УДК 517.56

И. И. Марченко (Харьк. ун-т)

ОБ ОТКЛОНЕНИЯХ И ДЕФЕКТАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО НИЖНЕГО ПОРЯДКА

Estimates for a sum of deviations and a sum of defects to power $\frac{1}{2}$ are obtained in terms of the Valiron defect of a derivative at zero. In particular, the Fuchs hypothesis.

Одержано оцінки для суми відхилень і суми дефектів у степені $\frac{1}{2}$ через валіронівський дефект похідної в нулі. Зокрема, підтверджено гіпотезу В. Фукса (1958).

1. Будем использовать стандартные обозначения теории распределения значений: $m(r,a,f)$, $N(r,a,f)$, $T(r,f)$, $\delta(a,f)$, $\Delta(a,f)$ [1]. Из второй основной теоремы Р. Неванлинны следует соотношение дефектов $\sum_{(a)} \delta(a,f) \le 2$.

В случае целых функций конечного порядка это неравенство уточнено в работе [2]:

$$\sum_{a \ne \infty} \delta(a,g) \le \delta(0,g').$$

Для суммы дефектов в степени $\frac{1}{2}$ отметим результат В. Фукса [3]:

$$\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a,f) \le C(p \log p)^{1/2},$$

где f — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, а $p = \max(2, \lambda)$. В этой же работе В. Фукс высказал гипотезу, что, на самом деле, справедлива оценка

$$\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a,f) \le C\left(\sqrt{\lambda}+1\right). \tag{1}$$

В 1969 г. В. П. Петренко [4] предложил измерять приближение мероморфной функции к числу a в равномерной метрике:

$$\mathcal{L}(r,a,f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|}, \qquad \mathcal{L}(r,\infty,f) = \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|.$$

Величина $\beta(a,f) = \liminf\limits_{r\to\infty} \dfrac{\mathcal{L}(r,a,f)}{T(r,f)}$ называется величиной отклонения функции f относительно числа a. Ясно, что $\delta(a,f) \le \beta(a,f)$. В 1976 г. А. Ф. Гришин [5] построил пример мероморфной функции произвольного порядка ρ, для которой $\delta(\infty,f)=0$, а $\beta(\infty,f) \ge 1$. Хотя величина отклонения характеризует приближение мероморфной функции к числу a в более сильной метрике, чем величина дефекта, но, тем не менее, оказалось, что для мероморфных функций конечного нижнего порядка свойства величин отклонений напоминают свойства величин дефектов. Так, В. П. Петренко [4] получил точную оценку для величины отклонения мероморфной функции конечного нижнего порядка λ:

$$\beta(a,f) \le \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если } \lambda \le \dfrac{1}{2}; \\ \pi\lambda, & \text{если } \lambda > \dfrac{1}{2}, \end{cases} \tag{2}$$

а также некоторую оценку для суммы отклонений. Следует отметить, что оценка (2) при $\lambda \le \frac{1}{2}$ получена ранее А. А. Гольдбергом и И. В. Островским [6]. В частном случае целых функций порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и $a = \infty$ оценка (2) получена Н. В. Говоровым [7], который, тем самым, подтвердил гипотезу Пэйли, высказанную в 1932 г.

В работе [8] получен аналог соотношения дефектов для величин отклонений:

$$\sum_{(a)} \beta(a, f) \le \begin{cases} \dfrac{2\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если } \lambda \le \dfrac{1}{2}; \\ 2\pi\lambda, & \text{если } \lambda > \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

В 1970 г. Д. Шиа (см. [9, 10]) получил оценку для величины отклонения через валироновский дефект:

$$\beta(a,f) \le B(\lambda, \Delta) :=$$

$$:= \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}(1-(1-\Delta)\cos \pi\lambda), & \text{если } \arccos(1-\Delta) \ge \pi\lambda; \\ \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \text{если } \arccos(1-\Delta) < \pi\lambda, \end{cases}$$

где $\Delta = \Delta(a,f) = \limsup\limits_{r\to\infty} \dfrac{m(r, a, f)}{T(r, f)}$.

Точность оценки Д. Шиа доказана в работе [11].

