УДК 517.9

А. М. Самойленко* (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. Г. Самойленко*, В. В. Собчук (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ НЕЛІНІЙНОГО ОСЦИЛЯТОРА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

We study periodic solutions and behavior of phase trajectories of a differential equation of nonlinear oscillator with pulse effects at unfixed times.

Вивчаються періодичні розв'язки та поведінка фазових траєкторій диференціального рівняння нелінійного осцилятора з імпульсною дією у нефіксовані моменти часу.

Останнім часом великий інтерес викликає дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1 – 3]. Система з імпульсною дією в загальному випадку визначається [1] за допомогою диференціального рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

($x \in M \subset R^n$, M — фазовий простір системи (1), $t \in R$ — час) і умов імпульсної дії, що задаються деякою множиною $\Gamma_t \subset R \times M$ та визначеним на Γ_t оператором A_t, який відображає Γ_t в розширений фазовий простір $R \times M$ згідно з правилом $(t, x) \to (t, A_t x)$. Поведінка траєкторій систем, що задані деякими диференціальними рівняннями та умовами імпульсної дії, завдяки умовам імпульсної дії може значно відрізнятися від поведінки траєкторій даного диференціального рівняння (при відсутності імпульсної дії) [1].

Розглянемо систему, рух фазової точки якої описується нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку [2]

$$\ddot{x} + \sin x = 0 \tag{2}$$

і яка зазнає дії миттєвих сил у моменти проходження рухомою точкою деякого фіксованого положення $x = x_*$. Імпульсна дія в такій динамічній системі відбувається в нефіксовані моменти часу та збільшує в такі моменти кількість руху системи на деяку величину $I(\dot{x})$, що залежить від швидкості рухомої точки в момент проходження нею положення $x = x_*$. Далі вважатимемо, що $I(y)$, де $y = \dot{x}$, як функція свого аргументу, є неперервною. Тоді, очевидно, що оператор A_t, згаданий вище, є неперервним відносно $(x, \dot{x})$. Математично імпульсна дія в системі (2), (3) може бути записана таким чином [1]:

$$\Delta \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x = x_*} = I(\dot{x}). \tag{3}$$

Розв'язком задачі (2), (3) є функція $x(t)$, неперервна відносно $t \in R$ та неперервно диференційовна для всіх $t \in R$ за винятком точок імпульсної дії, в яких її похідна $\dot{x}(t)$ неперервна справа і має в цих точках розриви першого роду.

Диференціальне рівняння (2) є рівнянням Льєнара [3], що задовольняє умови існування періодичних розв'язків ($g(x)$ — неперервна та $xg(x) > 0$ для всіх $x \neq \neq 0$, де $g(x) = \sin x$). Рівняння (2) має розв'язки $(x(t), \dot{x}(t))$, які є обмеженими для всіх значень t, та має, зокрема, періодичні траєкторії (цикли). Дійсно, перший інтеграл рівняння (2) можна записати таким чином:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \cos x = C,$$

* Виконана при частковій фінансовій підтримці програми INTAS (проект 96-0915).

де $C \geq -1$. Звідси випливає, що якщо стала $C \in (-1; 1)$, то розв'язки $(x(t), \dot{x}(t))$ рівняння (2) є періодичними, тобто його траєкторії утворюють цикли, а якщо $C > 1$, то траєкторії рівняння (2) є неперервними незамкненими кривими, що огинають (знизу та зверху) згадані вище цикли. При $C = 1$ та $C = -1$ диференціальне рівняння (2) має особливі точки $x = n\pi$, n — ціле число, серед яких, відповідно, точки $x = 2k\pi$ (k — ціле) є особливими точками типу центр, що стійкі за Ляпуновим [4], та точки $x = (2k+1)\pi$ (k — ціле) є особливими точками типу сідло, що не стійкі за Ляпуновим [4]. Крім того, при $C = 1$ рівняння (2) має дві сепаратриси, що з'єднують точки $x = (2k-1)\pi$ та $x = (2k+1)\pi$, де k — ціле число. Якщо початкові умови $(x_0, \dot{x}_0)$ деякого розв'язку $x(t)$ задовольняють умову $\frac{\dot{x}_0^2}{2} - \cos x_0 < 1$, або, що те саме, $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$, де

$$\Omega = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Omega_k, \quad \Omega_k = \left\{(x, y) \colon x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), \frac{y^2}{2} - \cos x < 1, \, y = \dot{x}\right\}, \quad (4)$$

