УДК 512.552.12

Б. В. Забавський, О. М. Романів (Львів. ун-т)

КІЛЬЦЯ З ЕЛЕМЕНТАРНОЮ РЕДУКЦІЄЮ МАТРИЦЬ

We establish necessary and sufficient conditions under which a quasi-Euclidean ring coincides with a ring with elementary reduction of matrices. We prove that a semilocal Bezout ring is a ring with elementary reduction of matrices and show that a 2-Euclidean domain is a ring with elementary reduction of matrices. We formulate and prove a criterion of the existence of solution to a matrix equation of a special type and write these solutions in the explicit form.

Встановлено необхідні та достатні умови, при яких квазіевклідове кільце збігається з кільцем з елементарною редукцією матриць. Доведено, що напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць, а також показано, що 2-евклідова область є кільцем з елементарною редукцією матриць. Сформульовано і доведено критерій існування розв'язку матричного рівняння спеціального типу і записано ці розв'язки в явному вигляді.

Вступ. Питанням зведення матриць до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями займались К. Гаус, Г. Сміт, Ван дер Варден та інші. В найбільш загальній формі задача про повний опис як комутативних, так і некомутативних кілець, над якими довільна матриця зводиться до канонічного діагонального вигляду елементарними перетвореннями, сформульована в [1].

В даній роботі знайдено необхідні та достатні умови, при яких квазіевклідове кільце збігається з кільцем з елементарною редукцією матриць; доведено, що напівлокальне кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць, а також показано, що 2-евклідова область є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Слід ще відмітити наступний факт. В алгебраїчній K-теорії важливу роль відіграє K_1-функтор, який співставляє деякому кільцю групу Уайтхеда. В комутативному випадку група Уайтхеда розкладається в пряму суму групи одиниць кільця і фактор-групи спеціальної лінійної групи по підгрупі, породженій елементарними матрицями [2, с. 38]. В багатьох цікавих випадках спеціальна лінійна група породжується елементарними матрицями (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю) і тому група Уайтхеда ізоморфна групі одиниць кільця. В даній роботі на основі розгляду кілець з елементарною редукцією матриць досліджуються саме такі комутативні кільця.

Означення та домовленості. Під кільцем R розуміємо комутативне кільце з відмінною від нуля одиницею, а під $\mathcal{U}(R)$ — групу зворотних елементів цього кільця. Позначимо через (a, b) найбільший спільний дільник елементів $a, b \in R$. Множину всіх максимальних ідеалів кільця R, які містять елемент a, позначатимемо $\operatorname{mspec}(a)$, а радикал Джекобсона — $\mathcal{J}(R)$. Відзначимо, що термін *напівлокальність* (скінченна кількість максимальних ідеалів) не імплікує ланцюгові умови. Кільце квадратних матриць порядку n з елементами кільця R позначимо через R_n, а *слід* і *визначник* матриці $A \in R_n$ — через $\operatorname{tr} A$ і $\det A$ відповідно.

Під *елементарною матрицею* з елементами кільця R розуміємо квадратну матрицю одного з трьох наступних типів [3]:

1) діагональна матриця зі зворотними елементами на головній діагоналі;

2) матриця, відмінна від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю;

3) матриця переставлення, тобто матриця, яка отримується з одиничної шляхом переставлення деяких її рядків і стовпців.

Групою елементарних матриць $\mathrm{GE}_n(R)$ назвемо групу, породжену елементарними матрицями порядку n другого типу (тобто матрицями, відмінними від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю). А через $\mathrm{SL}_n(R)$ позначимо *спеціальну лінійну групу,* тобто групу матриць порядку n, визначник яких дорівнює одиниці.

Будемо говорити, що матриці A і B з елементами кільця R є *елементарно еквівалентними* (в позначеннях $A \overset{e}{\sim} B$), якщо існують такі елементарні над R матриці $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_s$ відповідних розмірів, що $P_1 \ldots P_k A Q_1 \ldots Q_s = B$. Матриця A *має елементарну редукцію,* якщо вона елементарно еквівалентна канонічній діагональній матриці $\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0)$, де $\varepsilon_i R \bigcap R\varepsilon_i \supseteq$ $\supseteq R\varepsilon_{i+1}R$, $i = 1, 2, \ldots, r-1$ (під діагональною розуміємо, взагалі кажучи, прямокутну матрицю, в якій поза головною діагоналлю стоять нулі). Якщо над R довільна матриця має елементарну редукцію, то R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [1]. Кільце з елементарною редукцією матриць відрізняється від *кілець елементарних дільників* [4] тим, що в його означенні матриці $P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_s$ є не лише зворотними, а й елементарними. Зрозуміло, що кільце з елементарною редукцією матриць є кільцем елементарних дільників. Проте не будь-яке кільце елементарних дільників є кільцем з елементарною редукцією матриць. Як приклад можна навести кільце $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$ [1, 5], яке, зокрема, є кільцем головних ідеалів, але не є квазіевклідовим.

