УДК 519.21

В. В. Бакун (Нац. техн. ун-т Украины "КПИ", Киев)

ОБ ОБОБЩЕННОМ ЛОКАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПРОЦЕССА БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

We prove that functionals $\delta_\Gamma(B_t)$ and $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^k \cdots \partial x_d^{k_d}} \delta_\Gamma(B_t)$, $k_1 + \ldots + k_d = k > 1$, of d-dimensional Brownian process are Hida distributions, i.e. generalized Wiener functionals. Here, $\delta_\Gamma(\cdot)$ is a generalization of δ-function constructed on the bounded closed smooth surface $\Gamma \subset R^d$, $k \geq 1$, and determined by the action on finite continuous functions $\varphi(\cdot)$ in R^d according to the rule

$$(\delta_\Gamma, \varphi) := \int_\Gamma \varphi(x)\lambda(dx),$$

where $\lambda(\cdot)$ is a surface measure on Γ.

Доводиться, що функціонали $\delta_\Gamma(B_t)$ та $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^k \cdots \partial x_d^{k_d}} \delta_\Gamma(B_t)$, $k_1 + \ldots + k_d = k > 1$, від d-вимірного процесу броунівського руху є Хіда-розподілами, тобто узагальненими вінеровими функціоалами, де $\delta_\Gamma(\cdot)$ — узагальнення δ-функції, яке побудовано по обмеженій замкненій гладкій поверхні $\Gamma \subset R^d$, $k \geq 1$, і визначене дією на фінітні неперервні функції $\varphi(\cdot)$ в R^d за правилом

$$(\delta_\Gamma, \varphi) := \int_\Gamma \varphi(x)\lambda(dx),$$

де $\lambda(\cdot)$ — поверхнева міра на Γ.

Пусть Γ — ограниченная замкнутая гладкая поверхность в R^d, $d \geq 1$. Определим обобщение $\delta_\Gamma(\cdot)$ δ-функции по поверхности $\Gamma \subset R^d$ его действием на финитные гладкие функции по правилу

$$(\delta_\Gamma, \varphi) := \int_\Gamma \varphi(x)\, \lambda(dx),$$

где $\lambda(\cdot)$ — поверхностная мера на G.

Функционал $\delta_\Gamma(B_t)$ может быть использован для построения по процессу броуновского движения $B_t = \left(B_t^1, \ldots, B_t^d\right)$ локального времени на поверхности Γ вида

$$L(T, \Gamma, \lambda) = \int_0^T \delta_\Gamma(B_t)\, dt.$$

Функционалы подобного вида были исследованы в [1–3]. Доказывается, что производные от функционала $\delta_\Gamma(B_t)$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_d^{k_d}} \delta_\Gamma(B_t), \quad k_1 + \ldots + k_d = k, \quad k \geq 1,$$

являются обобщенными винеровскими функционалами.

Не имея достаточного доступа к мировой информационной сети, автор сознательно не приводит исторический обзор, так как такой обзор не может быть приемлемо полным. По той же причине ссылки даются не на оригинальные работы, а на доступные для автора.

1. Введение. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство, порожденное d-мерным винеровским процессом $B_t = \left\{\left(B_t^1, \ldots, B_t^d\right), \ t \in R\right\}$ и, следовательно, $\mathcal{F} = \sigma(B_t)$.

Обозначим через $S(R)$ пространство Шварца быстро убывающих функций на R. Для $f(\cdot) \in S(R)$ определим оператор

$$(Af)(t) = -f''(t) + (1+t^2)f(t), \qquad t \in R. \tag{1}$$

Замыкание A в $L^2(R)$ является самосопряженным положительным оператором, который будем обозначать тем же символом. Пусть для $\varphi \in S(R)$, $\psi \in S(R)$, $p \in R$

$$(\varphi, \psi)_p := \int_R (A^p\varphi)(t)\,\psi(t)\,dt. \tag{2}$$

Обозначим через $S_p(R)$ гильбертово пространство, которое является замыканием $S(R)$ по норме, соответствующей скалярному произведению $(\cdot,\cdot)_p$, и которую будем обозначать $|\cdot|_p$ ($|\ |_0$ — обычная L_2-норма).

