УДК 517.5

В. Ф. Бабенко, С. В. Бородачев (Днепропетров. ун-т)

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

We solve a problem of the optimization of approximate integration of functions of two variables defined on a rectangle and monotone in every variable by using the quadrature formulae with knots at the points of a rectangle net.

Розв'язано задачу оптимізації наближеного інтегрування визначених на прямокутнику функцій двох змінних, монотонних по кожній змінній, за допомогою квадратурних формул з вузлами в точках прямокутної мережі.

Задача оптимизации квадратурных формул на различных классах функций одной и многих переменных восходит к работам А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского конца 40-х начала 50-х годов. Изложение многих полученных в этом направлении результатов можно найти в монографии [1].

Пусть заданы числа $a, b > 0$. Через $F_2(a, b)$ обозначим класс функций f: $[0, a] \times [0, b] \to R$, монотонно неубывающих по каждой переменной и таких, что $f(0, 0) \geq 0$, $f(a, b) \leq 1$. Рассмотрим задачу оптимизации квадратурных формул на классе $F_2(a, b)$ в следующей постановке.

Пусть заданы числа $n, m \in N$ и разбиения $\Delta_n^1 : 0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq a$, Δ_m^2 : $0 \leq y_1 < \ldots < y_m \leq b$ отрезков $[0, a]$ и $[0, b]$ соответственно. Этим разбиениям соответствует множество

$$X_{n,m} = X(\Delta_n^1, \Delta_m^2) =$$
$$= \{(x_i, y_j) \colon i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m\} \subset [0, a] \times [0, b]. \tag{1}$$

Множество $X_{n,m}$ вида (1) и произвольная функция $\varphi_{n,m} \colon R^{nm} \to R$ порождают квадратурную формулу вида

$$S(f; X_{n,m}, \varphi_{n,m}) = \varphi_{n,m}(f(x_1, y_1), \ldots, f(x_n, y_1), \ldots, f(x_1, y_m), \ldots, f(x_n, y_m)). \tag{2}$$

Положим

$$R(f; X_{n,m}, \varphi_{n,m}) = \int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dy\, dx - S(f; X_{n,m}, \varphi_{n,m}),$$

$$R(F_2(a, b); X_{n,m}, \varphi_{n,m}) = \sup_{f \in F_2(a, b)} \left| R(f; X_{n,m}, \varphi_{n,m}) \right|,$$

$$R_{n,m}(F_2(a, b)) = \inf_{X_{n,m}} \inf_{\varphi_{n,m}} R(F_2(a, b);\ X_{n,m}, \varphi_{n,m}). \tag{3}$$

Требуется найти величину (3) и указать оптимальную квадратурную формулу (т. е. набор узлов $X_{n,m}$ и правило интегрирования $\varphi_{n,m}$, реализующие точные нижние грани в правой части (3)).

Отметим, что задача оптимизации квадратурных формул на классе монотонных функций одной переменной была решена Кифером [2] в 1957 г. В работе [3] эта задача рассматривалась на классе монотонных функций многих переменных в более общей постановке. В этой работе были получены важные порядковые результаты. В приведенной выше постановке нам удалось получить окончательное решение задачи.

Теорема 1. *Пусть заданы* $n, m \in N$. *Среди всевозможных квадратурных формул вида* (2) *оптимальной на классе* $F_2(a, b)$ *является формула*

$$S(f; \overline{X}_{n,m}, \overline{\varphi}_{n,m}) = ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)} + \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{ia}{n+1}, \frac{jb}{m+1}\right),$$

где $\overline{X}_{n,m} = \left\{\left(\frac{ia}{n+1}, \frac{jb}{m+1}\right):\ i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m\right\}$. *При этом*

$$R_{n,m}(F_2(a, b)) = ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}.$$

Никакая формула вида (2) *с набором узлов, отличным от набора* $\overline{X}_{n,m}$, *не является оптимальной на классе* $F_2(a, b)$.

