УДК 517.925.51

И. Е. Витриченко (Одес. ун-т)

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО НЕАВТОНОМНОГО СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ n-ГО ПОРЯДКА *

Sufficient conditions of instability in the Lyapunov sense are obtained for the trivial solution of nonautonomous n-order equation in the case where its boundary characteristic equation possesses the multiple zero root. The instability is determined by nonlinear terms.

Одержано достатні умови нестійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку неавтономного рівняння n-го порядку, коли його граничне характеристичне рівняння має кратний нульовий корінь. Нестійкість визначається нелінійними доданками.

1. Постановка задачи. Исследуется свойство неустойчивости ($\overline{\mathrm{St}}$) по Ляпунову [1] при $t \uparrow \omega$ тривиального решения дифференциального уравнения (д. у.) вида

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} p_k(t)\, y^{(n-k)} + p_n(t)\, y = F(t, y, y', y^{(n-1)}), \tag{1}$$

где $t \in \Delta$, $\Delta \equiv [a_0, \omega[$, $-\infty < a_0 < \omega \le +\infty$, $p_s\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R} \equiv\,]-\infty, +\infty[$, $p_s \in \in \boldsymbol{C}_\Delta^{(h)}$, $h \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N} \equiv \{1, 2, \ldots\}$, $p_s \equiv \pi^s a_s$, $\pi\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $\boldsymbol{R}_+ \equiv\,]0, +\infty[$, $a_s \equiv \equiv a_{0s} + o_s(1)$, $a_s^{(l)} = o_{sl}(1)$, $t \uparrow \omega$, $a_{0s} \in \boldsymbol{R}$, $l = \{\overline{1,h}\}$, $s = \overline{1,n}$, и выполняются условия:

уравнение $P_n(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{s=1}^n a_{0s} \lambda^{n-s} = 0$ имеет n_0 корней λ_0 с условием $\operatorname{Re}\lambda_0 = 0$, все остальные корни λ этого уравнения характеризуются свойством $\operatorname{Re}\lambda < 0$;

$$F(t, X) \equiv \sum_{\|Q\|=2}^{m} F_Q(t)\, X^Q + R_m(t, X), \qquad X \equiv (x_1, \ldots, x_n),$$

$F\colon \Delta \times \boldsymbol{S}(X, r) \Rightarrow \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}(X, r) = \{X, X^T\colon \|X\| \le r\}$, $r \in \boldsymbol{R}$, $Q \equiv (q_1, \ldots, q_n)$, $q_k \in \{0\} \cup \boldsymbol{R}_+$, $k = \overline{1,n}$,

$$\|Q\| \equiv \sum_{k=1}^n q_k, \qquad X^Q \equiv \prod_{k=1}^n x_k^{q_k},$$

* Выполнена при поддержке ISSEP (грант № APU 051026).

$F_Q \in C_\Delta^{(h)}$, $\|Q\| = \overline{2, m}$, $m \in N \setminus \{1\}$, $|R_m| \le L\|X\|^{m+\alpha}$; $L : \Delta \Rightarrow \{0\} \cup R_+$, $L \in C_\Delta$, $\alpha \in R_+$.

Ниже приняты следующие определения и обозначения.

Определение 1. *Д. у.* (1) *имеет свойство* St *при* $t \uparrow \omega$, *если для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in R_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что любое решение* $y = y(t)$ *д. у.* (1) *с начальными условиями* $\pi^{-s}(T_\varepsilon)|y^{(s-1)}(T_\varepsilon)| \le \delta_\varepsilon$, $s = \overline{1, n}$, *имеет свойство* $\pi^{-s}(t)|y^{(s-1)}(t)| < \varepsilon$ *для всех* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$ *и всех* $s = \overline{1, n}$.

При всех $\omega \neq +\infty$ *свойство* St *д. у.* (1) *понимается как обычное перефразирование этого свойства при* $\omega = +\infty$.

