УДК 519.21

Ю. С. Мішура, Я. О. Ольцік (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ОПТИМАЛЬНІ МОМЕНТИ ЗУПИНКИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ДО ОДНІЄЇ ЗАДАЧІ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ

We solve the problem of finding the optimal switching time between two alternative strategies at the financial market in the case where a random process X_t, $t \in [0, T]$, describing a capital of investor satisfies a nonlinear stochastic differential equation. We find this switching time $\tau \in [0, T]$ as the optimal stopping time for certain process Y_t generated by the process X_t in such a way that the average capital of investor be maximized at the final time, i.e. EX_T.

Розв'язано задачу відшукання оптимального моменту переключення між двома альтернативними стратегіями на фінансовому ринку у випадку, коли випадковий процес X_t, $t \in [0, T]$, що описує капітал інвестора, задовольняє нелінійне стохастичне диференціальне рівняння. Цей момент переключення $\tau \in [0, T]$ знайдено як оптимальний момент зупинки для деякого процесу Y_t, породженого процесом X_t, таким чином, щоб максимізувати середній капітал інвестора в кінцевий момент, тобто EX_T.

Розглянемо таку фінансову задачу. Нехай деякий малий інвестор оперує на фондовому ринку на протязі скінченного періоду часу $[0, T]$ і має можливість за рахунок своїх коштів створити портфель із акцій та облігацій. Нехай в момент $t = 0$ інвестор має початковий капітал X_0 і починає формувати свій портфель з облігацій та акцій, яким відповідають коефіцієнт росту $a_1(t, x)$ та коефіцієнт волатильності $b_1(t, x)$. Будемо вважати, що в будь-який момент на проміжку $[0, T]$ інвестор має можливість один раз перерозподілити свій капітал X_t: реалізувати свої активи та на отримані кошти створити новий портфель. Зауважимо, що зміна портфеля дійсно може мати сенс у зв'язку із постійною зміною економічної ситуації на фондовому ринку, тобто за рахунок зміни цінних паперів у портфелі при зміні їх цін можна досягти більшого прибутку в кінцевий момент. Нехай $\tau \in [0, T]$ — деякий момент зупинки, обраний інвестором для переключення. У зв'язку із впливом інфляції будемо розглядати в момент переключення, а також в кінцевий момент, операцію дисконтування. Отже, в момент τ інвестор забирає всі кошти і розподіляє дисконтований капітал між облігаціями та акціями, яким відповідають коефіцієнт росту $a_2(t, x)$ та коефіцієнт волатильності $b_2(t, x)$. Метою інвестора є вибір моменту переключення таким чином, щоб максимізувати свій середній дисконтований капітал в кінцевий момент часу T.

Тепер опишемо цю задачу більш детально. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ — повний ймовірнісний простір, $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ — зростаючий неперервний справа потік σ-алгебр, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Нехай також $b_1(t, x) = b_2(t, x) = b(t, x)$; $a_1(t, x), a_2(t, x), b(t, x)$: $[0, T] \times R \to R$ — деякі випадкові функції, стосовно яких зробимо припущення:

A_1) $a_i(t, x)$, $b(t, x)$ — $\mathcal{F}_t$-узгоджені $\mathcal{P} \times \mathcal{B}(R)$-вимірні, $i = 1, 2$;

A_2) $a_i(t, x) \geq 0$ — сумісно неперервні по (t, x);

A_3) $\exists c_1\ \forall t \in [0, T]\ \forall x, y \in R\ |a_i(t, x) - a_i(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq c_1 |x - y|$, $i = 1, 2$;

A_4) $\exists c_2\ \forall t \in [0, T]\ \forall x \in R\ |a_i(t, x)|^2 + |b(t, x)|^2 \leq c_2(1 + |x|^2)$, $i = 1, 2$.