Кільце R називається *елементарно головним,* якщо для довільних $a, b \in R$ існують $c \in R$ і $M \in \mathrm{GE}_2(R)$ такі, що $(a, b)M = (c, 0)$ [5].

Якщо в даному означенні вимагати лише зворотність матриці M, то отримаємо означення правого кільця Ерміта, тобто якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують $c \in R$ і зворотна матриця $M \in R_2$ такі, що $(a, b)M = (c, 0)$, то кільце R називається *правим кільцем Ерміта.* Аналогічно можна означити *ліве кільце Ерміта.* В комутативному випадку ці класи кілець збігаються [4].

Критерій ермітовості ([6], теорема 3). *Комутативне кільце R є кільцем Ерміта тоді і тільки тоді, коли для довільних $a, b \in R$ існують такі $a_0, b_0, d \in$ $\in R$, що $a = a_0 d$, $b = b_0 d$ і $(a_0, b_0) = 1$.*

Кільце, в якому довільний скінченнопороджений ідеал є головним, називається *кільцем Безу.* Зрозуміло, що кільце Ерміта є кільцем Безу [4].

Комутативне кільце R називається *кільцем стабільного рангу один,* якщо для довільних взаємно простих $a, b \in R$ існує такий елемент $t \in R$, що $a + bt$ є зворотним елементом кільця R.

Квазіевклідові кільця. Під *квазіалгоритмом,* заданим на кільці R, розуміємо таку функцію $\varphi: R \times R \to W$ (W — деякий ординал), де для довільних a, $b \in R$ $(b \neq 0)$ існують такі $q, r \in R$, що $a = bq + r$ і $\varphi(b, r) < \varphi(a, b)$. Кільце R називають *квазіевклідовим* [5], якщо існує деякий ординал W і *квазіалгоритм* $R \times R \to W$. Прикладами квазіевклідових кілець є евклідові кільця, кільця нормування, регулярні кільця [5].

Пізніше ми будемо посилатись на деякі відомі факти. Наведемо їх.

Теорема 1 ([5], теорема 8). *Клас квазіевклідових кілець збігається з класом кілець елементарно головних.*

Теорема 2 ([5], теорема 17). *Нехай R — кільце і для довільного $x \in R$ анулятор $\mathrm{Ann}(x)$ породжений ідемпотентом. Тоді наступні твердження еквівалентні:*

i) *R є квазіевклідовим;*

ii) *R є кільцем Безу і $\mathrm{GE}_n(R) = \mathrm{SL}_n(R)$ для натурального $n \geq 2$.*

***Зауваження* 1.** Нехай $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R_2$, де R — квазіевклідове кільце. На підставі теореми 1 кільце R є елементарно головним. Тому для елементів x,

$y \in R$ існують $a \in R$ і елементарна матриця $M \in \mathrm{GE}_2(R)$ такі, що $(x, y)M = (a, 0)$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Отже, над квазіевклідовим кільцем замість матриці вигляду $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ достатньо розглядати трикутну матрицю вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$.

Твердження 1. *Квазіевклідове кільце є кільцем Ерміта.*

Для доведення даного твердження достатньо зауважити, що квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), а елементарно головне кільце є кільцем Ерміта.

Твердження 2. *Квазіевклідове кільце R є кільцем з елементарною редукцією матриць тоді і тільки тоді, коли матриця вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$, має елементарну редукцію.*

Доведення. *Необхідність* очевидна.