В настоящей работе доказаны следующие теоремы*.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ. Тогда*

$$\sum_{a\ne\infty} \beta(a, f) \le 2B\big(\lambda, \Delta(0, f')\big).$$

Теорема 2. *Для мероморфных функций конечного нижнего порядка λ справедливо неравенство*

$$\sum_{a\ne\infty} \delta^{1/2}(a, f) \le \Big(2B\big(\lambda, \Delta(0, f')\big)\Big)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Пусть f — мероморфная функция нижнего порядка $\lambda \le 0{,}5$ и ее множество положительных отклонений содержит более одной точки. Тогда*

$$\sum_{(a)} \beta(a, f) \le 2\pi\lambda \sin \pi\lambda.$$

Теорема 4. *Пусть f — мероморфная функция нижнего порядка $\lambda \le 0{,}5$ такая, что ее множество дефектных значений содержит более чем одну точку. Тогда*

$$\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a, f) \le \sqrt{2\pi\lambda \sin \pi\lambda}.$$

В теореме 1 установлена оценка для суммы отклонений через валироновский дефект производной в нуле. Ранее была известна оценка такого типа только для одного отклонения. Теорему 1 мы получаем как следствие неравенства

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r_n, a_k, f) < \Big(2B\big(\lambda, \Delta(0, f')\big) + \overline{o}(1)\Big) T(r_n, f),$$

где r_n — некоторая последовательность, стремящаяся к бесконечности.

---

* Во всех теоремах предполагается, что $f \not\equiv \text{const}$.

Из этой оценки также следует теорема 2, в которой подтверждается справедливость гипотезы В. Фукса, т. е. справедливость неравенства (1). В теореме 3 получена точная по порядку λ при $\lambda \to 0$ оценка для суммы отклонений, которая уточняет известную ранее оценку (3) при $\lambda \le \frac{1}{2}$. В монографии [10] В. П. Петренко поставил вопрос об асимптотическом поведении при $\lambda \to 0$ величины

$$\sigma(\lambda) = \sup_{f \in \mathcal{M}} \sum_{(a)} \beta(a, f),$$

где $\mathcal{M}$ — класс мероморфных функций, для которых множество положительных отклонений состоит более чем из одной точки.

Из теоремы 3 и примера из [10] следует

$$2\pi\lambda \sin\frac{\pi\lambda}{2} \le \sigma(\lambda) \le 2\pi\lambda \sin \pi\lambda.$$

Теорему 3 мы получаем как следствие неравенства

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r_n, a_k, f) < (2\pi\lambda \sin \pi\lambda + \bar{o}(1)) T(r_n, f),$$

где r_n — некоторая последовательность, стремящаяся к бесконечности.

Из этой оценки следует также теорема 4. Эта оценка является точной по порядку λ при $\lambda \to 0$. Она уточняет результат, который доказали И. В. Островский и И. В. Казакова [12]:

$$\sum_{(a)} \delta^{1/2}(a, f) \le \frac{C\rho}{\sqrt{\sin \pi\rho}}.$$

2. Доказательство основных результатов опирается на свойства T^*-функции А. Бернстейна [13], которая определяется так:

$$m^*(z, u) = \frac{1}{2\pi} \sup_{|E| = 2\theta} \int_E u^+(re^{i\varphi})\, d\varphi, \qquad z = re^{i\theta},$$

$$T^*(z, u) = m^*(z, u) + N(r, u), \qquad N(r, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_2(re^{i\varphi})\, d\varphi,$$

где $|E|$ — лебегова мера E, $u(z) = v_1(z) - v_2(z)$ — δ-субгармоническая функция в плоскости $\mathbb{C}$, т. е. v_1, v_2 — субгармонические.

Основным свойством T^*-функции Бернстейна является ее субгармоничность в открытой верхней полуплоскости и непрерывность в замкнутой верхней полуплоскости без нуля.

