УДК 519.41/47

С. А. Довженко (Брянск. пед. ун-т, Россия)

К ТЕОРЕМЕ Н. В. ЧЕРНИКОВОЙ О ВПОЛНЕ ФАКТОРИЗУЕМЫХ ГРУППАХ

We describe finite groups G whose every subgroup not belonging to the Frattini subgroup $\Phi(G)$ has a complement.

Наведено опис скінченних груп G, в яких кожна підгрупа, що не належить до підгрупи Фраттіні $\Phi(G)$, має доповнення.

Известно, что подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ конечной группы G не содержит отличных от единицы дополняемых в G подгрупп. Имея это в виду, проф. В. А. Ведерников, в связи с теоремой Н. В. Черниковой [1, 2] о вполне факторизуемых группах, поставил перед автором следующую задачу: описать строение конечной группы, в которой дополняемы все подгруппы, не принадлежащие ее подгруппе Фраттини. Решение этой задачи содержится в следующей теореме.

Теорема. *В конечной группе G каждая подгруппа, не принадлежащая подгруппе Фраттини $\Phi(G)$, дополняема тогда и только тогда, когда группа G либо вполне факторизуема, либо является примарной циклической непростого порядка, либо неабелева порядка p^3 вида $G = (\langle a\rangle \times \langle c\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $|a| = |b| = |c| = p$, $c^b = ca$, $a^b = a$, p — произвольное простое число.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть группа G абелева и не является примарной циклической. Согласно основной теореме о конечных абелевых группах, G разлагается в прямое произведение примарных циклических подгрупп. Пусть K — произвольный отличный от единицы множитель такого разложения, H — прямое произведение всех его множителей, отличных от K, L — произвольная максимальная подгруппа группы G, содержащая H. Так как произвольная максимальная подгруппа группы G, содержащая K, отлична от L, то $\Phi(G) \neq L$. Поэтому L дополняема в G с помощью подгруппы простого порядка. Тогда и L/H дополняема в G/H с помощью подгруппы простого порядка.Так как $G/H \simeq K$ и K — примарная циклическая, то отсюда следует, что G/H, а значит и K, имеют простой порядок. Таким образом, группа G является прямым произведением групп простых порядков. Следовательно, она вполне факторизуема.

Пусть группа G непримарна. Покажем, что она вполне факторизуема. Допустим, что это не так. Тогда $\Phi(G) \neq 1$. Пусть p и q — произвольные различные простые числа такие, что $p \in \pi(\Phi(G))$ и $q \in \pi(G/\Phi(G))$, g — произвольный q-элемент из разности $G \setminus \Phi(G)$, P — силовская p-подгруппа группы $\Phi(G)$. Так как $\langle g\rangle Z(P) \not\subseteq \Phi(G)$, то подгруппа $\langle g\rangle Z(P)$ дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D. Пусть S — силовская p-подгруппа группы D. Тогда $Z(P) \cap S = 1$ и, очевидно, $Z(P)S$ — силовская p-подгруппа группы G. Следовательно, согласно теореме Гашюца, $Z(P)$ дополняема в G. Итак, $\Phi(G)$ содержит дополняемую в G подгруппу $Z(P) \neq 1$. Противоречие.

Пусть группа G неабелева и примарна по некоторому простому p, H — любая ее максимальная подгруппа, содержащая $Z(G)$, K — подгруппа, состоящая из всех элементов порядка p группы $Z(P)$ и единицы. Тогда $H \neq \Phi(G)$ и, значит, H дополняема в G. Пусть $\langle b\rangle$ — дополнение к H в G $(|b| = p)$. Поскольку $K\langle b\rangle \not\subseteq \Phi(G)$, то подгруппа $K\langle b\rangle$ дополняема в G с помощью некоторой подгруппы C. Пусть $A = K \times C$, тогда $G = A \leftthreetimes \langle b\rangle$. Так как $A' \trianglelefteq G$,

$A' \subseteq C$ и $C \cap K = 1$, то $A' = 1$. Покажем, что подгруппа C циклическая. Действительно, пусть это не так. Тогда фактор-группа A/K нециклическая. Поскольку группа G конечна, примарна и неабелева, то K не дополняема в ней, и потому $K \subseteq \Phi(G)$. Так как $K \subseteq \Phi(G) \subseteq A$, то в A/K найдется максимальная подгруппа $L/K \not\subseteq \Phi(G)/K$. Поскольку $L \not\subseteq \Phi(G)$, то L дополняема в G с помощью некоторой подгруппы D. Очевидно, $D \cap A \trianglelefteq G$ и $|D \cap \cap A| = p$ и, значит, $D \cap A \subseteq K$. Однако $D \cap K \subseteq D \cap L = 1$. Противоречие. Пусть $C = \langle c \rangle$. Тогда $G = \langle K, c, b \rangle$, и поскольку $K \subseteq \Phi(G)$, то $G = \langle c, b \rangle$. Так как, очевидно, $c^b = c^l a$, l — целое и $a \in K$, то $G = (\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$. Поскольку $|a| = p$, то $\langle c^p \rangle = A^p \trianglelefteq G$. И так как $\langle c^p \rangle \cap K = 1$, то $c^p = 1$. Следовательно, в рассмотренном случае G — группа третьего типа из формулировки теоремы.

Достаточность для первых двух типов групп очевидна. Пусть G — группа третьего типа. Так как она конечна, примарна и неабелева, то $\Phi(G) \neq 1$, и с учетом элементарной абелевости $G/\langle a \rangle$, $\Phi(G) \subseteq \langle a \rangle$. Следовательно, $\Phi(G) = \langle a \rangle$. Рассмотрим в G произвольную подгруппу $H \neq \langle a \rangle, 1$. Если $|H| = p$ и $H \subseteq A$, то $\langle a \rangle \langle b \rangle$ дополняет H в G, а если $|H| = p$ и $H \not\subseteq A$, то A дополняет H в G. Если же $|H| = p^2$, то дополнением к H в G будет $\langle b \rangle$ или $\langle c \rangle$ при $H = A$ и $H \neq A$ соответственно. Теорема доказана.

1. *Черникова Н. В.* Вполне факторизуемые группы // Докл. АН СССР. – 1953. –**92**, № 5. – С. 877 – 880.
2. *Черникова Н. В.* Группы с дополняемыми подгруппами // Мат. сб. – 1956. – **39**, № 3. – С. 273 – 292.

Получено 12.10.98