Положим

$$\hat{S}_{p,n_1,\ldots,n_d} := \hat{S}_{p,n_1} \otimes \cdots \otimes \hat{S}_{p,n_d},$$

где $\hat{S}_{p,n}$ — симметричная часть $S_p(R)^{\otimes n}$.

Аналогично, пусть

$$\hat{L}^2_{n_1,\ldots n_d} := \hat{L}^2_{n_1} \otimes \cdots \otimes \hat{L}^2_{n_d},$$

где $\hat{L}^2_n$ — симметризация $L^2(R^n)$.

Известно [2], что каждый элемент из $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ единственным образом представим в виде ряда Ито – Винера по кратным винеровским интегралам

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \underbrace{\int_R \cdots \int_R}_{n} \Psi_{n_1,\ldots,n_0}(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,dB^1_{\tau_1}\ldots dB^d_{\tau_{m}}\ldots dB^d_{\tau_{n_d}} :=$$

$$:= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_j=n} I_{n_1,\ldots,n_j}(\Psi_{n_1,\ldots,n_d}), \tag{3}$$

где $\Psi_{n_1,\ldots,n_d} \in \hat{L}^2_{n_1,\ldots,n_d}$, $n_1, \ldots \geq 0$, $(I_0(\Psi) = E\Psi)$, и

$$\|\alpha\|_0^2 = E\alpha^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} n_1! \ldots n_d! \left|\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_0^2. \tag{4}$$

Для упрощения будем обозначать $\alpha \sim (\Psi_{n_1,\ldots,n_d})$. Таким образом, $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ изоморфно пространству $\oplus\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_j=n}\sqrt{n_1!}\ \ldots\ \sqrt{n_d!}\,\hat{L}^2_{n_1,\ldots,n_d}$. Если заменим $\left\{\hat{L}^2_{n_1,\ldots,n_d}\right\}$ на $\left\{\hat{S}_{p,n_1,\ldots,n_d}\right\}$, то получим пространства $\mathcal{S}_p$, $p \in R$, с соответствующими нормами

$$\|\alpha\|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} n_1! \ldots n_d! \left|\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_p^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_d} n_1! \ldots n_d! \left|(A^p)^{\otimes n}\,\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_0^2.$$

Пространство $\mathcal{S} = \bigcap_{p\geq 0} \mathcal{S}_p$ является ядерным (с соответствующей системой норм $\{\|\cdot\|_p,\ p \geq 0\}$) и его сопряженным пространством будет

$$\mathcal{S}^* = \bigcup_{p\geq 0} \mathcal{S}_{-p}.$$

Элементы пространства $\mathcal{S}$ называют тестовыми случайными величинами, а элементы $\mathcal{S}^*$ — Хида-распределениями или обобщенными винеровскими функционалами. Для каждого $p > 0$ справедливо естественное включение

$$\mathcal{S}_p \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, P) \subset \mathcal{S}_{-p}.$$

2. ***S*-преобразование** δ_Γ. Для $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$, $\xi_j \in S(R)$, $j = \overline{1,n}$, экспоненциальный функционал

$$\varepsilon(\xi) := \exp\left\{\sum_{j=1}^{d}\int_R \xi_j(t)\,dB_t^j - \frac{1}{2}|\xi|_0^2\right\}. \sim$$

$$\sim \left(\frac{1}{n_1! \cdots n_d!}\,\xi_1^{\otimes n_1}\otimes \cdots \otimes \xi_d^{\otimes n_d}\right) \tag{5}$$

является тестовой случайной величиной.

Для произвольной $\Phi \in \mathcal{S}^*$ S-преобразование функционала Φ определяется как

$$(S\Phi)(\xi) := \ll \Phi, \quad \varepsilon(\xi) \gg, \tag{6}$$

где $\ll\cdot,\cdot\gg$ обозначает спаривание элементов из $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}^*$.

Каждое Хида-распределение однозначно определяется его S-преобразованием. В частности, если

$$U(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_d=n}\left\langle \Psi_{n_1,\ldots,n_d}, \xi_1^{\otimes n_1}\otimes \cdots \otimes \xi_d^{\otimes n_d}\right\rangle,$$

где $\Psi_{n_1,\ldots,n_d} \in \hat{L}^2_{n_1,\ldots,n_d}$, и для некоторого $p \geq 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_d=n} n_1! \ldots n_d! \left|\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_{-p}^2 < \infty, \tag{7}$$

то найдется такой $\Phi \in \mathcal{S}_{-p}$, что $(S\Phi)(\xi) = U(\xi)$ и выражение (7) совпадает с $\|\Phi\|_{-p}^2$. В этом случае мы также будем обозначать $\Phi \sim \left(\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right)$.