Для доведення *достатності* розглянемо випадок, коли $aR + bR + cR = dR$, де $d \notin \mathcal{U}(R)$. В силу критерію ермітовості існують такі елементи $a_1, b_1, c_1 \in R$, що $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $c = c_1 d$ і $a_1 R + b_1 R + c_1 R = R$. Тоді $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$. Оскільки матриця $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ має елементарну редукцію і $\mathrm{diag}\,(d, d)$ належить центру R_2, то і матриця вигляду $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ також має елементарну редукцію. Індукція за розмірами матриць завершує доведення.

Теорема 3. *Квазіевклідове кільце R, в якому довільний необоротний елемент міститься в не більш ніж зліченній множині максимальних ідеалів, є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Згідно з твердженням 2, для доведення теореми достатньо обмежитися матрицями вигляду $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, де $aR + bR + cR = R$. Якщо $a \in \mathcal{U}(R)$, то

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A має елементарну редукцію. Тому нехай $a \notin \mathcal{U}(R)$, тобто множина максимальних ідеалів, які містять a, непорожня ($\mathrm{mspec}\,(a) \neq \varnothing$). Покладемо $\mathrm{mspec}(a) = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n, \ldots\}$. Тоді можемо вважати, що $b \notin \mathcal{M}_1$ (якщо б $b \in \mathcal{M}_1$, то $(b + c) \notin \mathcal{M}_1$, тому що $aR + bR + cR = R$ і елементарними перетвореннями стовпців елемент b можна замінити елементом $(b + c)$).

Оскільки кільце R — елементарно головне (теорема 1), то існує така елементарна матриця P_1, що $P_1 A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$, де $aR + bR = a_1 R$.

Якщо $a_1 \in \mathcal{U}(R)$, то $P_1 A$ має елементарну редукцію. Тому нехай, з точністю до позначень, $a_1 \in \mathcal{M}_2$. Тоді $b_1 \notin \mathcal{M}_2$ (або $(b_1 + c_1) \notin \mathcal{M}_2$, тому що $a_1 R + b_1 R + c_1 R = R$). Оскільки кільце R є елементарно головним, то існує така елементарна матриця Q_1, що $P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, де $a_1 R + b_1 R = a_2 R$.

Продовжуючи даний процес, отримуємо сукупність матриць вигляду

$$P_k A Q_k = \begin{pmatrix} a_i & * \\ * & * \end{pmatrix},$$

яким відповідає такий ланцюг ідеалів:

$$aR \subset a_1 R \subset a_2 R \subset \ldots \subset a_i R \subset \ldots, \tag{1}$$

причому $a_i \notin \mathcal{M}_i$.

Позначимо $I = \bigcup_i a_i R$. Припустимо, що $I \neq R$. Тоді існує такий максимальний ідеал $\mathcal{M}$, що $I \subset \mathcal{M}$. Оскільки $aR \subset I$, то $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s$, де $\mathcal{M}_s \in \operatorname{mspec}(a)$. Це неможливо, тому що існує такий ідеал $a_s R$ з ланцюга (1), що $a_s \notin \mathcal{M}_s$. Отже, $I = R$, тобто ланцюг (1) скінченний, а значить, існують такі матриці P_n, Q_n (які є скінченними добутками елементарних матриць), що $P_n A Q_n$ є канонічною діагональною матрицею.

Наслідок 1. *Напівлокальне квазіевклідове кільце є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Наслідок 2. *Квазіевклідове кільце, в якому множина максимальних ідеалів є не більш ніж зліченна, є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Лема 1. *Довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем R є скінченним добутком елементарних матриць.*

Доведення. Спочатку доведемо, що довільну зворотну матрицю над квазіевклідовим кільцем за допомогою елементарних перетворень можна звести до діагонального вигляду. Доведення проведемо для матриці другого порядку.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ — зворотна над R матриця. Тоді $(a, b) = 1$ і, оскільки квазіевклідове кільце є елементарно головним (теорема 1), існує така матриця $Q \in \mathrm{GE}_2(R)$, що $(a, b) Q = (1, 0)$, тобто

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Нехай $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix}$, $P \in \mathrm{GE}_2(R)$. Маємо

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix},$$

що й потрібно було довести.

Отже, якщо A — довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем R, то існують такі матриці P, Q (які є скінченними добутками елементарних матриць), що

$$PAQ = F,$$

де F — діагональна матриця. Зрозуміло, що матриця F є зворотною матрицею. Оскільки визначник матриці F дорівнює добутку діагональних елементів, то всі ці діагональні елементи є зворотними. Отже, матриця F є елементарною (першого типу). Оскільки

$$A = P^{-1}FQ^{-1},$$

то звідси й випливає, що довільна зворотна матриця над квазіевклідовим кільцем є скінченним добутком елементарних матриць.

