q)^2}\right), \quad 1 \le s < \infty. \tag{52}$$

Если же $f \in C^{\psi}_{\beta}L_p$, *то*

$$E_n(f)_C = \psi(n)\left(q^{-n}E_n(\mathcal{J}^{q}_{\beta}(f^{\psi}_{\beta}))_C + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f^{\psi}_{\beta})_p}{(1-q)^2}\right), \tag{52'}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}\left|\frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная относительно* n, p, s, q, $\psi(k)$ *и* β_k.

Доказательство. Докажем сначала равенство (52). В силу соотношений двойственности [15, с. 42]

$$\inf_{t_{n-1}}\|f - t_{n-1}\|_s = \sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,y(t)\,dt, \quad 1 \le s < \infty, \quad \frac{1}{s}+\frac{1}{s'} = 1. \tag{53}$$

Поэтому, учитывая (22) и (53), имеем

$$E_n(f)_s = \sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,y(t)\,dt = \sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f;t)\,y(t)\,dt =$$
$$= \sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(n)\left(q^{-n}\rho_n(\mathcal{J}^{q}_{\beta}(f^{\psi}_{\beta};x)) + R_n(f;x)\right)y(x)\,dx =$$
$$= \psi(n)\sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(q^{-n}\mathcal{J}^{q}_{\beta}(f^{\psi}_{\beta};x) + R_n(f;x)\right)y(x)\,dx, \tag{54}$$

где $R_n(f;x) = (r_n * f^{\psi}_{\beta})(x)$, а $r_n(t)$ — функция, определенная формулой (17) при $\gamma_k = \beta_k$, $k \in \mathbb{N}$. Используя неравенство Гельдера, оценку (28), для любого $y \in U_{s'}^0$ находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} R_n(f;x)\,y(x)\,dx \le \frac{1}{\pi}\|y\|_{s'}\|R_n(f;x)\|_s \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\|R_n(f;x)\|_s = O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\beta}^{\psi})_p}{(1-q)^2}. \tag{55}$$

Таким образом, в силу (54) и (55) имеем

$$E_n(f)_s = \psi(n)\left(\sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi} q^{-n}\mathcal{J}_{\beta}^{q}(f_{\beta}^{\psi};x)\,y(x)\,dx + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\beta}^{\psi}))_p}{(1-q)^2}\right)$$

и для доказательства равенства (52) остается заметить, что в силу (53)

$$\sup_{\substack{y\perp t_{n-1}\\ \|y\|_{s'}\le 1}}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{J}_{\beta}^{q}(f_{\beta}^{\psi};x)\,y(x)\,dx = E_n(\mathcal{J}_{\beta}^{q}(f_{\beta}^{\psi}))_s. \tag{56}$$

Доказательство равенства (52′) аналогично доказательству равенства (52). В этом случае соотношение двойственности имеет вид [15, с. 41]

$$\inf_{t_{n-1}}\|f - t_{n-1}\|_C = \sup_{g\in F_{n-1}^{\perp},\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dg(x), \tag{57}$$

где $F_{n-1}^{\perp}$ — множество функций $g(t)$ с ограниченным изменением на $[-\pi,\pi]$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} t_{n-1}(t)\,dg(t) = 0 \quad \forall\, t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}.$$

Учитывая соотношения (22) и (57), имеем

$$E_n(f)_C = \sup_{g\in F_{n-1}^{\perp},\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f;x)\,dg(x) =$$

$$= \sup_{g\in F_{n-1}^{\perp},\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(n)\left(q^{-n}\rho_n(\mathcal{J}_{\beta}^{q}(f_{\beta}^{\psi};x)) + R_n(f;x)\right)dg(x) =$$

$$= \psi(n)\sup_{g\in F_{n-1}^{\perp},\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}\left(q^{-n}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{J}_{\beta}^{q}(f_{\beta}^{\psi};x)\,dg(x) + \int_{-\pi}^{\pi}R_n(f;x)\,dg(x)\right). \tag{58}$$