Пусть f — мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, R_n — последовательность такая, что

$$\lambda = \liminf_{r \to \infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log T(R_n, f)}{\log R_n},$$

$$G_n = \left\{ z \colon |z| < R_n, \ |f'(z)| < R_n^{-2-\lambda} \right\},$$

$\{a_k\}_{k=1}^{q}$ — набор различных комплексных чисел, $c = \min_{k \ne j} |a_k - a_j|$, $G_{n,k}$ — множество, состоящее из связных компонент множества G_n, в каждой из которых есть точка z_1 такая, что $|f(z_1) - a_k| < \frac{c}{4}$. Множества $G_{n,k}$ при $n \ge n_0$ попарно не пересекаются [8, 14]. Далее при $n \ge n_0$ положим

$$u_{n,k}(z) = \begin{cases} \log\dfrac{1}{|f'(z)|}, & \text{если } z \in G_{n,k}; \\ (\lambda+2)\log R_n, & \text{если } z \notin G_{n,k}. \end{cases}$$

Функции $u_{n,k}$ являются δ-субгармоническими в круге $\{z: |z| < R_n\}$, причем их отрицательные массы сосредоточены в нулях $f'(z)$, лежащих в $G_{n,k}$ [8, 14].

При фиксированном $r > 0$ рассмотрим круговую перестройку функции $u_{n,k}(re^{i\theta})$, т. е. функцию $\tilde{u}_{n,k}(re^{i\theta})$, которая не возрастает на $[0, \pi]$, четная и равноизмеримая с $u_{n,k}(re^{i\theta})$ [15]. Тогда

$$m^*(re^{i\theta}, u_{n,k}) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\theta \tilde{u}_{n,k}(re^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Далее положим [8, 14]

$$T_0^*(z, f) = \sum_{k=1}^q T^*(z, u_{n,k}).$$

Пусть τ — произвольное строго положительное число,

$$0 < \alpha \le \min\left(\pi, \frac{\pi}{2\tau}\right), \qquad -\frac{\pi}{2\tau} \le \psi \le \frac{\pi}{2\tau} - \alpha,$$

$$h_n(r) = \frac{1}{\pi}\left\{\sum_{k=1}^q \tilde{u}_{n,k}(r)\cos\tau\psi - \sum_{k=1}^q \tilde{u}_{n,k}(re^{i\alpha})\cos\tau(\alpha+\psi) - \right.$$

$$\left. -\pi\tau\sin\tau(\alpha+\psi)T_0^*(re^{i\alpha}, f) + \pi\tau\sin\tau\psi N(r, 0, f')\right\}.$$

В работе [6] доказано следующее утверждение.

Лемма А. *Пусть* $A = \{r \in [1, R_n]: h_n(r) > 0\}$. *Тогда*

$$\tau\int\limits_A \frac{dt}{t} \le \log T(4R_n, f) + \log\log R_n + \underline{O}(1), \qquad n \to \infty.$$

Эта лемма используется при доказательстве следующей теоремы, которая является ключевой в нашей работе. В формулировке этой теоремы используется верхняя логарифмическая плотность множества, которая, как известно, определяется следующим образом:

$$\overline{\text{logdens}}\, E = \limsup_{R\to\infty}\frac{1}{\log R}\int\limits_{E\cap[1,R]}\frac{dt}{t}.$$

Теорема 5. *Пусть f — трансцендентная мероморфная функция конечного нижнего порядка λ, γ — произвольное строго положительное число, $\{a_k\}_{k=1}^q$ — набор различных комплексных чисел,*

$$E(\gamma) = \left\{r: \sum_{k=1}^q \mathcal{L}(r, a_k, f) < 2B\big(\gamma, \Delta(0, f')\big)T(r, f)\right\}.$$

Тогда

$$\overline{\text{logdens}}\, E(\gamma) \ge 1 - \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Доказательство. На основании формулы (3.5) из работы [16] имеем

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) \leq \sum_{k=1}^{q} \tilde{u}_{n,k}(r) + \sum_{k=1}^{q} \log^+ M\left(r, \frac{f'}{f-a_k}\right) +$$
$$+ (2+\lambda) q \log R_n + q \log^+ \frac{4}{c},$$

где $M(r,f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $c = \max_{k \neq j} \left| a_k - a_j \right|$.