Позначимо через X_t^0 капітал інвестора в момент $t \in [0, \tau]$, через X_t^τ капітал інвестора в момент $t \in [\tau, T]$, де τ — момент зупинки, обраний інвестором для переключення. При цьому

$$X_t^0 = X_0 + \int_0^t a_1(s, X_s^0)\,ds + \int_0^t b(s, X_s^0)\,dw_s, \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$X_t^\tau = e^{-\alpha\tau} X_\tau^0 + \int_\tau^t a_2(s, X_s^\tau)\,ds + \int_\tau^t b(s, X_s^\tau)\,dw_s, \quad \tau \le t \le T, \tag{2}$$

де X_0 — $\mathcal{F}_0$-вимірне, $\{w_t,\ \mathcal{F}_t,\ t \in [0, T]\}$ — вінерівський процес, τ — деякий момент зупинки відносно $\{\mathcal{F}_t,\ t \in [0, T]\}$, $e^{-\alpha t}$ — дисконтний фактор, який відповідає за інфляцію, $\alpha > 0$ — деяка невипадкова стала. Нашою метою є відшукання оптимального моменту зупинки таким чином, щоб максимізувати величину $Ee^{-\alpha(T-\tau)}X_T^\tau = e^{-\alpha T}Ee^{\alpha\tau}X_T^\tau$. Оскільки множник $e^{-\alpha T}$ є постійним і невипадковим, то далі будемо його пропускати.

Нехай Y_t, $t \in [0, T]$, — деякий узгоджений неперервний справа процес.

Означення 1. *Момент зупинки $\sigma \in [0, T]$ називається оптимальним для процесу Y_t, якщо*

$$EY_\sigma = \sup_{\substack{\tau \in [0, T] \\ \tau \text{ — м. з.}}} EY_\tau.$$

Позначимо $f_t = \operatorname*{esssup}_{\substack{t \le \tau \le T \\ \tau \text{ — м. з.}}} E(Y_\tau / \mathcal{F}_t)$. З теореми 4 [1] відомо, що якщо $E \sup_{t \in [0, T]} Y_t < < \infty$, то момент зупинки

$$\sigma = \inf\{t \in [0, T]\colon Y_t = f_t\}$$

є оптимальним. Зауважимо, що на скінченному проміжку такий момент зупинки існує, оскільки $Y_T = f_T$.

Отже, будемо шукати такий момент зупинки τ, на якому досягається

$$\sup_{\substack{\tau \in [0, T] \\ \tau \text{ — м. з.}}} Ee^{\alpha\tau}X_T^\tau = \sup_{\substack{\tau \in [0, T] \\ \tau \text{ — м. з.}}} E\Big[X_0 + \int_0^\tau a_1(s, X_s^0)\,ds + \int_0^\tau b(s, X_s^0)\,dw_s +$$

$$+ e^{\alpha\tau}\int_\tau^T a_2(s, X_s^\tau)\,ds + e^{\alpha\tau}\int_\tau^T b(s, X_s^\tau)\,dw_s\Big].$$

Для цього в подальшому нам буде потрібно порівнювати X_t^0 та X_t^τ. Тому спочатку доведемо наступний результат.

Теорема 1 (*порівняння*). *Нехай для стохастичних диференціальних рівнянь*

$$x_t^1 = x_0^1 + \int_0^t a_1(s, x_s^1)\,ds + \int_0^t b(s, x_s^1)\,dw_s, \tag{3}$$

$$x_t^2 = x_0^2 + \int_0^t a_2(s, x_s^2)\,ds + \int_0^t b(s, x_s^2)\,dw_s \tag{4}$$

виконуються умови $A_1 - A_4$, *а також наступні умови*:

1) $x_0^2 \ge x_0^1$;

2) $\forall\, t \in [0, T]\ \ \forall\, x \in R\ \ a_2(t, x) \ge a_1(t, x) \ge 0$;

3) x_0^i — $\mathcal{F}_0$-*вимірні*, $i = 1, 2$.

Тоді зовні деякої множини $\mathcal{P}$-нульової міри $x_t^2 \ge x_t^1\ \ \forall\, t \in [0, T]$.