Теорема 4. *Напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай R — напівлокальне кільце Безу і елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Тоді

$$\operatorname{mspec}(a) \cap \operatorname{mspec}(b) = \varnothing. \tag{2}$$

Позначимо через r елемент кільця R, який належить всім максимальним ідеалам кільця R, крім максимальних ідеалів множини $\operatorname{mspec}(a)$ (такий елемент r існує, оскільки кільце R напівлокальне). Зрозуміло, що

$$\operatorname{mspec}(r) \cap \operatorname{mspec}(a) = \varnothing. \tag{3}$$

Розглянемо елемент $a + br \in R$. Припустимо, що $a + br \in \mathcal{M}$, де $\mathcal{M}$ — максимальний ідеал кільця R. Можливі такі випадки:

1) $a \in \mathcal{M}$ і $b \in \mathcal{M}$ — це суперечить умові (2).

2) $a \in \mathcal{M}$ і $r \in \mathcal{M}$ — суперечність з умовою (3).

Отже, наше припущення невірне. Тому $a + br = u \in \mathcal{U}(R)$. Тоді

$$(a, b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} = (u, b) \overset{e}{\sim} (u, 0).$$

Як бачимо, кільце R є елементарно головним, а отже, і квазіевклідовим. Тоді внаслідок наслідку 1 напівлокальне кільце Безу є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Тепер накладемо на кільце R наступну умову.

Умова 1. *Нехай для $a, b \in R\,(a \notin \mathcal{J}(R))$ існує таке $m \in R$, що $(b, m) = 1$ і для кожного $n \in R$ такого, що $(n, a) \neq 1$ і $(n, b) = 1$, маємо $(n, m) \neq 1$.*

В роботі [7] доведено таку теорему.

Теорема 5 ([7], теорема 2.6). *Кільце Ерміта R, елементи якого задовольняють умову 1, є кільцем елементарних дільників.*

Використаємо її для доведення наступної теореми, в якій умову 1 дещо перефразуємо.

Теорема 6. *Нехай R — кільце Ерміта і для будь-яких $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує таке $s \in R$, що $\operatorname{mspec}(s) = \operatorname{mspec}(a) \setminus \operatorname{mspec}(b)$. Тоді R — кільце з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Нехай елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = R$. Зрозуміло, що $\operatorname{mspec}(a) \cap \operatorname{mspec}(b) = \varnothing$. За умовою теореми існує деякий елемент $r \in R$, який належить всім максимальним ідеалам кільця R, крім максимальних ідеалів множини $\operatorname{mspec}(a)$. Тому $\operatorname{mspec}(r) = \operatorname{mspec}(0) \setminus \operatorname{mspec}(a)$. Очевидно, що $\operatorname{mspec}(r) \cap \operatorname{mspec}(a) = \varnothing$.

Розглянемо елемент $a + br \in R$. Міркуючи, як і при доведенні теореми 4, легко довести, що $a + br \in \mathcal{U}(R)$, тобто кільце R є квазіевклідовим. Тоді на основі теореми 5 і леми 1 отримуємо, що R є кільцем з елементарною редукцією матриць.

2-Евклідові області. Нехай $a \in R \setminus 0$, $b \in R$. Під *n-членним ланцюгом подільності* [8] розуміємо послідовність рівностей $b = q_1 a + r_1$, $a = q_2 r_1 + r_2, \ldots$ $\ldots, r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n$.

Нехай R — комутативне кільце без дільників нуля. Припустимо, що існує функція $\mathcal{N}\colon R \to \mathbb{Z}$ така, що $\mathcal{N}(0)=0$, $\mathcal{N}(a)>0$ для $a\neq 0$ і $\mathcal{N}(ab)\geq \mathcal{N}(a)$ для довільних $a, b\in R\setminus 0$. Таку функцію $\mathcal{N}$ назвемо *нормою* на R. Потрібно зауважити, що умова $\mathcal{N}(ab)\geq \mathcal{N}(a)$ для $a, b\in R\setminus 0$ є зайвою. Дійсно, якщо $\mathcal{N}\colon R\to \mathbb{Z}$ — така функція, що $\mathcal{N}(0) = 0$ і $\mathcal{N}(a) > 0$ для довільного $a\neq 0$, то, взявши $\mathcal{N}_1(a)=\min\{\mathcal{N}(ab) \mid b\in R\setminus 0\}$, легко переконатися, що функція $\mathcal{N}_1$ є нормою на R.