При $\gamma \leq \lambda$ теорема 5 очевидна. Пусть $\gamma > \lambda$, τ — любое фиксированное число такое, что $\lambda < \tau < \gamma$. В лемме А положим $\psi = \frac{\pi}{2\tau} - \alpha$. Тогда

$$h_n(r) = \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{q} \tilde{u}_{n,k}(r) \sin \tau\alpha - \pi\tau T_0^*(re^{i\alpha}, f) + \pi\tau \cos \tau\alpha N(r, 0, f') \right\}.$$

Из определения дефекта Валирона

$$\Delta(0, f') = 1 - \liminf_{r \to \infty} \frac{N(r, 0, f')}{T(r, f')}$$

следует, что при $r \geq r_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$N(r, 0, f') > \left(1 - \Delta(0, f') - \varepsilon\right) T(r, f').$$

Кроме того, из определения функции $T_0^*(z, f)$ имеем

$$T_0^*(re^{i\theta}, f) \leq T(r, f') + (\lambda + 2) q \log R_n.$$

Но вне множества конечной меры $T(r, f') < 2T(r, f) + \underline{O}(\log T(r, f))$. Таким образом, для всех $r \geq r_0(\varepsilon)$, за исключением, быть может, множества E_1 конечной меры, выполняется неравенство

$$h_n(r) \geq \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{q} \tilde{u}_{n,k}(r) \sin \tau\alpha - 2\pi\tau(1 - \cos \tau\alpha(1 - \Delta - \varepsilon)) T(r, f) - \pi\tau(\lambda + 2) q \log R_n \right\}.$$

Пусть

$$B =$$
$$= \left\{ r\colon \sum_{k=1}^{q} \tilde{u}_{n,k}(r) \sin \tau\alpha - 2\pi\tau(1 - \cos \tau\alpha(1 - \Delta - \varepsilon)) T(r, f) - \pi\tau(\lambda + 2) q \log R_n > 0 \right\}.$$

Если $r \in B \setminus E_1$, то $h_n(r) > 0$. Поэтому в силу леммы А имеем

$$\tau \int_{B \cap [1, R_n]} \frac{dt}{t} \leq \log T(4R_n, f) + \log\log R_n + \underline{O}(1). \tag{4}$$

Так как f — трансцендентная функция, то $\lim_{r \to \infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = \infty$. Выберем $\varepsilon(R) \to$ $\to 0$ так, чтобы $\varphi(R) = \frac{T\left(R^{\varepsilon(R)}, f\right)}{\log R} \to \infty$ при $R \to \infty$. Пусть $S_n = R_n^{\varepsilon(R_n)}$. Тогда для всех $r \in [S_n, R_n]$ имеем

$$T(r, f) \geq T\left(R_n^{\varepsilon(R_n)}, f\right) = \varphi(R_n) \log R_n.$$

Следовательно, $\log R_n = \overline{o}(T(r, f))$ при $r \in [S_n, R_n]$, $n \to \infty$. Таким образом, для всех $r \in [S_n, R_n] \setminus B$

$$\sum_{k=1}^{q} \tilde{u}_{n,k}(r) \leq \frac{2\pi\tau}{\sin \tau\alpha} (1 - (1 - \Delta - \varepsilon) \cos \tau\alpha) T(r, f) + \overline{o}(T(r, f)). \tag{5}$$

В работе [6] доказан новый вариант леммы о логарифмической производной:

$$\log^+ \max_{|z|=r}\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| = \underline{O}(\log T(r, f)), \qquad r \to \infty, \qquad r \notin E,$$

где E — множество конечной меры.

Из этой леммы, неравенств (1) и (5) следует для всех $r \in [S_n, R_n] \setminus B$, за исключением, быть может, множества E_0 конечной меры, справедливость неравенства

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) \le \frac{2\pi\tau}{\sin\tau\alpha}(1-(1-\Delta-\varepsilon)\cos\tau\alpha)T(r, f) + \overline{o}(T(r, f)) <$$

$$< \frac{2\pi\tau}{\sin\tau\alpha}(1-(1-\Delta)\cos\tau\alpha)T(r, f) + \overline{o}(T(r, f)),$$