Доведення. Нехай $\varepsilon > 1$. Розглянемо рівняння

$$x_{t,\varepsilon}^2 = x_0^2 + \varepsilon\int_0^t a_2\left(s, x_{s,\varepsilon}^2\right)ds + \int_0^t b\left(s, x_{s,\varepsilon}^2\right)dw_s. \tag{5}$$

Покажемо, що при виконанні умов теореми рівняння (3) та (5) задовольняють умови теореми порівняння [2, с. 428]. Позначимо $\tilde{a}_2(s,x) = \varepsilon a_2(s,x)$. Тоді

i) $\tilde{a}_2(s,x) > a_1(s,x)\quad \forall\, s \in [0,T]\quad \forall\, x \in R$ внаслідок умови 2.
Виберемо $\rho(x) = x$, $G(s) = c_1 = \text{const}$. Тоді

ii) $\rho(x)$ — невід'ємна неспадна функція на R_+, $|G|^2\langle w\rangle_s = c_1^2 s < \infty$ м. н.,

$$\int_0^\delta \rho^{-2}(x)\,dx = \int_0^\delta \frac{1}{x^2}\,dx = \infty \quad \forall\, s \in [0,T], \qquad \delta > 0, \qquad x, y \in R.$$

Введемо послідовність $\{a_n, n \geq 1\}$ таким чином: покладемо $a_n = \dfrac{2}{2 + n(n+1)}$. Тоді

iii) $a_n > 0\ \ \forall\, n \geq 1;\ a_0 = 1 > a_1 > \ldots;\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0;\ \displaystyle\int_{a_{n+1}}^{a_n} \rho^{-2}(x)\,dx = n+1.$

Виберемо послідовність $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ вигляду $\varepsilon_n = \dfrac{4n}{(n^2 - n + 2)(n^2 + n + 2)}$, тоді

iv) $\varepsilon_n > 0;\ \varepsilon_n = a_{n-1} - a_n;\ \dfrac{1}{n} a_{n-1}^2 \dfrac{1}{(a_{n-1} - \varepsilon_n)^2} \to \infty,\ n \to \infty.$

Внаслідок умов A_3, A_4 рівняння (3) та (5) мають сильні розв'язки. За рахунок властивостей розв'язків цих рівнянь виконуються решта умов теореми порівняння. Тому за цією теоремою $P\left\{x_{t,\varepsilon}^2 \geq x_t^1\ \forall\, t \in [0,T]\right\} = 1$.

Тепер покажемо, що при $\varepsilon \to 1$ розв'язок рівняння (5) збігається до розв'язку рівняння (4). Для цього перевіримо виконання умов теореми 11 [3, с. 262]. Внаслідок умови A_4 маємо

$$\lim_{\varepsilon\to 1} \sup_{\substack{|x| \leq T \\ s \leq T}} \left|\tilde{a}_2(s,x) - a_2(s,x)\right| = \lim_{\varepsilon\to 1} \sup_{\substack{|x| \leq T \\ s \leq T}} \left|a_2(s,x)\right|(\varepsilon - 1) = 0.$$

Виконання решти умов випливає з умов A_3, A_4. Тоді для всіх $T > 0$ $\sup\limits_{t\leq T}\left|x_{t,\varepsilon}^2 - x_t^2\right| \to 0$, $\varepsilon \to 1$, за ймовірністю. Тому існує підпослідовність $\tilde{\varepsilon}_n$ така, що $\sup\limits_{t \leq T}\left|x_{t,\tilde{\varepsilon}_n}^2 - x_t^2\right| \to 0$, $n \to \infty$ з імовірністю 1. Маємо

$$1 = P\left\{\omega\colon x_{t,\varepsilon}^2 \geq x_t^1\ \forall\, t \in [0,T],\ \sup_{t \leq T}\left|x_{t,\tilde{\varepsilon}_n}^2 - x_t^2\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\omega\colon x_t^2 \geq x_t^1\ \forall\, t \in [0,T]\right\}.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що при виконанні умов A_3, A_4 $E\displaystyle\int_0^\tau b\left(s, X_s^0\right)dw_s = 0$ та $E\displaystyle\int_\tau^T b\left(s, X_s^\tau\right)dw_s = 0$, тому

$$Ee^{\alpha\tau}X_T^{\tau} = E\left[X_0 + \int_0^{\tau} a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\tau}\right)ds\right].$$