то такий розв'язок є періодичним. Фазовий портрет динамічної системи (2) зображено на рис. 1

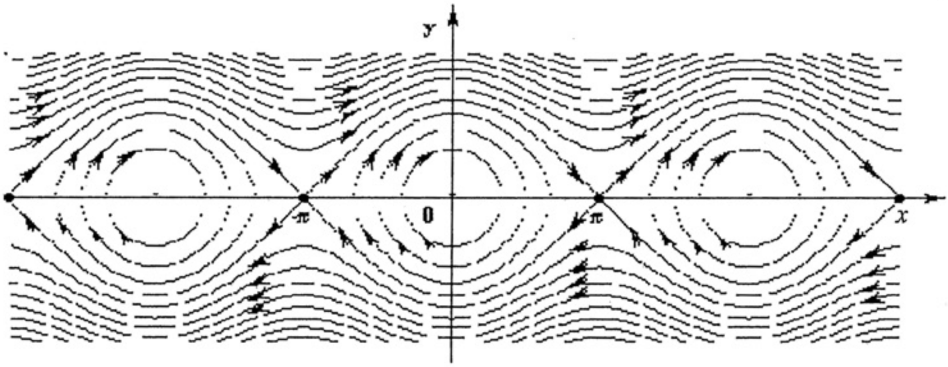


Рис. 1

Зазначимо, що поведінка фазових траєкторій системи (2), (3) завдяки наявності імпульсної дії (3) може бути досить складною. Дійсно, нехай фазова точка системи (2), (3) в деякий початковий момент часу t_0 має координати $(x_0, \dot{x}_0)$; з плином часу вона перетне пряму $x = x_*$ в деякий момент часу t_*, коли зазнає впливу імпульсного збурення. Тоді під дією цього збурення фазова точка миттєво потрапить у точку з координатами $(x_*, \dot{x}_1)$, де значення $\dot{x}_1$ визначено згідно з формулою $\dot{x}_1 = \dot{x}(t_1 + 0) = \dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0) + I(\dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0))$, після чого вона продовжить свій рух вже по іншій траєкторії диференціального рівняння (2). При цьому точка $(x_*, \dot{x}_1)$ може попасти за межі області Ω і тоді траєкторія даної фазової точки системи (2), (3) вже не перетне пряму $x = x_*$, внаслідок чого система (2), (3) не буде мати періодичних розв'язків. Навпаки, якщо в деякий початковий момент часу початкова точка $(x_0, \dot{x}_0)$ знаходиться поза межами множини Ω, то після (можливого) перетину з прямою $x = x_*$ під дією миттєвих сил вона може попасти в Ω і при цьому можуть виникнути періодичні режими в системі (2), (3).

Дослідимо питання про існування періодичних розв'язків рівняння (2) з імпульсною дією (3) більш детально. Припустимо, що $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ — періодичний розв'язок задачі (2), (3), який визначено для всіх $t \geq t_0$. Після продовження функції $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ для значень $t < t_0$ (за періодичністю) одержимо функцію, що визначена для всіх $t \in R$ і є періодичним розв'язком задачі (2), (3). Тому далі як періодичні розв'язки задачі (2), (3) розглядатимемо функції, що визначені для всіх значень $t \in R$.

Розглянемо два випадки: 1) $x_* = (2k_0 + 1)\pi$ для деякого цілого числа k_0; 2) $x_* \neq (2n + 1)\pi$ для всіх цілих чисел n. Нехай спочатку $x_* = (2k_0 + 1)\pi$, де k_0 — деяке ціле число. Тоді якщо $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$, то всі траєкторії системи (2), (3), що починаються в точці $(x_0, \dot{x}_0)$, є періодичними з одним і тим самим періодом. Якщо ж $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$, то фазова точка системи (2), (3) зазнає дії імпульсних сил не більше одного разу за весь час своєї еволюції згідно з системою (2), (3), і при цьому система (2), (3) не має періодичних режимів. Зазначимо, що фазова точка може *припинити* свій рух, наприклад, тоді, коли ця точка зазнає впливу імпульсного збурення такого, що $\dot{x}_1 + I(\dot{x}_1) = 0$, де $(x_*, \dot{x}_1)$ — координати фазової точки в момент дії імпульсних сил вигляду (3). В такому випадку після дії імпульсних сил фазова точка матиме в подальшому координати $(x_*, 0)$.