Определение 2. *Д. у.* (1) *имеет свойство* $\overline{\mathrm{St}}$ *при* $t \uparrow \omega$, *если определение* 1 *не выполняется.*

Определение 1′. *Дифференциальная система (д. с.)*

$$Y' = U(t, Y), \tag{2}$$

$$Y = \mathrm{col}(y_1, \dots, y_n), \quad U(t, \overline{0}) \equiv \overline{0}, \quad \overline{0} \equiv \mathrm{col}(0, \dots, 0),$$

имеет свойство St *при* $t \uparrow \omega$, *если для любого сколь угодно малого* $\varepsilon \in R_+$ *существуют* $\delta_\varepsilon \in]0, \varepsilon]$, $T_\varepsilon \in \Delta$ *такие, что любое решение* $Y = Y(t)$ *д. с.* (2) *с начальным условием* $\|Y(T_\varepsilon)\| \le \delta_\varepsilon$ *имеет свойство* $\|Y(t)\| < \varepsilon$ *для всех* $t \in [T_\varepsilon, \omega[$.

При $\omega \neq +\infty$ *свойство* St *д. с.* (2) *понимается как обычное перефразирование этого свойства при* $\omega = +\infty$ [2, с. 168].

Определение 2′. *Д. с.* (2) *имеет свойство* $\overline{\mathrm{St}}$ *при* $t \uparrow \omega$, *если определение* 1′ *не выполняется.*

Пусть E_k и H_k — матрицы соответственно единичная и сдвига порядка $k \times k$; Y_k — вектор-столбец размерности k;

$$Y^{-1} \equiv \mathrm{col}(y_1^{-1}, \dots, y_n^{-1}), \qquad Z = \mathrm{col}(z_1, \dots, z_n) \equiv \mathrm{col}(Z_{n_1}, \dots, Z_{n_{k_0}}),$$

$$|Y|^2 \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k^2, \qquad \langle Y, Z \rangle \equiv \sum_{k=1}^{n} y_k z_k,$$

$$\|P\| \equiv \sum_{s,k=1}^{n} |p_{sk}|, \qquad P = \|p_{sk}\|, \quad s, k = \overline{1, n},$$

$$\|Y\| \equiv \sum_{k=1}^{n} |y_k|, \qquad \mathrm{grad}\, V(t, Y) \equiv \mathrm{col}\left(\frac{\partial V}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial y_n}\right),$$

$\Lambda \equiv \max i\{f_k \colon \Delta \Rightarrow R,\ k = \overline{1, n}\}$, если $\Lambda : \Delta \Rightarrow R_+$, $\Lambda^{-1} f_k = c_k + o_k(1)$, $t \uparrow \omega$, $|c_1| + \dots + |c_n| \in R_+$.

Результаты статьи эффективно применяются к д. у. (1), у которого коэффициенты — медленно изменяющиеся функции, т. е. функции, чьи производные малы в сравнении с самыми функциями при $t \uparrow \omega$. Например, $\omega = +\infty$,

$$p_k \equiv t^{k\beta}[a_{0k} + b_{0k} t^{-\alpha_k} (\ln t)^{\beta_k} \sin t^{\gamma_k}],$$

$$F_Q \equiv t^{\gamma\|Q\|}[c_{0Q} + d_{0Q} t^{-\alpha_Q} (\ln t)^{\beta_Q} \cos t^{\gamma_Q}],$$

$\beta,\ y,\ a_{0k},\ b_{0k},\ c_{0k},\ d_{0k},\ \beta_k,\ \beta_Q \in \boldsymbol{R},\ \alpha_k, \alpha_Q \in \{0\} \cup \boldsymbol{R}_+,\ \gamma_k,\ \gamma_Q \in\ ]0, 1[,$ $k = \overline{1, n},\ \|Q\| = \overline{2, m}$.

2. Основные результаты.

Лемма 1. *Если* $\pi' \pi^{-2} = o(1),\ t \uparrow \omega$, *то преобразование* $y^{(s-1)} = \pi^s y_s$, $s = \overline{1, n}$, *приводит д. у.* (1) *к д. с. вида*

$$Y' = \pi P Y + G, \tag{3}$$

где

$$P = \|p_{sk}\|,\ s, k = \overline{1, n},\quad p_{ss} \equiv -s\pi'\pi^{-2},\ s = \overline{1, n-1},\quad p_{nn} \equiv -a_1 - n\pi'\pi^{-2},$$

$$p_{s,s+1} \equiv 1,\ s = \overline{1, n-1},\quad p_{sk} \equiv 0,\ s = \overline{1, n-2},\ k = \overline{s+2, n},$$