Розглянемо узгоджений випадковий процес

$$Y_t = \int_0^t a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha t}E\left(\int_t^T a_2\left(s, X_s^t\right)ds / \mathcal{F}_t\right).$$

Оскільки $Ee^{\alpha\tau}X_T^{\tau} = E(X_0 + Y_{\tau})$, достатньо знайти оптимальний момент зупинки для процесу Y_t.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_4$, *а також*:

1) $b(s, x) = b(s)x \;\; \forall s \in [0, T] \;\; \forall x \in R$;

2) *існує момент зупинки* $\sigma \in [0, T]$ *такий, що*

а) $a_1(s, x) \le e^{\alpha\sigma} a_2(s, e^{-\alpha\sigma}x) \;\; \forall \sigma \le s \le T \;\; \forall x \in R$;

б) $e^{\alpha t} a_2(s, e^{-\alpha t}x) \le e^{\alpha\sigma} a_2(s, e^{-\alpha\sigma}x) \;\; \forall t \le s \le T, \; s \ge \sigma \;\; \forall x \in R$;

в) $a_i(s, x) \le a_i(s, y) \;\; \forall x \le y, \;\; \forall 0 \le s \le T, \; i = 1, 2$;

г) $e^{\alpha t} a_2(s, e^{-\alpha t}x) < a_1(s, x) \;\; \forall t \le s \le \sigma \;\; \forall x \in R$.

Тоді σ *— оптимальний момент зупинки.*

Доведення. Нехай τ — деякий момент зупинки. Запишемо

$$E(Y_{\tau} / \mathcal{F}_t) = \int_0^t a_1\left(s, X_s^0\right)ds + E\left(\int_t^{\tau} a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\tau}\right)ds / \mathcal{F}_t\right).$$

Якщо існує момент зупинки σ такий, що

$$e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{T} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds \ge \int_{\sigma}^{\tau} a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\tau}\right)ds \;\text{ м.н. }\; \forall \sigma \le \tau \le T \tag{6}$$

та

$$e^{\alpha t}\int_t^T a_2\left(s, X_s^t\right)ds < \int_t^{\sigma} a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{T} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds \;\text{ на }\; \{\omega\colon t < \sigma\}, \tag{7}$$

то $Y_{\sigma} = \sup\limits_{\tau \ge \sigma} E\left(Y_{\tau} / \mathcal{F}_{\sigma}\right)$ та $Y_t I\{t < \sigma\} < \sup\limits_{\tau \ge t} E\left(Y_{\tau} / \mathcal{F}_t\right) I\{t < \sigma\}$, тобто σ — оптимальний момент зупинки. Таким чином, для доведення достатньо показати, що при виконанні умов теореми виконуються нерівності (6) і (7).

Перепишемо нерівність (6) у вигляді

$$\int_{\sigma}^{\tau} a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\tau}\right)ds \le e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{\tau} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds + e^{\alpha\sigma}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds.$$

Спочатку доведемо, що

$$X_s^0 \le e^{\alpha\sigma} X_s^{\sigma} \;\; \forall \sigma \le s \le \tau \;\text{ м.н.} \tag{8}$$

Враховуючи умову 1, перепишемо (1) для $s \le \tau$:

$$X_s^0 = X_{\sigma}^0 + \int_{\sigma}^{s} a_1\left(u, X_u^0\right)du + \int_{\sigma}^{s} b(u) X_u^0 \, dw_u$$

та (2) для $s \ge \sigma$:

$$e^{\alpha\sigma}X_s^{\sigma} = X_{\sigma}^0 + \int_{\sigma}^{s} e^{\alpha\sigma}a_2\left(u, e^{-\alpha\sigma}e^{\alpha\sigma}X_u^{\sigma}\right)du + \int_{\sigma}^{s} b(u)e^{\alpha\sigma}X_u^{\sigma}\,dw_u.$$

З останніх двох рівностей, умови 2а) і теореми 1 випливає виконання нерівності (8).