Пусть f — ограниченная борелевская функция на R^d. Известно [2], что S-преобразование для функционала $f(B_t)$ имеет вид

$$[Sf(B_t)](\xi) = (T_t f)\left(\int_o^t \xi(s)\,ds\right), \qquad t \geq 0, \tag{8}$$

где $\{T_t, t \geq 0\}$ является группой переходных вероятностей d-мерного процесса броуновского движения, т. е.

$$(T_t f)(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{R^d} f(y)\,e^{-\frac{|x-y|}{2t}}\,dy, \qquad x, y \in R^d \tag{9}$$

($|\cdot|$ — обычное расстояние в R^d).

Подставляя формально функцию δ_Γ в выражение (9), получаем

$$[S\delta_\Gamma(B_t)](\xi) = \int_\Gamma (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\left|x - \int_0^t \xi(s)ds\right|\right\} dx \tag{10}$$

или, применяя формулу для производящей функции многочленов Эрмита,

$$[S\delta_\Gamma(B_t)](\xi) =$$

$$= (2\pi t)^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \int_\Gamma e^{-|x|^2/2t} \prod_{j=1}^{d} \frac{H_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right)}{n_j!} dx \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{\int_0^t \xi_j(s)ds}{\sqrt{2t}}\right)^{n_j}, \tag{11}$$

где $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$, $t \in R$, $n \ge 0$.

Таким образом, можно утверждать, что симметричные ядра кратных винеровских интегралов в разложении функционала $\delta_\Gamma(B_t)$ в ряд Ито – Винера должны иметь вид

$$(2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} \int_\Gamma e^{-\frac{|x|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} \frac{H_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right)}{n_j!} dx \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1_{(0,t]}}{\sqrt{2t}}\right)^{\otimes n_j}. \tag{12}$$

3. Основные результаты.

Лемма 1. *Для произвольных* $p > 0$, $t > 0$ *функционал* $\delta_\Gamma(B_t) \in S_{-p}$.

Доказательство. Обозначим

$$\Psi_{n_1,\ldots,n_d}(t) = \int_\Gamma (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \frac{H_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right)}{n_j!} e^{-\frac{|x|^2}{2t}} dx \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1_{(0,t]}}{\sqrt{2t}}\right)^{\otimes n_j}. \tag{13}$$

Пусть $c = \sup_{n,x} e_n(t)$ [4], где функции $e_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t)$, $n \ge 0$, образуют ортонормированный базис в $L^2(R)$ и одновременно являются собственными функциями оператора A:

$$A e_n = (2n + 2) e_n, \quad n \ge 0, \tag{14}$$

и, следовательно,

$$|f|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+n)^{2p} \,|< f, e_n >|^2, \quad f \in S_p(R). \tag{15}$$

Учитывая, что спектр оператора A равен $\{2k,\ k \in N\}$ и, следовательно, $\|A^{-p}\| \le 2^{-p}$, легко получаем оценку нормы

$$\left|\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_{-p}^2 = \left|(A^{-p})^{\otimes n}\, \Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_0^2 \le$$

$$\le 2^{-2np} c^2 \pi^{-d/2} (2t)^{-d} \frac{\lambda^2(\Gamma)}{n_1! \ldots n_d!}, \quad p > 0. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\|\delta_\Gamma(B_t)\|_{-p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\cdots+n_d=n} n_1! \ldots n_d! \left|\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right|_{-p}^2 \le$$

$$\le c^2 \lambda^2(\Gamma) (2t)^{-d} \pi^{-d/2} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2np} C_{n+d-1}^{d}. \tag{17}$$

Поскольку $C^d_{n+d-1} \sim n^d$, $n \to \infty$, то ряд (17) сходится для произвольного $p > 0$, что и требовалось доказать.