Однако с учетом (28)

$$\sup_{g\in F_{n-1}^{\perp},\ \bigvee_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}\int_{-\pi}^{\pi}R_n(f;x)\,dg(x) \le \|R_n\|_{\infty}\bigvee_{-\pi}^{\pi}(g) \le$$

$$\le \|R_n\|_{\infty} = O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\beta}^{\psi}))_p}{(1-q)^2}, \quad 1\le p\le\infty, \tag{59}$$

поэтому из (58) и (59) вытекает

$$E_n(f)_C = \psi(n)\left(q^{-n}\sup_{g\in F_{n-1}^{\perp},\ \bigvee\limits_{-\pi}^{\pi}(g)\le 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathcal{J}_{\beta}^{q}(f_{\beta}^{\psi};x)\,dg(x) + O(1)\frac{\varepsilon_n E_n(f_{\beta}^{\psi})_p}{(1-q)^2}\right). \tag{60}$$

Применяя соотношения (57) к первому слагаемому правой части равенства (60), убеждаемся в справедливости (52′). Теорема доказана.

Рассматривая верхние грани обеих частей соотношений (52) и (52′) по классам $L_{\beta,p}^{\psi}$ и $C_{\beta,p}^{\psi}$ и учитывая, что

$$\sup_{f\in L_{\beta,p}^{\psi}} E_n(f)_s = \sup_{\substack{\|\varphi\|_p\le 1\\ \varphi\perp 1}} E_n(\mathcal{J}_{\beta}^{\psi}(\varphi))_s,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $1\le p\le\infty$ *и* $\psi\in\mathfrak{D}_q$, $0<q<1$, $\psi(k)>0$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$E_n(L_{\beta,p}^{\psi})_s = \psi(n)\left(q^{-n}E_n(L_{\beta,p}^{q})_s + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right),\quad 1\le s<\infty, \tag{61}$$

$$E_n(C_{\beta,p}^{\psi})_C = \psi(n)\left(q^{-n}E_n(C_{\beta,p}^{q})_C + O(1)\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2}\right), \tag{61′}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\ge n}\left|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ — *величины, равномерно ограниченные относительно* n, p, s, q, $\psi(k)$ *и* β_k.

Величины $q^{-n}E_n(L_{\beta,p}^{q})_s$, $1\le s<\infty$, и $q^{-n}E_n(C_{\beta,p}^{q})_C$ при $n\to\infty$ являются ограниченными сверху и снизу некоторыми положительными константами, зависящими, возможно, только от q, p и s. Оценка сверху величины $q^{-n}E_n(L_{\beta,p}^{q})_s$ следует из того, что $q^{-n}E_n(L_{\beta,p}^{q})_s \le q^{-n}\mathcal{E}_n(L_{\beta,p}^{q})_s \le C_{p,s}^{(1)}(1-q)^{-1}$ (см. (31)). Чтобы получить нужную оценку снизу, достаточно заметить, что функция $f_n(x) = \|\sin t\|_p^{-1}q^n\sin\left(nx - \dfrac{\beta_n\pi}{2}\right)$ принадлежит $L_{\beta,p}^{q}$, $1\le p<\infty$, и для нее наилучшее приближение в пространстве L_s, $1\le s<\infty$, среди полиномов $t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}$ будет доставлять полином, тождественно равный нулю (см., например, предложения 3.3.3 и 3.3.4 из [15, с. 56]. Следовательно,

$$q^{-n}E_n(L_{\beta,p}^{q})_s \ge q^{-n}E_n(f_n)_s = q^{-n}\|f_n\|_s = \frac{\|\sin t\|_s}{\|\sin t\|_p} = C_{p,s}^{(2)},$$