Комутативне кільце R без дільників нуля з заданою нормою $\mathcal{N}$ назвемо *n-евклідовою областю* [8] відносно норми $\mathcal{N}$, якщо для довільних елементів a, $b\in R$, $a\neq 0$, існує такий k-членний ланцюг подільності для деякого $k\leq n$, що $\mathcal{N}(r_k)<\mathcal{N}(a)$. Назвемо комутативне кільце R без дільників нуля *w-евклідовим* [8], якщо для довільних елементів $a, b\in R$, $a\neq 0$, існує такий k-членний ланцюг подільності для деякого k, що $\mathcal{N}(r_k)<\mathcal{N}(a)$. Очевидно, що 1-евклідова область є евклідовою областю.

Комутативне кільце R без дільників нуля назвемо GE_n*-областю,* якщо довільна зворотна матриця над R породжується елементарними матрицями порядку n другого типу [3].

Наведемо деякі відомі результати і наслідки з них.

Твердження 3 ([5], твердження 23). *Область цілісності R є квазіевклідовою тоді і тільки тоді, коли R є w-евклідовою.*

Твердження 4 ([8], твердження 14). *Комутативне кільце без дільників нуля є w-евклідовою областю тоді і тільки тоді, коли воно є GE_2-областю Безу.*

Нехай R — область з елементарною редукцією матриць, тоді, згідно з означенням R, довільний рядок має елементарну редукцію. Внаслідок теореми 2 R є квазіевклідовою областю, а на підставі твердження 3 R є n-евклідовою областю, тобто справедливе наступне твердження.

Твердження 5. *Довільна область з елементарною редукцією матриць є n-евклідовою областю.*

Оскільки далі будемо розглядати 2-евклідові області, то уточнимо означення таких областей. Комутативне кільце R без дільників нуля називається *2-евклідовою областю стосовно норми* $\mathcal{N}$, якщо для довільних $b\in R$ і $a\in R\setminus 0$ виконується одна з двох умов:

1) існують такі $q, r\in R$, що $b=aq+r$, де $\mathcal{N}(r)<\mathcal{N}(a)$;

2) існують такі $q_1, r_1, q_2, r_2\in R$, що $b=aq_1+r_1$, $a=r_1q_2+r_2$, де $\mathcal{N}(r_2)<\mathcal{N}(a)$.

Твердження 6. *Область Безу стабільного рангу один є 2-евклідовою областю.*

Доведення. Очевидно, що доведення досить провести для випадку двох взаємно простих елементів. Нехай $a, b\in R$ і $aR+bR=R$. Згідно з означенням R існують такі елементи $t\in R$ і $u\in \mathcal{U}(R)$, що $a-bt=u$. Звідси $a=bt+u$, $b=uu^{-1}b+0$. Згідно з [8] R є 2-евклідовою областю.

Теорема 7. *2-Евклідова область є областю з елементарною редукцією матриць.*

Доведення. Згідно з твердженням 4, доведення даної теореми достатньо провести для матриць другого порядку із взаємно простими елементами. Нехай A є такою матрицею в класі елементарно еквівалентних матриць і в ній на перетині першого рядка і першого стовпця стоїть ненульовий елемент найменшої норми. Припустимо, з точністю до позначень, що a є таким елементом, тобто

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}.$$

Нехай $b \neq 0$. Згідно з означенням R, $b = aq_1 + r_1$, $a = r_1 q_2 + r_2$, де $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$ ($\mathcal{N}$— норма області R). Випадок, коли $r_2 \neq 0$, не цікавий, оскільки в даному випадку для матриці A існує елементарно еквівалентна матриця, в якій на перетині першого рядка і першого стовпця стоїть ненульовий елемент з нормою меншою, ніж норма елемента a, а це суперечить вибору елемента a. Отже, нехай $b = aq + r$ і $a = rs$ для деяких $r, s \in R$. Тоді ми отримаємо ланцюг елементарно еквівалентних матриць

$$A \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} a & b - aq \\ c & d - cq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & r \\ * & * \end{pmatrix} \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} r & 0 \\ * & * \end{pmatrix} = B .$$

Оскільки $rR \subset aR$, то, згідно з означенням норми $\mathcal{N}$ і вибором елемента a, маємо $\mathcal{N}(r) = \mathcal{N}(a)$. Отже, шляхом елементарних перетворень матрицю A ми привели до трикутного вигляду $\begin{pmatrix} r & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$. Таким чином, випадок, коли $b \neq 0$, є несуттєвим. Тому, з точністю до позначень, можемо вважати, що $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, причому a є ненульовим елементом R з найменшою нормою серед всіх елементів матриць, елементарно еквівалентних до A.