Пусть производная $\dfrac{\partial}{\partial t}\delta_\Gamma$ определяется действием на финитные непрерывно дифференцируемые функции $\varphi(x)$, $x \in R^d$, по правилу

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\delta_\Gamma, \varphi\right) = -\left(\delta_\Gamma, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right). \tag{18}$$

Мы можем исследовать производную для функционала $\delta_\Gamma(B_t)$, используя теорию стохастической производной для обобщенного гауссовского случайного элемента [5].

Пусть ζ — обобщенный гауссовский случайный элемент в $H = L^2(R^d)$, соответствующий функциональной производной винеровского процесса по времени, имеющий нулевое среднее и единичный корреляционный оператор, и пусть $\alpha \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ разлагается в ряд

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\zeta, \ldots, \zeta)$$

по полилинейным симметричным формам $Q_n(\zeta, \ldots, \zeta)$ Гильберта – Шмидта от ζ (соответствующий ряду Ито – Винера по кратным интегралам). Тогда ряд

$$D^k_{\varphi_1,\ldots,\varphi_k}\alpha = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\, Q_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \zeta, \ldots, \zeta), \qquad \varphi_1, \ldots, \varphi_k \in H,$$

определяет стохастическую производную порядка k случайной величины α.

Справедливо утверждение.

Лемма 2. *Для произвольных* $p > 0$, $t > 0$, $\varphi \in H$

$$D_\varphi \delta_\Gamma(B_t) \in \mathcal{S}_{-p}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть

$$\delta_\Gamma(B_t) \sim \left(\Psi_{n_1,\ldots,n_d}\right).$$

Тогда

$$D_\varphi \delta_\Gamma(B_t) = \sum_{n=0}^{\infty} n \sum_{n_1+\cdots+n_j=n} I_{n_1,\ldots,n_d}((\Psi_{n_1,\ldots,n_d}, \varphi)).$$

Применяя оценку нормы

$$\left| n(\Psi_{n_1,\ldots,n_d}, \varphi)\right|^2_{-p} \le n^2 \left|(\Psi_{n_1,\ldots,n_d})\right|^2_{-p} |\varphi|^2_0 \tag{20}$$

и учитывая оценку (17), получаем

$$\left\| D_\varphi \delta_\Gamma(B_t)\right\|^2_{-p} \le \frac{c^2\lambda^2(\Gamma)}{\left(2t\sqrt{\pi}\right)^d} |\varphi|^2_0 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-np} C^d_{n+d-1} < \infty, \tag{21}$$

что и требовалось доказать.

Пусть $\{f_\varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$ — последовательность регулярных функций в R^d, сходящихся к функции δ_Γ в пространстве обобщенных функций при $\varepsilon \to +0$. Например, положим

$$f_\varepsilon(x) = \delta_\Gamma * h_\varepsilon = \int_\Gamma h_\varepsilon(x-y)\,\lambda(dy), \qquad x, y \in R^d,$$

где последовательность регулярных функций $h_\varepsilon(\cdot) \to \delta_0(\cdot)$ при $\varepsilon \to +0$ и $\int_{R^d} h_\varepsilon(x)\, dx = 1$.

Лемма 3. *Для произвольных* $p > 0$, $t > 0$

$$f_\varepsilon(B_t) \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \delta_\Gamma(B_t) \quad \textit{в пространстве } S_{-p}.$$

Доказательство. Легко установить, что

$$[Sf_\varepsilon(B_t)](\xi) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{R^d} f_\varepsilon(x)\, e^{-\frac{1}{2t}\left|x-\int_0^t \xi(s)ds\right|} dx =$$

$$= (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\dots+n_d=n} \int\limits_{R^d} f_\varepsilon(x) \prod_{j=1}^{n} \frac{H_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right)}{n_j!} e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{\int_0^t \xi_j(s)ds}{\sqrt{2t}}\right)^{n_j}.$$

Положим

$$\Psi_{\varepsilon, n_1,\dots,n_d}(t) = (2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \int\limits_{R^d} f_\varepsilon(x) \prod_{j=1}^{n} \frac{H_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right)}{n_j!} e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1_{(0,t]}}{\sqrt{2t}}\right)^{\otimes n_j} =$$

$$= (2t)^{-\frac{d}{2}} \pi^{-\frac{d}{4}} \int\limits_{R^d} f_\varepsilon(x) \prod_{j=1}^{n} \frac{e_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right)}{\sqrt{n_j!}} e^{\frac{-|x|^2}{2t}} dx \prod_{j=1}^{d} \left(\frac{1_{(0,t]}}{\sqrt{2t}}\right)^{\otimes n_j}. \tag{22}$$