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Якщо* $x_* = (2k_0 + 1)\pi$ *для деякого цілого числа* k_0, *то задача* (2), (3) *має періодичні розв'язки тоді і лише тоді, коли* $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega$, *де множина* Ω *визначена згідно з формулою* (4). *Ці періодичні розв'язки утворюють двопараметричну сім'ю функцій, що мають один і той же період.*

Розглянемо випадок, коли $x_* \neq (2n + 1)\pi$ для всіх цілих чисел n. Позначимо через $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ розв'язок задачі (2), (3), що задовольняє початкові умови $x(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) = \dot{x}_0$. Якщо початкові умови $(x_0, \dot{x}_0)$ деякого розв'язку $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ задачі (2), (3) задовольняють властивість $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega \backslash \Omega_*$, де $\Omega_* := \Omega_{k_0}$, тобто $\Omega_{k_0} \ni (x_*, 0)$ або $-\pi + 2\pi k_0 < x_* < \pi + 2\pi k_0$, то такий розв'язок є періодичним; при цьому при русі фазової точки системи (2), (3) вздовж траєкторій даного розв'язку ця точка не зазнає імпульсного збурення.

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо* $x_* \neq (2n + 1)\pi$ *для всіх цілих чисел* n, *то розв'язки задачі* (2), (3) *з початковими умовами* $(x_0, \dot{x}_0)$, *що задовольняють одну з властивостей* $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$, $|x_0| < |x_*|$ *або* $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega \backslash \Omega_*$, *є періодичними з одним і тим самим періодом. Ці розв'язки утворюють двопараметричну сім'ю функцій і при русі фазової точки вздовж таких траєкторій вона не зазнає впливу імпульсних сил* (3). *Множина* Ω *визначена згідно з формулою* (4), *а через* Ω_* *позначено* $\Omega_* := \Omega_{k_0}$, *де* $\Omega_{k_0} \ni (x_*, 0)$, *тобто* $-\pi + 2\pi k_0 < x_* < \pi + 2\pi k_0$.

Неважко помітити, що якщо для деяких початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ таких, що $\dot{x}_0 > 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$ і для всіх $t \geq t_0$ виконується нерівність $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0) > x_*$, або ж таких, що $\dot{x}_0 < 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$ і для всіх $t \geq t_0$ справджується умова $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0) < x_*$, то фазова точка системи (2), (3) не зазнає імпульсного впливу ні при жодному $t \geq t_0$. Іншими словами, для всіх початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ таких, що $\dot{x}_0 > 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega_*$, при яких для всіх $t \geq t_0$ виконується нерівність $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0) > x_*$, та для початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ таких, що $\dot{x}_0 < 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega_*$, при яких для всіх $t \geq t_0$ справджується умова $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0) < x_*$, фазова точка системи (2), (3) не зазнає збурення імпульсними силами ні при жодному $t \geq t_0$.

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 3. *Нехай* $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ — *розв'язок задачі* (2), (3), *що задоволь-*

няє початкові умови $x(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0, x_0, \dot{x}_0, t_0) = \dot{x}_0$, *для яких виконується одна з умов*:

1) $\dot{x}_0 > 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$ *та для всіх* $t \geq t_0$ *виконується нерівність* $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0) > x_*$;

2) $\dot{x}_0 < 0$, $(x_0, \dot{x}_0) \notin \Omega$ *та для всіх* $t \geq t_0$ *виконується нерівність* $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0) < x_*$.

Тоді фазова точка системи (2), (3) *не зазнає імпульсної дії ні при жодному* $t \geq t_0$, *а розв'язок* $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$ *не є періодичним.*

Нехай для початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ задачі (2), (3) має місце властивість B: $x_0 < x_*$ та $\dot{x}_0 > 0$, або $x_0 > x_*$ та $\dot{x}_0 < 0$, або ж $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$ і $|x_0| \geq |x_*|$. Тоді під дією системи (2), (3) точка $(x_0, \dot{x}_0)$ буде рухатись вздовж траєкторії $x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$. Очевидно, що при цьому знайдеться момент часу t_* такий, що $x(t_*, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_*$, коли фазова точка системи (2), (3) зазнає дії імпульсних сил згідно з законом (3).