$$p_{sk} \equiv 0,\ s = \overline{2, n-1},\ k = \overline{s-1, n-2},\quad p_{nk} \equiv -a_{n-k+1},\ k = \overline{1, n-1},$$

$$G \equiv \operatorname{col}(\bar{0}, G_n),\quad G_n \equiv \sum_{\|Q\|=2}^{m} F_Q \pi^{-n + \sum_{s=1}^{n} s q_s} Y^Q + R_m^*,$$

$$|R_m^*| \le \left(\sum_{k=1}^{n} \pi^k \right)^{m+\alpha} \pi^{-n} L \|Y\|^{m+\alpha},\quad \det[P(\omega) - \lambda E_n] \equiv P_n(\lambda).$$

Доказательство леммы очевидно.

Используя методы обобщенных „срезающих" [3] и нелинейных „замороженных" [4] преобразований, можно построить невырожденную замену $Y = G(t, Z)$, приводящую д. с. (3) к д. с. специального вида

$$\begin{aligned} Z'_{n_1} &= \pi_1 P_{n_1} Z_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} f_{n_1, Q_{n_1}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_1}, \quad n_1 \le n_0, \\ Z'_{n_s} &= \pi_s (\mu_s E_{n_s} + H_{n_s}) Z_{n_s} + Z_{n_s} \sum_{\|Q_{n_1}\|=1}^{m-1} f_{n_s, Q_{n_1}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}} + \Phi_{n_s}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$s = \overline{2, k_0},\quad \sum_{s=2}^{k_0} n_s \le n - n_1,$$

где $\pi_s \colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+,\ f_{n_s, Q_{n_1}},\ s = \overline{1, k_0},\ \|Q_{n_1}\| = \overline{1, m},\ \mu_s \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\},\ s = \overline{2, k_0}$, — известные величины;

$$P_{n_1} \equiv \|0\|,\quad \text{или}\quad P_{n_1} \equiv H_{n_1},$$

или

$$P_{n_1} \equiv \operatorname{diag}[\sigma_1 E_{q_1} + H_{q_1}, \ldots, \sigma_j E_{q_j} + H_{q_j}],\quad j \le n_1,$$

$$\sum_{k=1}^{j} q_k = n_1;\quad \sigma_s \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\},$$

$\sigma_s,\ s = \overline{1, j}$, — известные константы; $\pi_1 \pi_s^{-1} = o(1),\quad t \uparrow \omega,\quad s = \overline{2, k_0}$

(при этом Z_{n_1} — вектор критических переменных); $\Phi_{n_1},\ s = \overline{1, k_0}$, малы в некотором смысле при $t \uparrow \omega$.

Выделим из д. с. (4) д. с., содержащую только критические переменные, т. е.

$$Z'_{n_1} = \pi_1 P_{n_1} Z_{n_1} + \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} f_{n_1, Q_{n_1}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}}. \tag{5}$$

Предполагая, что д. с. (5) можно преобразовать к эквивалентному ей д. у. n_1-го порядка относительно одной из компонент вектора Z_{n_1}, методом А. В. Костина [5] получим асимптотическое представление всех так называемых правильных решений полученного д. у. Обозначим через $\Psi_{n_1} = \Psi_{n_1}(t)$ вектор-столбец асимптотического представления одного из правильных решений уже д. с. (5).

В дальнейшем используется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть для д. с.* (2) *существует допускающая бесконечно малый высший предел и могущая принимать в любой достаточно малой окрестности* $Y = \overline{0}$ *положительные значения функция Ляпунова* $V = V(t, Y)$, $V(t, \overline{0}) \equiv 0$, *такая, что для любого сколь угодно малого* $\delta \in\ ]0, r]$ *существует* $a_\delta \in\ ]0, \delta]$ *такое, что*

$$\boldsymbol{S}_\delta(Y) \equiv \{Y\colon V(t, Y) \geq a_\delta^2,\ Y \in \boldsymbol{S}(Y, r),\ t \in \Delta\} \neq \varnothing,$$