Тогда

$$\left\|(A^{-p})^{\otimes n}\, \Psi_{\varepsilon, n_1,\dots,n_d}\right\|_0^2 \le \frac{2^{-2np}(2t)^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}} C^2}{n_1! \dots n_d!} \left|\int_{R^d} f_\varepsilon(x)\, dx\right|_0^2 =$$

$$= \frac{2^{-2np}}{n_1! \dots n_d!} (2t)^{-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \lambda^2(\Gamma), \tag{23}$$

и, следовательно, ряд

$$\|f_\varepsilon(B_t)\|_{-p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+\dots+n_d=n} n_1! \dots n_d! \left|\Psi_{\varepsilon, n_1,\dots,n_d}\right|_{-p}^2$$

сходится равномерно по $\varepsilon > 0$.

Пусть $n_1, \dots, n_d$ — фиксированы. Оценим норму разности

$$\left|\Psi_{\varepsilon, n_1,\dots,n_d} - \Psi_{n_1,\dots,n_d}\right|_{-p}^2 \le \frac{2^{-2np}(2t)^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}{n_1! \dots n_d!} \left| \int\limits_{R^d} f_\varepsilon(x)\, e^{\frac{-|x|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right) dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Gamma} e^{\frac{-|y|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{y_j}{\sqrt{2t}}\right) \lambda(dy) \right|_0^2 =$$

$$= \frac{2^{-2np}(2t)^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}{n_1! \dots n_d!} \left| \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{R^d} h_\varepsilon(x-y)\, e^{\frac{-|x|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right) dx\, \lambda(dy) - \right.$$

$$- \int_{\Gamma} e^{\frac{-|y|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{y_j}{\sqrt{2t}}\right) \lambda(dy) \Bigg|_0^2 =$$

$$= \cdots \left| \int_{\Gamma} \int_{R^d} h_\varepsilon(x-y) \left[e^{\frac{-|x|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right) - e^{\frac{-|y|^2}{2t}} \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{y_j}{\sqrt{2t}}\right) \right] dx\, \lambda(dy) \right|_0^2 \le$$

$$\le \cdots \left| \int_{\Gamma} \int_{R^d} h_\varepsilon(x-y) dx\, \lambda(dy) \right|_0^2 \cdot \varepsilon_0^2 = \frac{2^{-2np} (2t)^{-d} \pi^{-\frac{d}{2}}}{n_1! \ldots n_d!} \lambda^2(\Gamma) \cdot \varepsilon_0^2, \qquad (24)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ можно выбрать сколь-угодно малым при соответствующем выборе числа $\varepsilon > 0$.

Следовательно,

$$\left| \Psi_{\varepsilon, n_1, \ldots, n_d} - \Psi_{n_1, \ldots, n_d} \right| \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} 0. \qquad (25)$$

Из утверждения (25) и равномерной сходимости по $\varepsilon > 0$ ряда для нормы $\| f_\varepsilon(B_t) \|_{-p}^2$ можно сделать вывод, что

$$\| f_\varepsilon(B_t) - \delta_\Gamma(B_t) \|_{-p}^2 \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} 0. \qquad (26)$$

Лемма. доказана.

Лемма 5. *Последовательность* $\{ Df_\varepsilon(B_t), \varepsilon > 0 \}$ *сходится в пространстве* S_{-p} *при* $\varepsilon \to +0$ *и произвольных* $p > 0$, $t > 0$.

