УДК 519.21

Т. В. Земляк (Донец. ун-т)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ВИНЕРОВСКОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ ПО ЕГО ЗНАЧЕНИЯМ НА ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ

For $w(u, v)$, $(u, v) \notin \gamma$ (here, $w(x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, is the Wiener field and γ is some closed curve on a plane), we construct an estimate which is best in the mean square value and is based on the values of $w(x, y)$ for $(x, y) \in \gamma$. We also calculate an error of this estimate.

Побудовано найкращу в середньоквадратичному значенні оцінку для $w(u, v)$, $(u, v) \notin \gamma$ (де $w(x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, — вінерівське поле, γ — деяка замкнена крива на площині), яка базується на значеннях $w(x, y)$, коли $(x, y) \in \gamma$, та обчислено її похибку.

1. Введение. В настоящей статье рассматривается следующая задача: пусть (Ω, σ, P) — некоторое вероятностное пространство, на котором задано винеровское поле $w(x, y)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, и предполагается, что мы наблюдаем винеровское поле $w(x, y)$ при $(x, y) \in \gamma$ (где γ — замкнутая кривая на плоскости некоторого типа); необходимо восстановить поле в точке $(x, v) \notin \gamma$.

Под восстановлением понимается построение наилучшей в среднеквадратичном смысле оценки для $w(u, v)$, основанной на значениях $w(x, y)$ при $(x, y) \in \gamma$. Известно [1, с. 229], что эта оценка задается величиной

$$\overline{m}(u, v) = M\{w(u, v) \mid F\},$$

а ее погрешность вычисляется по формуле

$$d(u, v) = M\{(w(u, v) - \overline{m}(u, v))^2 \mid F\},$$

где $F = \sigma\{w(x, y), (x, y) \in \gamma\}$.

Целью работы является построение явных формул для $\overline{m}(u, v)$ и $d(u, v)$. Ряд результатов по этой тематике приведено в работах [2 – 4], однако в них описаны результаты восстановления винеровского поля на плоскости по его реализациям на кривых двух типов: монотонных или замкнутых, образованных отрезками прямых (треугольник, прямоугольник), причем условие, состоящее в том, что кривая монотонна или образована отрезками прямых, играло центральную роль при получении явных формул для $\overline{m}(u, v)$ и $d(u, v)$. В данной работе рассматривается случай, когда замкнутая кривая представляет собой „криволинейный" прямоугольный треугольник, образованный невозрастающей кривой γ_1 и отрезками прямых γ_2 и γ_3, параллельных осям координат, причем вершина прямого угла — ближайшая к началу координат.

Основная теорема, которая используется при получении явных формул для $\overline{m}(u, v)$ и $d(u, v)$, — теорема о нормальной корреляции [5]. Однако непосредственное применение этой теоремы весьма затруднительно. Вообще, если γ — некоторая замкнутая кривая на плоскости (пусть даже непрерывная или непрерывно дифференцируемая и состоящая из участков монотонных кривых), получить в явном виде оценку для $\overline{m}(u, v)$ и $d(u, v)$ практически невозможно. Поэтому основная проблема, которая возникает при решении такого рода задач, — это выяснение того, каким условиям должна удовлетворять кривая γ, чтобы задача имела решение в явном виде. Например, одно из таких условий — условие монотонности кривой (в [2] описаны ряд результатов для монотонных кривых). Еще одна проблема, которая возникает при решении задачи в случае, когда γ — замкнутая кривая, — это резкое возрастание размерности рассматриваемых случайных векторов, а также существенное усложнение структуры соответствующей корреляционной матрицы. Для решения этой проблемы, во-первых, изменяется структура случайного вектора, относительно которого ищется условное математическое ожидание, но при этом доказывается, что σ-алгебры, порожденные новым случайным вектором и исходным, равны, а во-вторых — оценивается не само значение $w(u, v)$, а приращение поля на плоскости по некоторому прямоугольнику, одна из вершин которого имеет координаты (u, v), а значения поля в трех других известны.

2. Основные определения, предположения и результат. Винеровское поле $w(x, y), x \geq 0, y \geq 0$, определяется следующим образом:

1) $w(x, y) = 0$ (с вероятностью $P = 1$), если $x = 0$ или $y = 0$;

2) приращения Δw винеровского поля по непересекающимся прямоугольникам со сторонами, параллельными координатным осям — случайные величины, независимые в совокупности;

3) приращение Δw винеровского поля по прямоугольнику со сторонами, параллельными координатным осям — гауссовская случайная величина с $M\Delta w = 0$ и $D\Delta w = S$ (где S — площадь прямоугольника, по которому берется приращение).