Нехай

$$t_1 = \min \{ t_* : t_* > t_0, \; x(t_*, x_0, \dot{x}_0, t_0) = x_* \}. \tag{5}$$

Розглянемо координати фазової точки $(x(t), \dot{x}(t))$, де $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$, для $t = t_1 + 0$, тобто їх значення відразу після дії імпульсних сил. Очевидно, що

$$x(t_1 + 0) = x_*, \qquad \dot{x}(t_1 + 0) = \dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0) + I(\dot{x}(t_1, x_0, \dot{x}_0, t_0)). \tag{6}$$

Тоді якщо для $(x_1, \dot{x}_1)$, де $x_1 = x_*$, а $\dot{x}_1 = \dot{x}_1(t_1 + 0)$ визначено за формулою (6), як для нових початкових умов задачі (2), (3), має місце властивість B, тобто $(x_*, \dot{x}_1) \in \Omega_*$, то знайдеться момент часу t_* такий, що $x(t_*, x_*, \dot{x}_1, t_1) = x_*$, коли фазова точка системи (2), (3) зазнає дії імпульсних сил згідно з законом (3). Позначимо

$$t_2 = \min \{ t_* : t_* > t_1, \; x(t_*, x_*, \dot{x}_1, t_1) = x_* \}. \tag{7}$$

А якщо $(x_*, \dot{x}_1) \notin \Omega_*$, тобто для $(x_1, \dot{x}_1)$ властивість B не виконується, то фазова точка системи (2), (3) в подальшому (при $t > t_1$) не зазнаватиме впливу миттєвих сил.

Нехай побудовано n перших членів послідовності $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$, де

$$t_k = \min \{ t_* : t_* > t_{k-1}, \; x(t_*, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) = x_* \}, \tag{8}$$

$$x_k = x(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) = x_*, \qquad k = \overline{1, n}, \tag{9}$$

$$\dot{x}_k = \dot{x}(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1}) + I(\dot{x}(t_k, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}, t_{k-1})). \tag{10}$$

Очевидно, що при цьому значення $(x_k, \dot{x}_k) = (x_*, \dot{x}_k) \in \Omega_*$, де $k = \overline{1, n-1}$. При виконанні умови $(x_n, \dot{x}_n) = (x_*, \dot{x}_n) \in \Omega_*$ можна побудувати $(n + 1)$-й член згаданої вище послідовності. В противному разі ця послідовність обірветься на $(n + 1)$-му кроці.

Зрозуміло, що в загальному випадку для довільних початкових умов $(x_0, \dot{x}_0)$ послідовність моментів часу $t_1, t_2, \ldots$ може бути нескінченною, може містити лише скінченну кількість елементів і може, зокрема, складатись лише з одного елемента або навіть не мати жодного.

Якщо послідовність моментів часу складається з однієї точки, що можливо, наприклад, для випадку, коли виконується нерівність $|y + I(y)| \geq y_*$ для всіх $y \in (-y_*, y_*)$, де $y_* = \sqrt{2(1 + \cos x_*)}$, то система (2), (3) не має періодичних траєкторій. Аналогічно, якщо ця послідовність має лише скінченну (не порожню!) множину точок, що містить, наприклад, рівно $k \geq 1$ елементів, то виконується нерівність $|\dot{x}_k + I(\dot{x}_k)| \geq y_*$, і система (2), (3) також не має періодичних траєкторій. Очевидно, що якщо для деякого натурального числа k і для всіх значень $y \in (-y_*, y_*)$ виконується нерівність $|f^k(y)| \geq y_*$, де $f^k(y)$ — k-та ітерація функції $f(y) = -y + I(-y)$, $y = \dot{x}$, то згадана вище послідовність може мати не більше k елементів, а система (2), (3) не матиме періодичних розв'язків.