Доказательство. Сначала докажем, что

$$R(F_2(a, b); \overline{X}_{n,m}, \overline{\varphi}_{n,m}) = ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}. \tag{4}$$

Для любой функции $f \in F_2(a, b)$ имеем

$$R(f; \overline{X}_{n,m}, \overline{\varphi}_{n,m}) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1}\int\limits_{(j-1)b/(m+1)}^{jb/(m+1)}\int\limits_{(i-1)a/(n+1)}^{ia/(n+1)} f(x, y)\,dx\,dy -$$

$$- ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)} - \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{ia}{n+1}, \frac{jb}{m+1}\right).$$

Учитывая монотонность f по каждой переменной и тот факт, что $f(a, b) \le 1$, получаем

$$R(f; \overline{X}_{n,m}, \overline{\varphi}_{n,m}) \le \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} f\left(\frac{ia}{n+1}, \frac{jb}{m+1}\right) -$$

$$- ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)} - \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{ia}{n+1}, \frac{jb}{m+1}\right) =$$

$$= \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\left(\sum_{i=1}^{n+1} f\left(\frac{ia}{n+1}, b\right) + \sum_{j=1}^{m} f\left(a, \frac{jb}{m+1}\right) - \frac{n+m+1}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\left(n + m + 1 - \frac{n+m+1}{2}\right) = \frac{ab(n+m+1)}{2(n+1)(m+1)}.$$

С другой стороны,

$$R(f; \overline{X}_{n,m}, \overline{\varphi}_{n,m}) \ge \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m+1} f\left(\frac{(i-1)\,a}{n+1}, \frac{(j-1)\,b}{m+1}\right) -$$

$$- ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)} - \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(\frac{ia}{n+1}, \frac{jb}{m+1}\right) =$$

$$= \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\left(\sum_{i=1}^{n+1} f\left(\frac{(i-1)\,a}{n+1}, 0\right) + \sum_{j=2}^{m+1} f\left(0, \frac{(j-1)\,b}{m+1}\right) - \frac{n+m+1}{2}\right) \ge$$

$$\geq \frac{ab}{(n+1)(m+1)}\left(-\frac{n+m+1}{2}\right) = -\frac{ab(n+m+1)}{2(n+1)(m+1)}$$

(последнее неравенство имеет место, так как $f(0,0) \geq 0$ и f монотонна по каждой переменной).

Таким образом, нами доказано, что для любой функции $f \in F_2(a,b)$

$$\left|R(f;\overline{X}_{n,m},\overline{\varphi}_{n,m})\right| \leq ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)},$$

и, следовательно,

$$R(F_2(a,b);\ \overline{X}_{n,m},\overline{\varphi}_{n,m}) \leq ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}. \tag{5}$$

Пусть теперь $f_0\colon [0,a]\times[0,b]\to R$, $f_0(x,y)=0$ для любой пары $(x,y)\in \in [0,a]\times[0,b]$. Очевидно, что $f_0 \in F_2(a,b)$,

$$\int_0^a\int_0^b f_0(x,y)\,dy\,dx = 0,$$

и

$$S(f_0;\overline{X}_{n,m},\overline{\varphi}_{n,m}) = ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}.$$

Таким образом,

$$R(F_2(a,b);\ \overline{X}_{n,m},\overline{\varphi}_{n,m}) \geq ab\frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}. \tag{6}$$

Сопоставляя (5) и (6), получаем (4).

Докажем, что любая другая формула вида (2) имеет на классе $F_2(a,b)$ не меньшую погрешность, а формулы с узлами во множествах вида (1), отличных от $\overline{X}_{n,m}$ — строго большую.

Пусть для $m,n\in N$

$$N_{n,m} = \{(i,j)\in N\times N\colon i=1,2,\ldots,n+1;\ j=1,2,\ldots,m+1\}.$$

Выделим систему W подмножеств множества $N_{n,m}$ следующим образом. Будем говорить, что $A\subset N_{n,m}$ принадлежит системе W, если выполнены следующие условия:

1) A состоит из $n+m+1$ элементов;

2) $(1,m+1)\in A$ и $(n+1,1)\in A$;

3) для любой пары $(i,j)\neq(n+1,1)$ выполняется одно и только одно из соотношений: либо $(i,j-1)\in A$, либо $(i+1,j)\in A$.