где $\Delta = \Delta(0, f')$. Если $\arccos(1-\Delta) < \pi\tau$, то в последнем неравенстве положим $\alpha = \arccos(1-\Delta)$, а если $\arccos(1-\Delta) \ge \pi\tau$, то положим $\alpha = \pi$. Следовательно, для всех $r \in [S_n, R_n] \setminus (B \cup E_0)$ при $n \to \infty$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) < 2B(\tau, \Delta)T(r, f) + \overline{o}(T(r, f)) < 2B(\gamma, \Delta)T(r, f).$$

Напомним, что $E(\gamma) = \left\{ r\colon \sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r, a_k, f) < 2B(\gamma, \Delta)T(r, f) \right\}$. Таким образом, $[S_n, R_n] \setminus (B \cup E_0) \subset E(\gamma)$, $n \to \infty$. Отсюда с учетом соотношения (4) получаем

$$\tau \int\limits_{E(\gamma)\cap[1, R_n]} \frac{dt}{t} \ge \tau \int\limits_{[S_n, R_n]\setminus(B\cup E_0)} \frac{dt}{t} \ge \tau\log R_n - \tau\log S_n -$$

$$-\log T(4R_n, f) - \log\log R_n + \underline{O}(1).$$

Разделим это неравенство на $\log R_n$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$:

$$\overline{\operatorname{logdens}}\, E(\gamma) \ge 1 - \frac{\lambda}{\tau}.$$

Из этого неравенства и произвольности числа $\tau < \gamma$ следует утверждение теоремы 5.

Следствие. *Пусть f — трансцендентная мероморфная функция конечного нижнего порядка λ. Тогда для каждого $\gamma > \lambda$ существует последовательность чисел $r_n \to \infty$ такая, что*

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r_n, a_k, f) < 2B(\gamma, \Delta)T(r_n, f), \qquad n \to \infty, \tag{6}$$

где $\Delta = \Delta(0, f')$.

Из неравенства (6) следует

$$\sum_{k=1}^{q} \beta(a_k, f) \le 2B(\gamma, \Delta).$$

В силу произвольности чисел $\gamma > \lambda$ и $q \in N$ получаем утверждение теоремы 1 для трансцендентных мероморфных функ.ций. Если функция f рациональна, то множества положительных отклонений и дефектных значений состоят из одной точки, и в этом случае теорема очевидна.

Докажем теорему 2. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^q$ — набор различных комплексных чисел, $c = \min_{k \neq j} |a_k - a_j|$, $\Omega_k = \left\{ z \colon |f(z) - a_k| < \frac{c}{2} \right\}$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Ясно, что множества Ω_k попарно не пересекаются. Далее

$$m(r, a_k, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a_k|} d\varphi \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_k(r)} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\varphi}) - a_k|} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \log^+ \frac{2}{c},$$

где $\omega_k(r) = \{ \varphi \colon re^{i\varphi} \in \Omega_k \}$. Так как множества $\omega_k(r)$, $k = 1, 2, \ldots, q$, попарно не пересекаются, то $\sum_{k=1}^q \operatorname{mes} \omega_k(r) \leq 2\pi$. Следовательно,

$$m(r, a_k, f) \leq \mathcal{L}(r, a_k, f) \frac{|\omega_k(r)|}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \log^+ \frac{2}{c}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^q (m(r, a_k, f))^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^q \mathcal{L}^{1/2}(r, a_k, f) |\omega_k(r)|^{1/2} + \frac{q}{\sqrt{2\pi}} \left(\log^+ \frac{2}{c} \right)^{1/2}.$$

Из неравенства Коши следует

$$\sum_{k=1}^q m^{1/2}(r, a_k, f) \leq \left(\sum_{k=1}^q \mathcal{L}(r, a_k, f) \right)^{1/2} + \underline{O}(1). \tag{7}$$

Далее воспользуемся неравенством (6):

$$\sum_{k=1}^q m^{1/2}(r, a_k, f) \leq \sqrt{2B(\gamma, \Delta)}\, T^{1/2}(r_n, f) + \underline{O}(1).$$

Отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^q \delta^{1/2}(a_k, f) \leq \sqrt{2B(\gamma, \Delta)}.$$

В силу произвольности $\gamma > \lambda$ получаем утверждение теоремы 2.