Слід відмітити, що $aR + bR + cR = R$. Внаслідок обмежень на R маємо $b = aq_1 + r_1$, $a = r_1 q_2 + r_2$, де $\mathcal{N}(r_2) < \mathcal{N}(a)$. Як у випадку стовпців, випадок $r_2 \neq 0$ є очевидним. Тому нехай $r_2 = 0$. Тоді

$$A \overset{e}{\sim} \begin{pmatrix} a & 0 \\ r_1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 q_2 & 0 \\ r_1 & c \end{pmatrix} = B ,$$

причому $r_1 q_2 R + r_1 R + cR = r_1 R + cR = R$. Оскільки 2-евклідова область є GE_2-областю Безу, то для рядка (r_1, c) існують такі елементарні матриці $P_1, \ldots, P_n$, що $(r_1, c)P_1 \ldots P_n = (1, 0)$. Звідси $BP_1 \ldots P_n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = C$. Тоді, очевидно, що матриця C, а значить, і матриця A, мають елементарну редукцію.

Зауваження 2. Приклади 2-евклідових областей розглянуто в [5, 8]. Цікавим є приклад кільця всіх цілих алгебраїчних чисел. Таке кільце є областю Безу [9]. Крім того, воно не є областю головних ідеалів, оскільки не містить атомів, тобто воно не є евклідовою областю стосовно деякої норми. Таке кільце є областю стабільного рангу один [8]. Згідно з твердженням 4 і теоремою 7, кільце всіх цілих алгебраїчних чисел є кільцем з елементарною редукцією матриць.

Деякі застосування отриманих результатів.

Теорема 8. *Для квазіевклідової області R наступні властивості еквівалентні:*

i) *R — кільце з елементарною редукцією матриць;*

ii) *для довільної матриці $A \in R_2$, найбільший спільний дільник всіх в сукупності елементів якої дорівнює одиниці, знайдеться власний (тобто ненульовий і неодиничний) ідемпотент в правому ідеалі AR_2;*

iii) *ненульовий розв'язок має матричне рівняння $XAX = X$, де $X, A \in R_2$ і найбільший спільний дільник всіх в сукупності елементів матриці A дорівнює одиниці.*

Доведення. Проведемо доведення за схемою i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i).

i) $\Rightarrow$ ii). Нехай $aR + bR + cR = R$, де $a, b, c \in R$. Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R_2.$$

Оскільки R — кільце з елементарною редукцією матриць, то для матриці A існують такі зворотні матриці $P, Q \in R_2$ (які є скінченними добутками елементарних матриць), що $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}$. Тоді

$$\left(AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P\right)^2 = AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}PAQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P =$$

$$= AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P = AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P.$$

Бачимо, що $AQ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P$ — шуканий ідемпотент в ідеалі AR_2.

ii) $\Rightarrow$ iii). Нехай ідемпотент $E = E^2 \in AR_2$, тоді $E = AB$ (де $A \in R_2$). Розглянемо добуток

$$BABABAB = (BAB)(ABAB) = (BAB)AB = B(ABAB) = BAB.$$

Звідси, поклавши $X = BAB$, отримаємо $XAX = X$. Отже, рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок.

iii) $\Rightarrow$ ii). Нехай рівняння $XAX = X$ має ненульовий розв'язок. Тоді, домноживши це рівняння зліва на A, отримаємо $AXAX = AX$. Звідси випливає, що будь-який правий ідеал AR_2 містить власний ідемпотент.

ii) $\Rightarrow$ i). Розглянемо такі $a, b, c \in R$, що $aR + bR + cR = R$. Нехай $\begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} \in$ $\in R_2$ така, що $F = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar + bs & ak + bt \\ cs & ct \end{pmatrix}$ — власний ідемпотент.