и существует $T_\delta \in \Delta$ *такое, что*

$$\frac{\partial V(t, Y)}{\partial t} + \langle \operatorname{grad} V(t, Y), U(t, Y)\rangle \equiv \Lambda(t)[W_0(Y) + W_1(t, Y)],$$

$$\Lambda\colon [T_\delta, \omega[\ \Rightarrow \boldsymbol{R}_+, \qquad \int^{\omega} \Lambda\, dt = +\infty,$$

$$\inf\{W_0(Y);\ Y \in \boldsymbol{S}_{\delta, r}(Y)\} = w_\delta, \quad w_\delta \in \boldsymbol{R}_+,$$

$$\sup\{|W_1(t, Y)|;\ t \in [T_\delta, \omega[,\ Y \in \boldsymbol{S}_{\delta, r}(Y)\} = W_\delta < w_\delta,$$

$$\boldsymbol{S}_{\delta, r}(Y) \equiv \{Y\colon V(t, Y) \geq a_\delta^2,\ Y \in \boldsymbol{S}(Y, r),\ t \in [T_\delta, \omega[\}.$$

Тогда д. с. (2) *имеет свойство* $\overline{\mathrm{St}}$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доказательство леммы основывается на идее Н. Г. Четаева [6] о применении функции Ляпунова не в полной окрестности начала координат, а только в некоторой ее части.

Теорема. *Пусть д. у.* (1) *таково, что*

1) $\pi' \pi^{-2} = o(1)$, $t \uparrow \omega$, *и замена* $y^{(s-1)} = \pi^s h_s(t, Z)$, $s = \overline{1, n}$, *приводит его к д. с.* (4);

2) *существуют вектор-столбец* $\Psi_{n_1} = \Psi_{n_1}(t)$ *асимптотического представления одного из правильных решений д. с.* (5), *функции* $\nu_s\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$, $\nu_s \in \boldsymbol{C}_\Delta^{(1)}$, $\nu_s' \nu_s^{-1} \pi_s^{-1} = a_s + o(1)$, $t \uparrow \omega$, $a_s \in \boldsymbol{R}$, $a_s \neq \mu_s$, $s = \overline{2, k_0}$, *функция Ляпунова* $V_1 = V_1(Z_{n_1})$, $V_1(\overline{0}) = 0$, *такие, что для всех* $t \in \Delta$ *и всех* $Z \in$ $\in \boldsymbol{S}(Z, r)$

$$\left\langle \operatorname{grad} V_1(Z_{n_1}),\ \Psi_{n_1}^{-1} \sum_{\|Q_{n_1}\|=2}^{m} f_{n_s, Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}} Z_{n_1}^{Q_{n_1}} \right\rangle \equiv$$

$$\equiv \Lambda[W_0(Z_{n_1}) + W_1(t, Z_{n_1})],$$

$$\Lambda \equiv \max i\left\{\Psi_{n_1}^{-1} f_{n_1,Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}};\ \|Q_{n_1}\| = \overline{2,m}\right\}, \qquad \int^{\omega} \Lambda\, dt = +\infty,$$

$$W_1(t, Z_{n_1}) = o(1), \quad \pi_1 \Lambda^{-1} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad \pi_s \Lambda^{-1} = b_s + o(1),$$

$$f_{n_1,Q_{n_1}} \Psi_{n_1}^{Q_{n_1}} \Lambda^{-1} = o(1), \quad t \uparrow \omega,$$

$$b_s \in \{0\} \cup \boldsymbol{R}_+, \quad s = \overline{2, k_0}, \qquad \|Q_{n_1}\| = \overline{1, m-1},$$

$$\Lambda^{-1} \Phi_{n_s}\{t, \Psi_{n_1} Z_{n_1}, \nu_2 Z_{n_2}, \ldots, \nu_{k_0} Z_{n_{k_0}}\} = o(1), \quad t \uparrow \omega, \quad s = \overline{2, k_0};$$

3) *для любого сколь угодно малого* $\delta \in\ ]0, r[$ *существует* $a_\delta \in\ ]0, \delta]$ *такое, что*

$$\boldsymbol{S}_\gamma(Z) \equiv \left\{Z\colon \sum_{s=1}^{k_0} V_s(Z_{n_s}) \ge a_\delta^2,\ Z \in \boldsymbol{S}(Z, \gamma)\right\} \ne \varnothing,$$

$$\gamma = \delta, r, \qquad \inf\{W_0(Z_{n_1});\ (Z_{n_1}, \overline{0}) \in \boldsymbol{S}_r(Z)\} \in \boldsymbol{R}_+$$