Таким чином, задача (2), (3) може мати періодичні траєкторії лише тоді, коли послідовність $\{t_k\}$ моментів часу містить нескінченну кількість точок або ж не має жодного елемента. В останньому випадку при русі фазової точки вздовж траєкторії розв'язку $x(t) = x(t, x_0, \dot{x}_0, t_0)$, що є періодичним з деяким періодом T і визначений для всіх значень $t \in R$, фазова точка системи (2), (3) не піддається дії імпульсних сил (3), а отже, $(x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega \backslash \Omega_*$ або $(x(t), \dot{x}(t)) \in \Omega_*$ і $|x(t)| < |x_*|$ для всіх значень $t \in R$, звідки, зокрема, випливає, що виконується умова $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega \backslash \Omega_*$ або $(x_0, \dot{x}_0) \in \Omega_*$ і $|x_0| \geq |x_*|$, де $(x_0, \dot{x}_0)$ — початкові умови, які задовольняє розв'язок $x(t)$ при $t = t_0$. Зауважимо, що умови існування періодичних режимів системи (2), (3) для цього випадку (коли $\{t_k\} = \varnothing$) вказано вище (див. теореми 1, 2).

Справедлива така теорема.

Теорема 4. *Нехай $x_* \neq (2n + 1)\pi$ для всіх цілих чисел n. Якщо для деякого натурального числа k і для всіх значень $y \in (-y_*, y_*)$ виконується нерівність $|f^k(y)| \geq y_*$, де $f^k(y)$ — k-та ітерація функції $f(y) = -y + I(-y)$, $y = \dot{x}$, то задача* (2), (3) *не має періодичних розв'язків.*

Нехай послідовність $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$ має нескінченну кількість елементів, тобто згаданий вище процес побудови послідовності $\{t_k, (x_k, \dot{x}_k)\}$ продовжується до нескінченності. Очевидно, що при цьому значення $(x_k, \dot{x}_k) = (x_*, \dot{x}_k) \in \Omega_*$ для всіх натуральних чисел k. Крім того, оскільки фазова точка системи (2), (3) нескінченне число раз перетинає пряму $x = x_*$ в точках з координатами $(x_*, \dot{x}_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, за якими визначається деяке відображення θ прямої $x = x_*$ в себе, то можна скористатись результатами роботи [5], в якій для дослідження періодичних розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією використовується відображення Пуанкаре. Неважко пересвідчитись, що всі умови теореми з [5] виконуються, а саме: права частина рівняння (2) задовольняє умови існування та єдиності розв'язку для довільних початкових умов, гіперповерхня $x = x_*$ трансверсальна потоку (2), оператор A_t неперервний відносно змінних $(x, \dot{x})$. Відображення Пуанкаре для задачі (2), (3) можна записати за допомогою формули

$$y_1 \xrightarrow{\theta} y_2 \xrightarrow{\theta} y_3 \xrightarrow{\theta} \ldots y_{k-1} \xrightarrow{\theta} y_k \xrightarrow{\theta} \ldots, \tag{11}$$

де $y_k = \dot{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, визначено за формулами (10).

Відображення (11) визначає деяке неперервне відображення частини прямої, що знаходиться в середині області Ω_*, а саме відрізка $[-y_*, y_*]$, де $y_* = \sqrt{2(1 + \cos x_*)}$, в цей же самий відрізок.

З проведеного вище аналізу випливає, що задача (2), (3) матиме періодичні режими, при яких фазова точка зазнаватиме впливу імпульсних сил лише тоді, коли послідовність точок $\{t_n\}$ є нескінченною і відображення Пуанкаре побудоване за цими точками, має нерухомі відмінні від $-y_*, y_*$ точки, або ж періодичні точки деякого періоду n. Якщо відображення (11) має нерухомі відмінні від $-y_*, y_*$ точки, або ж періодичні періоду n, $n > 1$, точки, то задача (2), (3) буде мати періодичні траєкторії з періодом $T(n)$, при яких фазова точка розглядуваної системи зазнає імпульсної дії рівно один або відповідно рівно n разів за період, де $n > 1$.

Таким чином маємо таке твердження [5].