Пусть выбрано произвольное множество $X_{n,m}$ вида (1), задаваемое разбиениями $\Delta_n^1\colon 0\leq x_1<\ldots<x_n\leq a$, $\Delta_m^2\colon 0\leq y_1<\ldots<y_m\leq b$ отрезков $[0,a]$ и $[0,b]$ соответственно. Для удобства положим $x_0=0$; $y_0=0$; $x_{n+1}=a$; $y_{m+1}= =b$. Пусть также $P_{i,j}=P_{i,j}(X_{n,m})=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i=1,2,\ldots,n+1$, $j= =1,2,\ldots,m+1$. Каждое множество $A\in W$ задает множество

$$P_A = P_A(X_{n,m}) = \bigcup_{(i,j)\in A} P_{i,j} \subset [0,a]\times[0,b].$$

Геометрически множество P_A представляет собой „маршрут", состоящий из прямоугольников $P_{i,j}$, идущий из левого верхнего „угла" ($P_{1,m+1}$) прямоугольника $[0,a]\times[0,b]$ в правый нижний „угол" ($P_{n+1,1}$) этого прямоугольника. Положим

$$W(X_{n,m}) = \{P_A = P_A(X_{n,m}) \colon A \in W\}.$$

Для каждого множества $A \in W$ определим два подмножества P'_A и P''_A множества $[0,a]\times[0,b]$, положив

$$A' = \{(i,j) \in N_{n,m}\setminus A \colon (i,j_1)\in A \text{ для некоторого } j_1 > j\},$$

$$A'' = \{(i,j) \in N_{n,m}\setminus A \colon (i,j_1)\in A \text{ для некоторого } j_1 < j\}$$

и

$$P'_A = \bigcup_{(i,j)\in A'} P_{i,j}, \qquad P''_A = \bigcup_{(i,j)\in A''} P_{i,j}.$$

Множество P'_A — часть прямоугольника $[0,a]\times[0,b]$, расположенная ниже „маршрута" P_A, а множество P''_A — часть прямоугольника $[0,a]\times[0,b]$, расположенная выше „маршрута" P_A.

Пусть

$$S = ([0,a]\times[0,b])\setminus(P'_A \cup P''_A).$$

Ясно, что $\operatorname{mes} P_A = \operatorname{mes} S$. Положим

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y)\in P'_A \cup S, \\ 1, & \text{если } (x,y)\in P''_A, \end{cases}$$

$$f_2(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x,y)\in P'_A, \\ 1, & \text{если } (x,y)\in P''_A \cup S. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_1, f_2 \in F_2(a,b)$ и $f_1(x_i,y_j) = f_2(x_i,y_j)$ при любых $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому для любой функции $\varphi_{n,m} \colon R^{nm} \to R$ и выбранного множества $X_{n,m}$ получим

$$R(F_2(a,b); X_{n,m}, \varphi_{n,m}) \ge \max_{k=1,2}\left|\int_0^a\int_0^b f_k(x,y)\,dy\,dx - S(f_k; X_{n,m}, \varphi_{n,m})\right| \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\left\{\left|\int_0^a\int_0^b f_1(x,y)\,dy\,dx - S(f_1; X_{n,m}, \varphi_{n,m})\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\int_0^a\int_0^b f_2(x,y)\,dy\,dx - S(f_2; X_{n,m}, \varphi_{n,m})\right|\right\} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\left|\int_0^a\int_0^b f_1(x,y)\,dy\,dx - S(f_1; X_{n,m}, \varphi_{n,m}) - \right.$$

$$- \int_0^a \int_0^b f_2(x, y)\, dy\, dx + S(f_2; X_{n,m}, \varphi_{n,m})\Bigg|.$$

Поскольку функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ совпадают в точках из $X_{n,m}$, то

$$S(f_1; X_{n,m}, \varphi_{n,m}) = S(f_2; X_{n,m}, \varphi_{n,m}),$$

и, следовательно,

$$R(F_2(a, b); X_{n,m}, \varphi_{n,m}) \geq \frac{1}{2}\left|\int_0^a \int_0^b f_1(x, y)\, dy\, dx - \int_0^a \int_0^b f_2(x, y)\, dy\, dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\iint\limits_{P'_A \cup P''_A} (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dy\, dx + \iint\limits_S (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dy\, dx\right|.$$

Учитывая, что $f_2(x, y) = f_1(x, y)$ всюду на $P'_A \cup P''_A$ и $f_2(x, y) = 1$, $f_1(x, y) = 0$ всюду на S, получаем

$$R(F_2(a, b); X_{n,m}, \varphi_{n,m}) \geq \frac{1}{2}\left|\iint\limits_S (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dy\, dx\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_S dy\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{mes} S = \frac{1}{2}\operatorname{mes} P_A.$$