($V_s(Z_{n_s})$ — решение уравнения $\langle \operatorname{grad} V_s(Z_{n_s}), [(\mu_s - a_s)E_{n_s} + H_{n_s}] Z_{n_s}\rangle = |Z_{n_s}|^2$, $s = \overline{2, k_0}$);

4) *существует функция* $g: \boldsymbol{R}_+ \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$, $g(0) = 0$, *такая, что для всех* $t \in \Delta$, $Z \in \boldsymbol{S}(Z, r)$

$$\sum_{s=1}^{n} |h_s(\Psi_{n_1} Z_{n_1}, \nu_2 Z_{n_2}, \ldots, \nu_{k_0} Z_{n_{k_0}})| \ge g(\|Z\|).$$

Тогда д. у. (1) *имеет свойство* $\overline{\mathrm{St}}$ *при* $t \uparrow \omega$.

Доказательство. В д. с. (4) выполним замену $Z_{n_1} = \Psi_{n_1} Y_{n_1}$, $Z_{n_s} = \nu_s Y_{n_s}$, $s = \overline{2, k_0}$, и для д. с. относительно $Y = \operatorname{col}(Y_{n_1}, \ldots, Y_{n_{k_0}})$ построим функцию Ляпунова

$$V(Y) = \sum_{s=1}^{k_0} V_s(Y_{n_s}),$$

$V_s = V_s(Y_{n_s})$, $s = \overline{2, k_0}$, — квадратичные формы-решения соответственно уравнений

$$\langle \operatorname{grad} V_s(Y_{n_s}), [(\mu_s - a_s)E_{n_s} + H_{n_s}] Y_{n_s}\rangle = |Y_{n_s}|^2, \quad s = \overline{2, k_0}. \tag{6}$$

Поскольку $\mu_s \ne a_s$, $s = \overline{2, k_0}$, то решение уравнения (6) существует и единственно [7] (п. 21). Представив полную производную по t функции Ляпунова в $\boldsymbol{S}_r(Y)$ в виде

$$\frac{dV(Y)}{dt} \equiv \Lambda\left[W_0(Y_{n_1}) + \sum_{s=2}^{k_0} b_s |Y_{n_s}|^2 + \Theta(t, Y)\right],$$

где $\Theta(t, Y) = o(1)$, $t \uparrow \omega$, $Y \in \boldsymbol{S}_r(Y)$, применим лемму 2.

Замечание. Условие 4 теоремы означает, что хотя бы одна из величин

$\pi^{-s} y^{(s-1)}$, $s = \overline{1, n}$, отделена от нуля константой при $t \uparrow \omega$, если д. с. относительно Y имеет свойство $\overline{\mathrm{St}}$ при $t \uparrow \omega$.

Пример. Исследуем свойство $\overline{\mathrm{St}}$ при $t \to +\infty$, $\Delta \equiv [1, +\infty[$, $n_0 = n = 2$, д. у. вида

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{7}$$

где $F(t, z, y) \equiv \sum_{s=0}^{k} L_s(t) z^{k-s} y^s$, $L_s\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}$, $s = \overline{0, k}$, $L_0 \neq 0$, $k \in \boldsymbol{N} \setminus \{1\}$. Полагая $x' = y$, относительно x, y получаем д. с. вида

$$x' = y, \qquad y' = F(t, x, y).$$

В качестве асимптотики одного из правильных решений возьмем решения „укороченных" д. у. $x' = y$, $y' = 0$, т. е. $\Psi_{n_1} \equiv \operatorname{sgn} L_0 \operatorname{col}(t, 1)$. Выполнив замену $x = \operatorname{sgn} L_0 t z_1$, $y = \operatorname{sgn} L_0 z_2$, относительно z_1, z_2 получим д. с.

$$z_1' = -t^{-1} z_1 + t^{-1} z_2, \qquad z_2' = (\operatorname{sgn} L_0)^{k+1} \sum_{s=0}^{k} L_s t^{k-s} z_1^{k-s} z_2^s. \tag{8}$$