Теорема 5. *Диференціальне рівняння* (2) *з імпульсною дією* (3) *має періодичні траєкторії періоду* $T(n)$, *при русі по яких фазова точка системи* (2), (3) *зазнає імпульсної дії* n *разів* $(n \geq 1)$ *за період* $T(n)$, *тоді і тільки тоді, коли відображення Пуанкаре* (11) *має на інтервалі* $(-y_*, y_*)$ *нерухому або періодичну точку періоду* n, *де* n — *деяке натуральне число.*

Наслідок. *Якщо відображення* θ *має нерухому точку, відмінну від* $-y_*, y_*$, *то диференціальне рівняння* (2) *з імпульсною дією* (3) *має періодичну траєкторію з деяким періодом* T, *при русі по якій фазова точка системи* (2), (3) *зазнає імпульсної дії рівно один раз за період* T.

Необхідні й достатні умови існування періодичних розв'язків задачі (2), (3) в термінах функції Пуанкаре в теоремі 5 мають досить загальний характер. Для одержання більш конструктивних умов, що гарантують існування періодичних розв'язків розглядуваної задачі (2), (3), потрібно дослідити питання про існування нерухомих та періодичних точок відображення Пуанкаре, або, що те саме, питання про існування нерухомих та періодичних точок відображення відрізка $(-y_*, y_*)$, де $y_* = \sqrt{2(1+\cos x_*)}$, в цей же самий відрізок, яке визначається формулою

$$f(y) = -y + I(-y), \quad y = \dot{x}, \quad I(-y) \neq 0. \tag{12}$$

Нерухомим точкам відображення $f(y)$ з інтервалу $(-y_*, y_*)$ відповідають періодичні режими динамічної системи (1), (2), причому для таких режимів розглядувана система зазнає лише однієї імпульсної дії за період. Якщо ж відображення (12) має на інтервалі $(-y_*, y_*)$ періодичну точку y_0 періоду $n \in \mathrm{N}$, тобто $f^n(y_0) = f(f(\ldots f(y_0))) = y_0$, то точці y_0 відповідає деякий $T(n)$-періодичний режим динамічної системи (2), (3), причому такий, що для даного режиму система (2), (3) зазнає імпульсної дії рівно n разів за період $T(n)$.

Для випадку, коли відображення (12) є неперервним та має на інтервалі $(-y_*, y_*)$ періодичну точку періоду 3, існують [6] періодичні точки довільного періоду n, яким відповідають $T(n)$-періодичні режими динамічної системи (2), (3) такі, що для даного режиму розглядувана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період $T(n)$. Звідси випливає, що коли динамічна система (2), (3) має такий періодичний режим, при якому фазова точка системи зазнає імпульсної дії рівно три рази за період, то в цій системі існують $T(n)$-періодичні режими, причому такі, що дана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, де n — довільне натуральне число. Зауважимо, що в цьому випадку в системі може існувати декілька періодичних режимів, коли розглядувана система зазнає імпульсної дії рівно n разів за період, причому періоди таких режимів можуть не співпадати. Стійкість описаних вище $T(n)$-періодичних розв'язків задачі (2), (3) адекватно визначається стійкістю відповідних нерухомих точок відображення $f^n(y)$.

Як приклад описаної вище динамічної системи розглянемо диференціальне рівняння (2) з імпульсною дією (3) вигляду

$$I(y) = \begin{cases} (\lambda-1)y - \lambda y_*, & y \geq 0; \\ -(\lambda+1)y - \lambda y_*, & y < 0, \end{cases} \tag{13}$$

де, як і раніше, $y = \dot{x}$, а λ — деякий параметр, причому $0 < \lambda \leq 2$.

Відображення

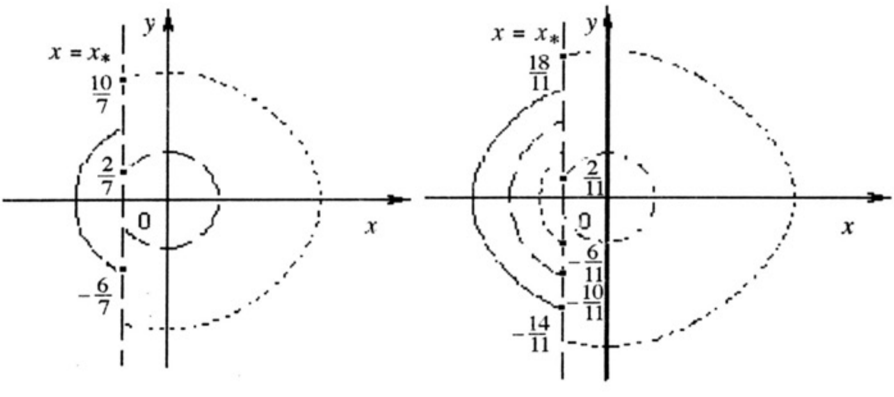
$$f(y) = -y + I(-y) = \begin{cases} \lambda(y_* - y), & y \geq 0; \\ \lambda(y_* + y), & y < 0, \end{cases} \tag{14}$$