так что

$$C_{p,s}^{(2)} \le q^{-n}E_n(L_{\beta,p}^{q})_s \le C_{p,s}^{(1)}(1-q)^{-1}, \tag{62}$$

$$1\le s<\infty,\qquad C_{p,s}^{(i)}>0,\quad i=1,2.$$

Используя такие же рассуждения, получаем

$$C_p^{(2)} \le q^{-n} E_n(C^q_{\beta,p})_C \le C_p^{(1)}(1-q)^{-1}, \quad C_p^{(i)} > 0, \quad i = 1, 2. \tag{62'}$$

Поскольку последовательность ε_n стремится к нулю при $n \to \infty$, то с учетом (62) и (62′) в случаях, когда известны асимптотические равенства для величин $E_n(L^q_{\beta,p})_s$ и $E_n(C^q_{\beta,p})_C$, соотношения (61) и (61′) дают возможность записать асимптотическое равенство для величин $E_n(L^\psi_{\beta,p})_s$ и $E_n(C^\psi_{\beta,p})_C$.

К настоящему времени известны точные значения величин $E_n(L^q_{\beta,1})_1$ и $E_n(C^q_{\beta,\infty})_C$, $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ (при $\beta \in \mathbb{Z}$ см. [16], при $\beta \in \mathbb{R}$ — [17]).

Теорема В. *Пусть* $0 < q < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\beta,1})_1 = \frac{1}{\pi} E_n(P_{q,\beta})_1 = \| P_{q,\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot) \|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi} \max_t \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|. \tag{63}$$

Из равенств (63) вытекает

$$E_n(C^q_{\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\beta,1})_1 = \frac{4}{\pi}(q^n + \delta_n), \quad |\delta_n| < \frac{q^{3n}}{3(1-q^{2n})}. \tag{64}$$

Соотношения (64), а также теорема 6 позволяют сформулировать следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$E_n(C^\psi_{\beta,\infty})_C = \psi(n)\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)\right), \tag{65}$$

$$E_n(L^\psi_{\beta,1})_1 = \psi(n)\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)\right), \tag{65'}$$

где $\varepsilon_n = \sup_{k \ge n} \left| \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q \right|$, $O(1)$ — *равномерно ограниченные величины относительно* n, q, β *и* $\psi(k)$.

Анализируя доказательство теоремы В, содержащееся в [17, с. 128 – 129], можно убедиться, что равенства (63) останутся справедливыми, если вместо β, фигурирующего в определении классов $C^q_{\beta,\infty}$ и $L^q_{\beta,1}$ и ядра $P_{q,\beta}$, рассматривать последовательность $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. справедлива следующая теорема.

Теорема Г. *Пусть* $0 < q < 1$, $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$E_n(C^q_{\bar\beta,\infty})_C = E_n(L^q_{\bar\beta,1})_1 = \frac{1}{\pi} E_n(P_{q,\bar\beta})_1 = \|P_{q,\bar\beta} * \operatorname{sign} \sin n(\cdot)\|_\infty =$$

$$= \frac{4}{\pi} \max_t \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{(2\nu+1)n}}{2\nu+1} \sin\left((2\nu+1)t - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|. \tag{66}$$

Сопоставляя теоремы 6 и Г, получаем следующее утверждение.

Теорема 7′. *Пусть* $\beta_k = \beta + k\pi$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, $\psi(k) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические равенства*

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = \psi(n)\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)\right), \tag{67}$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = \psi(n)\left(\frac{4}{\pi} + O(1)\left(\frac{\varepsilon_n}{(1-q)^2} + \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)\right), \tag{67$'$}$$

где $\varepsilon_n = \sup\limits_{k \ge n}\left|\dfrac{\psi(k+1)}{\psi(k)} - q\right|$, $O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные относительно* n, q, β *и* $\psi(k)$.

Замечание 3. Асимптотические равенства (67) и (67′) остаются справедливыми и в случае $q = 0$. При этом в качестве β_k могут использоваться произвольные последовательности действительных чисел, т. е. в случае, когда $\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\,\psi(n+1), \tag{68}$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 = \frac{4}{\pi}\psi(n) + O(1)\,\psi(n+1), \tag{68$'$}$$

в которых $O(1)$ *— величины, равномерно ограниченные относительно* n, β_k *и* $\psi(k)$.