Докажем теорему 3. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^q$ — набор различных комплексных чисел такой, что $\beta(a_k, f) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$. По условию $q \geq 2$. Если $\lambda = \frac{1}{2}$, то теорема 3 следует из теоремы 1. Пусть $\lambda < \frac{1}{2}$. Выберем числа γ, τ так, чтобы $\lambda < \tau < \gamma < \frac{1}{2}$. В лемме А положим $\psi = 0$, $\alpha = \pi$. Тогда

$$\tilde{u}_{n,k}(re^{i\pi}) = \min_{|z|=r} u_{n,k}(z) = (\lambda + 2) \log R_n.$$

Следовательно,

$$h_n(r) = \frac{1}{\pi} \left\{ \sum_{k=1}^q \tilde{u}_{n,k}(r) - (\lambda + 2) \log R_n \cos \pi\tau - \pi\tau \sin \pi\tau T_0^*(re^{i\pi}, f) \right\}.$$

Пусть $E_1(\gamma) = \left\{ r \colon \sum_{k=1}^q \mathcal{L}(r, a_k, f) < 2\pi\gamma \sin \pi\gamma T(r, f) \right\}$. Далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 5, получаем

$$\overline{\log\operatorname{dens}} E_1(\gamma) \geq 1 - \frac{\lambda}{\gamma}.$$

Следовательно, для всех γ из интервала $\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)$ верхняя логарифмическая плотность множества $E_1(\gamma)$ положительна. Поэтому существует числовая последовательность $r_n \to \infty$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{q} \mathcal{L}(r_n, a_k, f) < 2\pi\gamma \sin \pi\gamma T(r_n, f), \qquad n \to \infty. \tag{8}$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{q} \beta(a_k, f) \leq 2\pi\gamma \sin \pi\gamma.$$

Переходя к пределу при $\gamma \to \lambda + 0$, получаем утверждение теоремы 3.

Из неравенств (7), (8) следует, что существует последовательность $r_n \to \infty$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{q} m^{1/2}(r_n, a_k, f) \leq \sqrt{2\pi\gamma \sin \pi\gamma}\, T^{1/2}(r_n, f) + \underline{O}(1), \qquad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{q} \delta^{1/2}(a_k, f) \leq \sqrt{2\pi\gamma \sin \pi\gamma}.$$

Отсюда с учетом произвольности числа $\gamma > \lambda$ следует утверждение теоремы 4.

1. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – М.: ОГИЗ, 1941. – 388 с.
2. *Хейман У. К.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
3. *Fuchs W. H. J.* A theorem on the Nevanlinnas deficiencies of meromorphic functions of finite order // Ann. Math. – 1958. – **68**, № 2. – P. 203 – 208.
4. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – № 2. – С. 414 – 454.
5. *Гришин А. Ф.* О сравнении дефектов $\delta_p(a)$ // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1976. – Вып. 25. – С. 56 – 66.
6. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Некоторые теоремы о росте мероморфных функций // Зап. мат. отд-ния Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. – 1961. – **27**. – С. 3 – 37.
7. *Говоров Н. В.* О проблеме Пэйли // Функцион. анализ и его прил. – 1969. – **3**, вып. 2. – С. 38 – 43.
8. *Марченко И. И., Щерба А. И.* О величинах отклонений мероморфных функций // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 1. – С. 3 – 24.
9. *Fuchs W. H. J.* Topics in Nevanlinna theory // Proc. NRL Conf. Classical Function Theory. – Washingtnon, 1970. – P. 1 – 32.
10. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1978. – 136 с.
11. *Рыжков М. А.* О точности оценки величины отклонения для мероморфной функции // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1982. – Вып. 37. – С. 114 – 116.
12. *Островский И. В., Казакова И. В.* Замечания о дефектах мероморфных функций малого порядка // Зап. мех.-мат. ф-та Харьк. ун-та и Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. – 1964. – **30**. – С. 70 – 74.
13. *Baernstein A.* Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta Math. – 1974. – **133**. – P. 139 – 169.
14. *Марченко И. И.* О росте целых и мероморфных функций // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 6. – С. 59 – 84.
15. *Хейман У. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 179 с.
16. *Марченко И. И.* Об аналоге второй основной теоремы для равномерной метрики // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1998. – **5**, № 3 / 4. – С. 212 – 227.

Получено 04.01.99