є неперервним для всіх $y \in R$. Це відображення має: при $0 < \lambda < 1$ лише одну нерухому точку, яка є стійкою; при $\lambda = 1$ безліч нерухомих точок, стійкість яких потрібно додатково досліджувати; при $1 < \lambda \leq 2$ дві нерухомі точки, дві періодичні точки періоду 2 та шість періодичних точок періоду 3. Точки періоду 3 утворюють два цикли

$$\begin{gathered} \left\{\frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 + \lambda^3}{1 + \lambda^3} y_*\right\}, \\ \left\{\frac{\lambda - \lambda^2 + \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*; \frac{\lambda + \lambda^2 - \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*; \frac{\lambda - \lambda^2 - \lambda^3}{1 - \lambda^3} y_*\right\}, \end{gathered} \tag{15}$$

які з урахуванням формули $y_* = \sqrt{2(1 + \cos x_*)}$ при $\lambda = 2$ і $x_* = -\dfrac{2\pi}{3}$ мають вигляд $\left\{-\dfrac{10}{9}; -\dfrac{2}{9}; \dfrac{14}{9}\right\}$ і $\left\{-\dfrac{6}{7}; \dfrac{2}{7}; \dfrac{10}{7}\right\}$ відповідно. На рис. 2 зображено періодичні розв'язки задачі (2), (3), (13), що відповідають циклу періоду 3, утвореному точками $\left\{\dfrac{2}{7}; \dfrac{10}{7}; -\dfrac{6}{7}\right\}$ (*а*) та циклу періоду 5, утвореному точками $\left\{\dfrac{2}{11}; \dfrac{18}{11}; -\dfrac{14}{11}; -\dfrac{10}{11} - \dfrac{6}{11}\right\}$ (*б*), які існують для відображення (14) при $\lambda = 2$, $x_* = -\dfrac{2\pi}{3}$ і відповідно $y_* = 1$ вигляду

$$I(y) = \begin{cases} y - 2, & y \geq 0; \\ -3y - 2, & y < 0. \end{cases} \tag{16}$$



а *б*

Рис. 2

Звідси випливає, що відображення (14) має [7] періодичні точки довільного періоду $n \in \mathrm{N}$, а динамічна система (2), (3), (13) — такі періодичні режими, при яких фазова точка розглядуваної системи зазнає імпульсної дії рівно n разів за період. Оскільки всі періодичні точки періоду $n > 1$ для відображення (14) є нестійкими, то відповідні їм періодичні розв'язки рівняння (2) з імпульсною дією (3), (13) теж нестійкі.

Справедливе таке твердження.

Теорема 6. *Диференціальне рівняння* (2) *з імпульсною дією* (3), (13), *де* $y =$

$= \dot{x}$, *має* $T(n)$ *періодичні розв'язки з рівно* n *імпульсними діями за період, де* n — *довільне натуральне число.*

Наведений вище приклад демонструє складний характер поведінки траєкторій динамічних систем, визначених диференціальним рівнянням (2) та умовами імпульсної дії (3), що спричиняється останніми.

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
2. *Jordan D. W., Smith P.* Nonlinear ordinary differential equations. – London: Oxford Univ. Press, 1987. – 381 p.
3. *Рейсинг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1974. – 320 с.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
5. *Перестюк Н. А., Самойленко В. Г., Елгондиев К. К.* Отображение последования и периодические решения систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Нелінійні коливання. – 1998. – № 1. – С. 44 – 50.
6. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – 390 с.
7. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений. – Киев: Наук. думка, 1989. – 216 с.

Одержано 23.02.99