Действительно, так как

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C \le \mathscr{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C, \qquad E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 \le \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1,$$

то оценки сверху величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ и $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1$ вытекают из (36) и (36′).

С другой стороны, как следует из теоремы 1 работы [18], если $\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$, то найдется номер n_0 такой, что для любых натуральных $n \ge n_0$ будут выполняться неравенства

$$d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C) \ge \|\Psi_{\overline{\beta}} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_\infty, \tag{69}$$

$$d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L_1) \ge \|\Psi_{\overline{\beta}} * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_\infty, \tag{69$'$}$$

в которых $d_N(\mathfrak{N}, X)$ — N-мерный поперечник по Колмогорову, т. е. аппроксимационная характеристика центрально-симметричного множества $\mathfrak{N}$ банахового пространства X, определяемая равенством

$$d_N(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_N \subset X}\sup_{v \in \mathfrak{N}}\inf_{\xi \in F_N}\|v - \xi\|_X,$$

где точная нижняя грань берется по всем подпространствам F_N пространства X, размерность которых не превышает $N \in \mathbb{N}$ $(\dim F_N \le N)$. Сочетание оценок (69) и (69′) с очевидными неравенствами

$$E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C \ge d_{2n-1}(C^{\psi}_{\beta,\infty}, C),$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1 \ge d_{2n-1}(L^{\psi}_{\beta,1}, L_1)$$

дает нужные оценки снизу величин $E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C$ и $E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1$. Таким образом, верхние грани приближений с помощью сумм Фурье на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\beta,1}$,

$\psi \in \mathfrak{D}_0$, $\psi(k) > 0$, асимптотически совпадают со значениями верхних граней наилучших приближений и колмогоровских поперечников на этих классах в пространствах C и L соответственно.

Сопоставляя соотношения (35) и (35′) с (65) и (65′), видим, что если $\psi(k) > 0$ и $\psi \in \mathfrak{D}_q$, $0 < q < 1$, то верхние грани приближений в метриках C и L, доставляемых суммами Фурье и многочленами наилучших приближений, на классах $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ и $L^{\psi}_{\beta,1}$ асимптотически не совпадают, хотя остаются равными по порядку. При этом аппроксимативные свойства сумм Фурье, по сравнению с полиномами наилучших приближений, ухудшаются с уменьшением гладкости приближаемых функций, что выражается в увеличении значений $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathcal{E}_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C}{E_n(C^{\psi}_{\beta,\infty})_C}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathcal{E}_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1}{E_n(L^{\psi}_{\beta,1})_1}$ от 1 до $+\infty$ при росте q от 0 до 1.

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\bar{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069–1113.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207–256.
4. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **145**. – С. 126–151.
5. *Kolmogoroff A.* Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierschen Reihen differenzierbarer Funktionen // Ann. Math. – 1935. – **36**, № 2. – S. 521–526.
6. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1945. – **15**. – С. 1–76.
7. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**, № 2. – С. 243–296.
8. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1961. – **62**. – С. 61–97.
9. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
10. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 2. – С. 274–291.
11. *Степанец А. И.* Приближение $\bar{\psi}$-интегралов периодических функций суммами Фурье (небольшая гладкость). II // Там же. – № 3. – С. 388–400.
12. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.
13. *Теляковский С. А.* О приближении суммами Фурье функций высокой гладкости // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 510–518.
14. *Степанец А. И.* Уклонения сумм Фурье на классах целых функций // Там же. – № 6. – С. 783–789.
15. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
16. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4–5. – С. 245–249.
17. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 6. – С. 126–136.
18. *Сердюк А. С.* Поперечники та найкращі наближення класів згорток періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 5. – С. 674–687.

Получено 28.08.99