Поскольку множество $A \in W$ выбиралось произвольным, заключаем, что

$$R(F_2(a, b); X_{n,m}, \varphi_{n,m}) \geq \frac{1}{2}\max_{P_A \in W(X_{n,m})} \operatorname{mes} P_A$$

для любой функции $\varphi_{n,m}$ и, следовательно,

$$\inf_{\varphi_{n,m}} R(F_2(a, b); X_{n,m}, \varphi_{n,m}) \geq \frac{1}{2}\max_{P_A \in W(X_{n,m})} \operatorname{mes} P_A. \tag{7}$$

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Функция*

$$G(a, b, n, m; x, y) = xy + (n+m)\max\left\{\frac{(a-x)\,b}{n(m+1)}, \frac{a(b-y)}{(n+1)\,m}\right\} \tag{8}$$

переменных $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$ достигает минимума в единственной точке $(x, y) = \left(\frac{a}{n+1}, \frac{b}{m+1}\right)$. При этом

$$\min_{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]} G(a, b, n, m; x, y) = ab\,\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Доказательство. Сначала найдем минимум этой функции на множестве

$$B = \left\{(x, y) \in [0, a] \times [0, b]:\ \frac{(a-x)\,b}{n(m+1)} \geq \frac{a(b-y)}{(n+1)\,m}\right\}.$$

Если $(x, y) \in B$, то

$$y \geq b - \frac{(n+1)m(a-x)b}{an(m+1)} \tag{9}$$

и, следовательно,

$$G(a, b, n, m; x, y) \geq$$

$$\geq l(x) := x\left(b - \frac{(n+1)m(a-x)b}{an(m+1)}\right) + (n+m)\frac{(a-x)b}{n(m+1)}.$$

Квадратичная функция $l(x)$ на $[0, a]$ достигает минимума в единственной точке $x = \dfrac{a}{n+1}$, причем

$$l\left(\frac{a}{n+1}\right) = ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Следовательно, если $(x, y) \in B$ и $x \neq \dfrac{a}{n+1}$, то

$$G(a, b, n, m; x, y) > ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Если $(x, y) \in B$ и $x = \dfrac{a}{n+1}$, но $y \neq \dfrac{b}{m+1}$, то в силу (9) $y > \dfrac{b}{m+1}$, и из (8) получаем

$$G\left(a, b, n, m; \frac{a}{n+1}, y\right) >$$

$$> \frac{a}{n+1}\frac{b}{m+1} + (n+m)\frac{(a - a/(n+1))b}{n(m+1)} = ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Кроме того,

$$G\left(a, b, n, m; \frac{a}{n+1}, \frac{b}{m+1}\right) = ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Таким образом,

$$\min_{(x,y)\in B} G(a, b, n, m; x, y) = ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)},$$

причем минимум достигается только в точке $(x, y) = \left(\dfrac{a}{n+1}, \dfrac{b}{m+1}\right)$.

Аналогично устанавливается, что для любого $(x, y) \in [0, a] \times [0, b] \setminus B$

$$G(a, b, n, m; x, y) > ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}.$$

Таким образом,

$$\min_{(x,y)\in[0,a]\times[0,b]} G(a, b, n, m; x, y) = ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)}$$

и достигается только в точке $(x, y) = \left(\dfrac{a}{n+1}, \dfrac{b}{m+1}\right)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $n, m \in N$. *Для любого множества* $X_{n,m} \neq \overline{X}_{n,m}$

$$\max_{P_A \in W(X_{n,m})} \operatorname{mes} P_A > ab\frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)} = \operatorname{mes} P_{\overline{A}}, \tag{10}$$

где $P_{\overline{A}}$ *— произвольный элемент из* $W(\overline{X}_{n,m})$.

Доказательство. Будем рассуждать по индукции. Пусть сначала $n = m = 1$ и пусть множество $X_{1,1} = X(\Delta_1^1, \Delta_1^2) \neq \overline{X}_{1,1}$ порождено разбиениями Δ_1^1: $0 \le x_1 \le a$, Δ_1^2: $0 \le y_1 \le b$. В рассматриваемом случае $W(X_{1,1})$ содержит только два множества

$$P_{A_1} = P_{1,2} \cup P_{2,2} \cup P_{2,1}, \quad \operatorname{mes} P_{A_1} = a(b - y_1) + (a - x_1)y_1,$$