В [10] (лема 1) доведено, що матриця $A \in R_2$, де R — область цілісності, є власним ідемпотентом тоді і тільки тоді, коли $\det M = 0$ і $\operatorname{tr} M = 1$. Зважаючи на цей факт, із рівностей $\operatorname{tr} F = 1$ і $\det F = 0$ одержуємо рівності $ar + bs + ct =$ $= 1$ і $sk = rt$ ($rtR \subseteq sR$) відповідно.

Нехай $dR = rR + sR$ і припустимо, що $r = dp$ і $s = dq$, де $p, q \in R$, $(p, q) =$ $= 1$. Тоді, використавши рівність $sk = rt$, маємо $dpt = dqk$, тобто $pt = qk$. Звідси видно, що q є дільником t, а тому існує деяке $m \in R$ таке, що $t = qm$.

Покладемо $P = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap + bq \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} p & -bd - cm \\ q & ad \end{pmatrix}$. Легко перевірити, що $\det P = \det Q = 1$. В силу теореми 2 спеціальна лінійна група $\mathrm{SL}_2(R)$ збігається з групою елементарних матриць $\mathrm{GE}_2(R)$. Тому P і Q — зворотні матриці, які є скінченними добутками елементарних над R матриць.

Тепер розглянемо добуток

$$PAQ = \begin{pmatrix} d & m \\ -cq & ap + bq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -bd - cm \\ q & ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що матриця A, а отже, і довільна матриця над R, мають елементарну редукцію. Тому R — кільце з елементарною редукцією матриць. Теорему доведено.

Залишилось записати розв'язок матричного рівняння $XAX = X$ в явному вигляді. Нам відомо, що $X = BAB$, де AB — власний ідемпотент. Тому

$$X = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & k \\ s & t \end{pmatrix},$$

де $ar + bs + ct = 1$ і $sk = rt(\mathrm{rt}R \subseteq sR)$. Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду групи $\mathrm{SL}_2(R)$, де R — кільце з елементарною редукцією матриць. Згідно з теоремою 2 R є областю Безу, в якій $\mathrm{GE}_2(R) = \mathrm{SL}_2(R)$, тобто довільну матрицю другого порядку над кільцем R, визначник якої дорівнює одиниці, ми можемо подати у вигляді скінченного добутку матриць $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Для доведення цього слід відмітити, що група $\mathrm{GE}_2(R)$ породжується матрицями вигляду $F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, де $a \in R$ [5]. Дійсно,

$$F(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$F^{-1}(a) = F(0)F(-a)F(0) \in \mathrm{GE}_2(R),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (F(0))^3 F(a), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = F(-a)(F(0))^3.$$

Як наслідок, отримуємо наступні результати.

Теорема 9. *Нехай R — 2-евклідова область. Тоді група $\mathrm{SL}_2(R)$ породжується матрицями вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, де $a, b \in R$.*

Теорема 10. *Група $\mathrm{SL}_2(R)$, де R — область Безу стабільного рангу один, породжується матрицями вигляду $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ і $\begin{pmatrix} b & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $a, b \in R$.*

1. *Zabavsky B. V.* Ring with elementary reduction matrix // Ring Theory Conf. (Miskols, Hungary, July 15–20. 1996) – P. 14.
2. *Милнор Дж.* Введение в алгебраическую K-теорию. – М.: Мир, 1974. – 196 с.
3. *Cohn P.* On the structure of the GL_2 of a ring // Inst. Haut. Édutes Sci. Publ. Math. – 1966. – **30**. – P. 5–53.
4. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1966 (1949). – **66**. – P. 464–491.
5. *Bougaut B.* Anneaux quasi-Euclidiens. These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67 p.
6. *Gillman L., Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 362–365.
7. *Larsen M., Lewis W., Schores T.* Elementary divisor rings and finitely presented modules // Ibid. – 1974. – **187**. – P. 231–248.
8. *Cooke G.* A weakening of the Euclidean property for integral domains and applications to algebraic number theory. I / J. reine und angew. Math. – 1976. – **282**. – P. 133–156.
9. *Kaplansky I.* Commutative Rings. – Boston, 1970.
10. *Дубровин Н. И.* Проективный предел с элементарными делителями // Мат. сб. – 1982. – **119**. – С. 89–95.

Одержано 21.11.97