Доказательство. Поскольку для произвольных $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$

$$D_\varphi [f_{\varepsilon_1}(B_t) - f_{\varepsilon_2}(B_t)] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1 + \cdots + n_j = n} I_{n_1, \ldots, n_d} \left[(\Psi_{\varepsilon_1, n_1, \ldots, n_d} - \Psi_{\varepsilon_2, n_1, \ldots, n_d}, \varphi) \right],$$

то, применяя неравенство

$$\left| n (\Psi_{\varepsilon_1, n_1, \ldots, n_d} - \Psi_{\varepsilon_2, n_1, \ldots, n_d}) \right|_{-p} \le n \left| (\Psi_{\varepsilon_1, n_1, \ldots, n_d} - \Psi_{\varepsilon_2, n_1, \ldots, n_d}) \right|_{-p} |\varphi|_0,$$

получаем

$$\| D_\varphi [f_{\varepsilon_1}(B_t) - f_{\varepsilon_2}(B_t)] \|_{-p}^2 \le$$

$$\le (2t)^{-d} \pi^{-\frac{1}{2}} |\varphi|_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2np} n^2 \sum_{n_1 + \cdots + n_d = n} \left| \int_{R^d} [f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x)] \prod_{j=1}^{d} e_{n_j}\left(\frac{x_j}{\sqrt{2t}}\right) e^{\frac{-|x|^2}{2t}} \right|_0^2 \le$$

$$\le (2t)^{-d} \pi^{-\frac{1}{2}} |\varphi|_0^2 C^2 \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2np} n^2 C_{n+d-1}^{d} \left| f_{\varepsilon_1}(x) - f_{\varepsilon_2}(x) \right|_0^2 \xrightarrow[\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0]{} 0,$$

откуда следует утверждение леммы.

Пусть

$$\varphi(\cdot) = (0, \ldots, 0, 1_{(0,t]}, 0, \ldots, 0), \qquad (27)$$

где характеристическая функция $1_{(0,t]}$ является i-й координатой $\varphi(\cdot)$, $1 \le i \le$ $\le d$.

Теорема 1. *Если* $\varphi(\cdot)$ *имеет вид* (27), *то*

$$D_{\varphi}\,\delta_{\Gamma}(B_t) \;=\; t\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta_{\Gamma}(B_t). \tag{28}$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из справедливости соответствующего утверждения для функции $f_{\varepsilon}(\cdot)$:

$$D_{\varphi}\,f_{\varepsilon}(B_t) \;=\; t\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,f_{\varepsilon}(B_t),$$

утверждений лемм 1 – 5 и замкнутости оператора дифференцирования D [6].

Теорема 2. *Для произвольных* $p > 0$, $t > 0$, $1 \le i \le d$ *функционал*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta_{\Gamma}(B_t) \;=\; S_{-p}.$$

Доказательство. Из (28) следует

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta_{\Gamma}(B_t) \;=\; \frac{1}{t}D_{\varphi}\,\delta_{\Gamma}(B_t), \tag{29}$$

где функция $\varphi(\cdot)$ имеет вид (27).

Поэтому, используя оценку (21), получаем

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\,\delta_{\Gamma}(B_t)\right\|_{-p}^{2} \;\le\; C^2\lambda^2(\Gamma)(2t)^{-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-2np}n^2C_{n+d-1}^{d} \;<\; \infty, \tag{30}$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Для произвольных* $p > 0$, $t > 0$, $k_1 + \ldots + k_d = k \ge 1$

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^{k}\cdots\partial x_d^{k_d}}\,\delta_{\Gamma}(B_t) \;\in\; S_{-p}.$$

Доказательство. Утверждение теоремы легко получить, применяя k раз процедуру, описанную при доказательстве теорем 1 и 2, и замечая, что рост степени n, который при этом происходит в оценке (30), не изменяет сходимости этого ряда.

1. *Хида Т.* Броуновское движение. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *He S. W., Yany W. Q., Yao R. Q.* Local times of self-intersection for multidimentional Brownian motion // Nagoa Math. J. – 1995. – **138**. – P. 51 – 64.
3. *Watanabe H.* The local time of self-intersections of Brownian motion as generalized Brownion functions // Lett. Math. Phys. – 1991. – **23**. – P. 1 – 9.
4. *Szegö G.* Orthogonal polynomials // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. –1939. – **23**.
5. *Дороговцев А. А.* Элементы стохастического дифференциального исчисления // Математика сегодня. – 1989. – Вып. 5. – С. 105 – 131.
6. *Дороговцев А. А.* Стохастический анализ и случайные отображения в гильбертовом пространстве. – Киев: Наук. думка, 1992. – 120 с.

Получено 10.09.97,
после доработки — 20.03.98