Тепер доведемо, що

$$e^{\alpha\tau}X_s^{\tau} \le e^{\alpha\sigma}X_s^{\sigma} \quad \forall\, \sigma \le \tau \le s \le T \text{ м.н.} \tag{9}$$

З (2) для $\sigma \le \tau \le s$ маємо

$$e^{\alpha\tau}X_s^{\tau} = X_{\tau}^0 + \int_{\tau}^{s} e^{\alpha\tau}a_2\left(u, e^{-\alpha\tau}e^{\alpha\tau}X_u^{\tau}\right)du + \int_{\tau}^{s} b(u)e^{\alpha\tau}X_u^{\tau}\,dw_u,$$

$$e^{\alpha\sigma}X_s^{\sigma} = e^{\alpha\sigma}X_{\tau}^{\sigma} + \int_{\tau}^{s} e^{\alpha\sigma}a_2\left(u, e^{-\alpha\sigma}e^{\alpha\sigma}X_u^{\sigma}\right)du + \int_{\tau}^{s} b(u)e^{\alpha\sigma}X_u^{\sigma}\,dw_u.$$

Звідси на підставі (8), умови 2б) і теореми 1 випливає виконання нерівності (9).

Враховуючи умови 2а), 2в) та нерівність (8), маємо

$$\int_{\sigma}^{\tau} a_1\left(s, X_s^0\right)ds \le \int_{\sigma}^{\tau} e^{\alpha\sigma}a_2\left(s, e^{-\alpha\sigma}X_s^0\right)ds \le e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{\tau} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds. \tag{10}$$

З іншого боку, з умов 2б), 2в) та нерівності (9)

$$e^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\tau}\right)ds \le e^{\alpha\sigma}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, e^{-\alpha\sigma}e^{\alpha\tau}X_s^{\tau}\right)ds \le e^{\alpha\sigma}\int_{\tau}^{T} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds. \tag{11}$$

Додамо нерівності (10) та (11) і одержимо (6).

Перепишемо тепер нерівність (7) у вигляді

$$e^{\alpha t}\int_{t}^{\sigma} a_2\left(s, X_s^{t}\right)ds + e^{\alpha t}\int_{\sigma}^{T} a_2\left(s, X_s^{t}\right)ds < \int_{t}^{\sigma} a_1\left(s, X_s^0\right)ds + e^{\alpha\sigma}\int_{\sigma}^{T} a_2\left(s, X_s^{\sigma}\right)ds.$$

Знов, спочатку доведемо, що

$$e^{\alpha t}X_s^{t} \le X_s^0 \quad \forall\, t \le s \le \sigma \text{ м. н.} \tag{12}$$

Запишемо (1) для $s \ge t$:

$$X_s^0 = X_t^0 + \int_{t}^{s} a_1\left(u, X_u^0\right)du + \int_{t}^{s} b(u)X_u^0\,dw_u$$

та (2) для $s \ge t$:

$$e^{\alpha t}X_s^{t} = X_t^0 + \int_{t}^{s} e^{\alpha t}a_2\left(u, e^{-\alpha t}e^{\alpha t}X_u^{t}\right)du + \int_{t}^{s} b(u)e^{\alpha t}X_u^{t}\,dw_u.$$

Внаслідок умови 2г), застосовуючи теорему 1 до останніх двох рівнянь, одержуємо нерівність (12).