и

$$P_{A_2} = P_{1,2} \cup P_{1,1} \cup P_{2,1}, \quad \operatorname{mes} P_{A_2} = bx_1 + (a - x_1)y_1,$$

поэтому

$$\max_{P_A \in W(X_{1,1})} \operatorname{mes} P_A = \max\{\operatorname{mes} P_{A_1}, \operatorname{mes} P_{A_2}\} =$$

$$= (a - x_1)y_1 + 2\max\left\{\frac{bx_1}{2}, \frac{a(b-y_1)}{2}\right\} = G(a, b, 1, 1; a - x_1, y_1).$$

Теперь нужное нам утверждение (для $n = m = 1$) следует из леммы 1.

Пусть теперь $n \ge 2$, $m = 1$ и для пары чисел $(n-1, 1)$ утверждение леммы 2 справедливо. Пусть множество $X_{n,1}$ порождено разбиениями Δ_n^1 : $0 \le x_1 \ldots$ $\ldots < x_n \le a$ и Δ_1^2: $0 \le y_1 \le b$ прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$. Рассмотрим прямоугольник $[0, x_n] \times [0, b]$ и множество $X_{n-1,1}$, порожденное разбиениями Δ_{n-1}^1 : $0 \le x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ и Δ_1^2: $0 \le y_1 \le b$ сторон $[0, x_n]$ и $[0, b]$ соответственно. Из системы множеств $W(X_{n-1,1})$ выделим множество P_{A_0} так, чтобы

$$\operatorname{mes} P_{A_0} = \max_{P_A \in W(X_{n-1,1})} \operatorname{mes} P_A.$$

Положим $A_1 = A_0 \cup \{(n+1, 1)\}$. Ясно, что $P_{A_1} \in W(X_{n,1})$. В силу предположения индукции будем иметь

$$\operatorname{mes} P_{A_0} \ge bx_n\frac{n+1}{2n}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mes} P_{A_1} \ge bx_n\frac{n+1}{2n} + (a - x_n)y_1 \tag{11}$$

(в случае, когда $X_{n-1,1} \neq \overline{X}_{n-1,1}$, знак „$\ge$” в этом и предыдущем неравенствах надо заменить знаком „$>$”). Пусть, кроме того,

$$A_2 = \{(i, 2) : i = 1, 2, \ldots, n+1\} \cup \{(n+1, 1)\},$$

$$\operatorname{mes} P_{A_2} = a(b - y_1) + (a - x_n)y_1.$$

Имеем

$$\max_{P_A \in W(X_{n,1})} \operatorname{mes} P_A \geq \max\{\operatorname{mes} P_{A_1}, \operatorname{mes} P_{A_2}\} \geq$$

$$\geq (a - x_n) y_1 + (n+1) \max\left\{\frac{bx_n}{2n}, \frac{a(b-y_1)}{(n+1)}\right\} = G(a, b, n, 1; a - x_n, y_1),$$

и нужное утверждение снова следует из леммы 1, если $x_n \neq \dfrac{na}{n+1}$ или $y_1 \neq \dfrac{b}{2}$. Если же $x_n = \dfrac{na}{n+1}$ и $y_1 = \dfrac{b}{2}$, то для завершения доказательства неравенства (10) в рассматриваемом случае надо воспользоваться замечанием к неравенству (11).

Аналогично доказывается справедливость утверждения леммы 2 при $n = 1$ и произвольном $m \geq 2$.

Пусть теперь $n \geq 2$, $m \geq 2$ и для пар $(n-1, m)$, $(n, m-1)$ лемма верна. Пусть множество $X_{n,m}$ порождено разбиениями $\Delta_n^1 : 0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq a$ и $\Delta_m^2 : 0 \leq y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m \leq b$ сторон $[0, a]$ и $[0, b]$ прямоугольника $[0, a] \times [0, b]$ соответственно. Рассмотрим прямоугольник $[0, a] \times [y_1, b]$ и множество $X_{n,m-1}$, порождаемое разбиениями $\Delta_n^1 : 0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq a$, $\Delta_{m-1}^2 : y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m \leq b$ сторон $[0, a]$ и $[y_1, b]$ соответственно. Из системы множеств $W(X_{n,m-1})$ выделим множество P_{A_0} так, чтобы

$$\operatorname{mes} P_{A_0} = \max_{P_A \in W(X_{n,m-1})} \operatorname{mes} P_A.$$