Заметим, что корреляционная функция винеровского поля имеет вид $R((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min(x_1, x_2)\min(y_1, y_2)$.

Пусть γ — „криволинейный" прямоугольный треугольник на плоскости с вершинами $A(x_a, y_a), B(x_a, y_a + b), C(x_a + c, y_a)$, где $b > 0$, $c > 0$.

Пусть кривая, соединяющая точки B и C, задается параметрическим уравнением

$$x = x(\tau),$$
$$y = y(\tau), \ \tau \in [0, 1],$$

где функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ удовлетворяют следующим условиям:

C_1) функции $x(\tau), y(\tau)$ положительные, непрерывно дифференцируемые на $[0, 1]$;

C_2) для любых $\tau_1 \leq \tau_2$ $x(\tau_1) \leq x(\tau_2)$ и $y(\tau_1) > y(\tau_2)$ (или $x(\tau_1) < x(\tau_2)$ и $y(\tau_1) \geq y(\tau_2)$).

Рассмотрим случайный процесс

$$\hat{w}(\tau) = w(x(\tau), y(\tau)) - w(x(\tau), y_a) - w(x_a, y(\tau)) + w(x_a, y_a), \ \tau \in [0, 1]. \quad (1)$$

Этот процесс является гауссовским с корреляционной функцией

$$R(\tau_1, \tau_2) = \min(x(\tau_1) - x_a, x(\tau_2) - x_a)\min(y(\tau_1) - y_a, y(\tau_2) - y_a). \quad (2)$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если точка (u, v) лежит внутри кривой γ, то с вероятностью $P = 1$*

$$\overline{m}(u, v) = w(x_a, v) + w(u, y_a) - w(x_a, y_a) +$$
$$+ \frac{v - y_a}{y(\tau(u)) - y_a}\hat{w}(\tau(u)) - (u - x_a)(v - y_a)\left\{\int_{\tau(u)}^{\tau(v)} \frac{\dot{y}(\tau)^2}{(y(\tau) - y_a)\varphi(\tau)} d\hat{w}(\tau) - \right.$$
$$\left. - \int_{\tau(u)}^{\tau(v)} \frac{\dot{y}(\tau)^2 \hat{w}(\tau)}{(y(\tau) - y_a)^2 \varphi(\tau)} d\tau\right\}, \quad (3)$$

$$d(u, v) = (u - x_a)(v - y_a)\left\{1 - \frac{v - y_a}{y(\tau(u)) - y_a} - (u - x_a)(v - y_a)\int_{\tau(u)}^{\tau(v)} \frac{\dot{y}(\tau)^2}{(y(\tau) - y_a)^2 \varphi(\tau)} d\tau\right\}, \quad (4)$$

где $\varphi(\tau) = \dot{x}(\tau)(y(\tau) - y_a) - (x(\tau) - x_a)\dot{y}(\tau)$, *процесс* $\hat{w}(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, *опреде-*

ляется равенством (1), $\tau(u) = \max\limits_{x(\tau)=u} \tau$, $\tau(v) = \min\limits_{y(\tau)=v} \tau$ *и стохастические интегралы от гауссовских процессов определены согласно* [6].

Доказательство. Представим случайную величину $w(u, v)$ в виде суммы случайных величин: $w(u, v) = \delta w(u, v) + w(x_a, v) + w(u, y_a) - w(x_a, y_a)$, где $\delta w(u, v) = w(u, v) - w(x_a, v) - w(u, y_a) + w(x_a, y_a)$ — приращение винеровского поля по прямоугольнику со сторонами, параллельными осям координат. Таким образом,

$$M\{w(u, v) \mid F\} = M\{\delta w(u, v) \mid F\} + M\{w(x_a, v) \mid F\} +$$
$$+ M\{w(u, y_a) \mid F\} - M\{w(x_a, y_a) \mid F\}.$$

Так как точки (x_a, v), (u, y_a) и (x_a, y_a) принадлежат кривой γ, то случайные величины $w(x_a, v)$, $w(u, y_a)$ и $w(x_a, y_a)$ измеримы относительно σ-алгебры F и, следовательно,

$$M\{w(u, v) \mid F\} = \delta\overline{m}(u, v) + w(u, y_a) + w(x_a, v) - w(x_a, y_a), \tag{5}$$

где $\delta\overline{m}(u, v) = M\{\delta w(u, v) \mid F\}$, при этом

$$d(u, v) = M\Big\{(\delta w(u, v) - \delta\overline{m}(u, v))^2 \mid F\Big\}.$$

Следовательно, чтобы найти $\overline{m}(u, v)$, достаточно найти $\delta\overline{m}(u, v)$.