Для д. с. (8) построим функцию Ляпунова $V(Z) = z_1 z_2$, $Z = \operatorname{col}(z_1, z_2)$. Рассматривая самый простой случай, представим ее полную производную по времени в силу д. с. (8) в виде

$$\frac{dV(Z)}{dt} = (\operatorname{sgn} L_0)^{k+1} L_0 t^k \left[z_1^{k+1} - (\operatorname{sgn} L_0)^{k+1} L_0^{-1} t^{-k-1} (z_1 z_2 - z_2^2) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{k} L_s L_0^{-1} t^{-s} z_1^{k-s+1} z_2^s \right],$$

т. е. $\Lambda \equiv |L_0| t^k$ (k — четное число), $\Lambda \equiv L_0 t^k$, $L_0\colon \Delta \Rightarrow \boldsymbol{R}_+$ (k — нечетное число),

$$W_0(Z_{n_1}) \equiv z_1^{k+1}, \qquad b_s \equiv 0, \quad s = \overline{2, k_0},$$

$$\Theta(t, z) \equiv -(\operatorname{sgn} L_0)^{k+1} L_0^1 t^{-k-1} (z_1 z_2 - z_2^2) + \sum_{s=1}^{k} L_s L_0^{-1} t^{-s} z_1^{k-s+1} z_2^s.$$

Для выполнения условий теоремы потребуем, чтобы

$$\int^{\omega} \Lambda \, dt = +\infty, \tag{9}$$

$$L_0^1 t^{-k-1} = o(1), \quad L_s L_0^1 t^{-s} = o(1), \quad t \to +\infty, \quad s = \overline{1, k}.$$

Если L_s, $s = \overline{0, k}$, принадлежит классу степенных функций, то из (9) вытекает

$$L_0 \cong t^{\sigma}, \quad L_s = o(t^{\sigma + s}), \quad t \to +\infty, \quad \sigma \in]-k-1, +\infty[, \quad s = \overline{1, k}. \tag{10}$$

Выберем произвольное сколь угодно малое число $\delta \in]0, r[$, и пусть, например, $a_\delta \equiv 2^{-3/2}\delta$. Тогда $S_\gamma(Z) \equiv \{Z\colon\ z_1 z_2 \geq 2^{-3}\delta^2,\ z_1^2 + z_2^2 \leq \gamma^2,\ z_1 > 0,$ $z_2 > 0\} \neq \varnothing$, $\gamma = \delta, r$, и

$$\inf\{W_0(Z_{n_1});\ (Z_{n_1}, \bar{0}) \in S_r(Z)\} =$$

$$= 2^{-2(k+1)}[(4r^2+\delta^2)^{1/2} - (4r^2-\delta^2)^{1/2}]^{k+1} > 0,$$

$$\sum_{s=1}^{n} \left| h_s(\Psi_{n_1} Z_{n_1}, \nu_2 Z_{n_2}, \ldots, \nu_{k_0} Z_{n_{k_0}}) \right| = t|z_1| + |z_2| \geq \|Z\|,$$

т. е. $g(\|Z\|) \equiv \|Z\|$.

Тем самым выполнены все условия теоремы. Тогда при выполнении (9) д. у. (7) имеет свойство $\overline{\mathrm{St}}$ при $t \to +\infty$. Заметим, что при постоянных L_s, $s = \overline{0, k}$, (в (10) $\sigma = 0$) полученный результат согласуется с результатом А. М. Ляпунова [8].

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача устойчивости движения и другие работы по теории устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 473 с.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
3. *Витриченко И. Е., Никоненко В. В.* О сведении к почти блок-треугольному (диагональному) виду линейной неавтономной системы в случае кратного нулевого собственного значения предельной матрицы коэффициентов // Proc. A. Razmadze Math. Inst. – 1994. – **110**. – P. 59–67.
4. *Костин А. В., Витриченко И. Е.* Обобщение теоремы Ляпунова об устойчивости в случае одного нулевого характеристического показателя для неавтономных систем // Докл. АН СССР. – 1982. – **264**, № 4. – С. 819–822.
5. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 522–526.
6. *Четаев Н. Г.* Одна теорема о неустойчивости // Докл. АН СССР. – 1934. – **1**, № 9. – С. 529–531.
7. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1956. – 532 с.
8. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб. – 1893. – **17**, вып. 2. – С. 253–333.

Получено 26.05.97