Пусть $P_{A_1} = P_{A_0} \cup P_{(n+1,1)}$. Ясно, что $P_{A_1} \in W(X_{n,m})$. В силу предположения индукции будем иметь

$$\operatorname{mes} P_{A_0} \geq a(b - y_1) \frac{n+m}{(n+1)m}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mes} P_{A_1} \geq a(b - y_1) \frac{n+m}{(n+1)m} + (a - x_n) y_1 \tag{12}$$

(в случае, когда $X_{n,m-1} \neq \overline{X}_{n,m-1}$, знак „$\geq$” в этом и предыдущем неравенствах надо заменить знаком „$>$”).

Рассмотрим также прямоугольник $[0, x_n] \times [0, b]$ и множество $X_{n-1,m}$, порожденное разбиениями $\Delta_{n-1}^1 : 0 \leq x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n$ и $\Delta_m^2 : 0 \leq y_1 < \ldots$ $\ldots < y_{m-1} < y_m \leq b$ сторон $[0, x_n]$ и $[0, b]$ соответственно. Из системы множеств $W(X_{n-1,m})$ выделим множество P_{A_0} так, чтобы

$$\operatorname{mes} P_{A_0} = \max_{P_A \in W(X_{n-1,m})} \operatorname{mes} P_A.$$

Обозначим $A_2 = A_0 \cup \{(n+1, 1)\}$. Ясно, что $P_{A_2} \in W(X_{n,m})$. В силу предположения индукции будем иметь

$$\operatorname{mes} P_{A_0} \geq bx_n \frac{n+m}{n(m+1)}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mes} P_{A_2} \geq bx_n \frac{n+m}{n(m+1)} + y_1(a-x_n).$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\max_{P_A \in W(X_{n,m})} \operatorname{mes} P_A \geq$$

$$\geq y_1(a-x_n) + (n+m) \max\left\{\frac{bx_n}{n(m+1)}, \frac{a(b-y_1)}{(n+1)m}\right\} =$$

$$= G(a, b, n, m; a-x_n, y_1),$$

и нужное утверждение снова следует из леммы 1, если $x_n \neq \frac{na}{n+1}$ или $y_1 \neq \neq \frac{b}{m+1}$. Если же $x_n = \frac{na}{n+1}$ и $y_1 = \frac{b}{m+1}$, то для завершения доказательства неравенства (10) в рассматриваемом случае надо воспользоваться замечанием к неравенству (12).

Итак, утверждение леммы 2 справедливо для пары $(n, m) = (1, 1)$, для любой пары вида $(1, m)$ и любой пары вида $(n, 1)$, $n, m \in N$. Кроме того, из того, что оно справедливо для пар $(n-1, m)$ и $(n, m-1)$, следует, что оно справедливо для пары (n, m). По индукции заключаем, что утверждение леммы справедливо для любой пары $(n, m) \in N \times N$.

Лемма 2 полностью доказана.

В силу доказанной леммы и соотношений (3) и (7) получим

$$R_{n,m}(F_2(a, b)) \geq \frac{1}{2} \inf_{X_{n,m}} \max_{P_A \in W(X_{n,m})} \operatorname{mes} P_A = ab \frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}.$$

Учитывая соотношение (4), получаем

$$R_{n,m}(F_2(a, b)) = ab \frac{n+m+1}{2(n+1)(m+1)}.$$

Следовательно, формула $S(f; \overline{X}_{n,m}, \overline{\varphi}_{n,m})$ оптимальна для класса $F_2(a, b)$ среди рассматриваемых формул. Поскольку при $X_{n,m} \neq \overline{X}_{n,m}$

$$\max_{P_A \in W(X_{n,m})} \operatorname{mes} P_A > ab \frac{n+m+1}{(n+1)(m+1)},$$

заключаем, что формулы с узлами во множествах $X_{n,m} \neq \overline{X}_{n,m}$ оптимальными не являются.

Теорема доказана.

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. – М.: Наука, 1979. – 255 с.
2. *Kiefer J.* Optimum sequential search and approximation methods under minimum regularity assumptions // J. Soc. Indust. Appl. Math. – 1957. – **5**. – P. 105 –136.
3. *Papageorgiou A.* Integration of monotone functions of several variables // J. Complexity. – 1993. – **9**. – P. 252 – 268.

Получено 16.04.97