Тепер доведемо, що

$$e^{\alpha t}X_s^{t} \le e^{\alpha\sigma}X_s^{\sigma} \quad \forall\, t \le \sigma \le s \le T \text{ м.н.} \tag{13}$$

З (2) маємо

$$e^{\alpha t}X_s^{t} = e^{\alpha t}X_{\sigma}^{t} + \int_{\sigma}^{s} e^{\alpha t}a_2\left(u, e^{-\alpha t}e^{\alpha t}X_u^{t}\right)du + \int_{\sigma}^{s} b(u)e^{\alpha t}X_u^{t}\,dw_u,$$

$$e^{\alpha\sigma} X_s^\sigma = X_\sigma^0 + \int_\sigma^s e^{\alpha\sigma} a_2\left(u, e^{-\alpha\sigma} e^{\alpha\sigma} X_u^\sigma\right) du + \int_\sigma^s b(u) e^{\alpha\sigma} X_u^\sigma \, dw_u,$$

звідки на підставі (12), умови 2б) і теореми 1 отримуємо (13).

Тепер маємо, з одного боку, внаслідок умов 2в), 2г) та нерівності (12)

$$e^{\alpha t} \int_t^\sigma a_2\left(s, X_s^t\right) ds < \int_t^\sigma a_1\left(s, e^{\alpha t} X_s^t\right) ds \leq \int_t^\sigma a_1\left(s, X_s^0\right) ds, \tag{14}$$

а з іншого — внаслідок умов 2б), 2в) та (13)

$$e^{\alpha t} \int_\sigma^T a_2\left(s, X_s^t\right) ds \leq e^{\alpha\sigma} \int_\sigma^T a_2\left(s, e^{-\alpha\sigma} e^{\alpha t} X_s^t\right) ds \leq e^{\alpha\sigma} \int_\sigma^T a_2\left(s, X_s^\sigma\right) ds. \tag{15}$$

Додавши нерівності (14) та (15), одержимо нерівність (7), а отже, теорему доведено.

***Зауваження* 1.** У випадку відсутності інфляції, тобто якщо $\alpha = 0$, умови 2 теореми 2 можна спростити, а саме, припустити, що замість них виконуються такі умови:

2$'$) існує момент зупинки $\sigma \in [0, T]$ такий, що:

а$'$) $a_1(s, x) \leq a_2(s, x) \;\; \forall \sigma \leq s \leq T \;\; \forall x \in R$;

б$'$) $a_i(s, x) \leq a_i(s, y) \;\; \forall \sigma \leq s \leq T \;\; \forall x \leq y, \; i = 1, 2$;

в$'$) $a_2(s, x) < a_1(s, x) \;\; \forall 0 \leq s \leq \sigma \;\; \forall x \in R$.

Тоді при виконанні умов A_1 та 2$'$ σ — оптимальний момент зупинки.

***Зауваження* 2.** У частковому випадку, коли функції $a_i(s, x)$ лінійні по x, тобто $a_i(s, x) = a_i(s)x, \; i = 1, 2, \;\; \forall s \in [0, T] \;\; \forall x \in R$, капітал інвестора описується лінійним стохастичним диференціальним рівнянням; в цьому випадку умову 2 теореми 2 можна замінити умовою

2$''$) існує момент зупинки $\sigma \in [0, T]$ такий, що:

а$''$) $a_1(s) > a_2(s) \;\; \forall 0 \leq s \leq \sigma$;

б$''$) $a_1(s) \leq a_2(s) \;\; \forall \sigma \leq s \leq T$.

***Зауваження* 3.** В даній статті розглядається „послідовна" обробка двох активів за допомогою процедури переключення. „Паралельну" обробку двох активів, а саме Американський опціон купівлі з функцією виплати, що визначається максимумом з двох активів, розглянуто в [4].

1. *Факеев А. Г.* Об оптимальной остановке процессов с непрерывным временем // Теория вероятностей и ее применения. – 1970. – **15**, № 2. – С. 336 – 344.
2. *Гальчук Л. И.* Теорема сравнения для стохастических уравнений с интегралами по мартингалам и случайным мерам // Там же. – 1982. – **27**, № 3. – С. 425 – 433.
3. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 612 с.
4. *Brodie M., Detemple J.* The valuation of American options on multiple assets // Math. Finance. – 1997. – **7**, № 3. – P. 241 – 286.

Одержано 26.02.98