Пусть $0 = \tau^0_{k(n)} < \tau^1_{k(n)} < \ldots < \tau^{k(n)}_{k(n)} = 1$, $n \geq 1$, — разбиение отрезка $[0, 1]$ такое, что:

a) $1 \leq k(1) < k(2) < \ldots < k(n) < \ldots$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1\leq j\leq k(n)} \left(\tau^j_{k(n)} - \tau^{j-1}_{k(n)}\right) = 0$;

c) для любого $j = \overline{1, k(n)}$ существует $r = \overline{1, k(n+1)}$ такое, что $\tau^j_{k(n)} = \tau^r_{k(n+1)}$.

Введем следующие обозначения:

$$\tau^j_{k(n)} = \tau_j, \quad x_j = x(\tau_j), \quad y_j = y(\tau_j),$$
$$w_j = w(x_j, y_j), \quad F_{k(n)} = \sigma\{w_i, w(x_j, y_a), w(x_a, y_j),\ j = \overline{1, k(n)}\},$$
$$\delta\overline{m}_{k(n)}(u, v) = M\{\delta w(u, v) \mid F_{k(n)}\},$$
$$d(u, v)_{k(n)} = M\Big\{(\delta w(u, v) - \delta\overline{m}(u, v))^2 \mid F_{k(n)}\Big\}.$$

Далее для упрощения записей переобозначим $k(n)$ через n и рассмотрим следующие случайные величины:

$$\delta w^a_0 = w(x_a, y_a), \tag{6}$$

$$\delta w^a_j = w(x_j, y_a) - w(x_{j-1}, y_a),\ j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

$$\delta\tilde{w}^a_j = w(x_a, y_{j-1}) - w(x_a, y_j),\ j = \overline{1, n}, \tag{8}$$

$$\delta\hat{w}^a_j = w_j - w(x_j, y_a) - w(x_a, y_j) + w(x_a, y_a),\ j = \overline{1, n-1}. \tag{9}$$

Обозначим $G_n = \sigma\{\delta w^a_0, \delta w^a_j, \delta\tilde{w}^a_j, \delta\hat{w}^a_j, j = \overline{1, n}\}$ и покажем, что $F_n = G_n$. Очевидно, что все случайные величины, которые определяются равенствами (6) – (9), измеримы относительно σ-алгебры F как суммы или разности случайных величин, измеримых относительно σ-алгебры F. Аналогично, любую из случайных величин w_j, $w(x_j, y_a)$, $w(x_a, y_j)$, $j = \overline{0, n}$, можно представить в виде суммы или разности случайных величин вида (6) – (9). Например,

$$w(x_1, y_a) = \delta w_1^a + \delta w_0^a,$$

$$w(x_2, y_a) = \delta w_2^a + \delta w_1^a + \delta w_0^a, \ \ldots, \ w(x_n, y_a) = \sum_{j=0}^{n} \delta w_j^a,$$

$$w(x_a, y_j) = \sum_{j=1}^{n-j+1} \delta \tilde{w}_{n-j+1}^a,$$

$$w_j = \delta \hat{w}_j^a - \delta w_j^a - \delta \tilde{w}_j^a - w(x_a, y_a), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно,

$$M\{\delta w(u, v) \mid F_n\} = M\{\delta w(u, v) \mid G_n\}$$

и

$$d_n(u, v) = M\{(\delta w(u, v) - \delta \overline{m}(u, v))^2 \mid G_n\}.$$

Для нахождения $\delta \overline{w}_n(u, v) = M\{\delta w(u, v) \mid G_n\}$ воспользуемся теоремой о нормальной корреляции [5, с. 498]. Для этого найдем решение системы

$$\operatorname{cov}(\delta \overline{w}, \delta \overline{w})\beta = \operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta \overline{w}). \tag{10}$$

Здесь $\delta \overline{w} = (\delta w^a, \delta \tilde{w}^a, \delta \hat{w})$, где, в свою очередь,

$$\delta w^a = (\delta w_0^a, \delta w_1^a, \ldots, \delta w_j^a, \ldots, \delta w_n^a), \quad \delta \tilde{w}^a = (\delta \tilde{w}_1^a, \ldots, \delta \tilde{w}_j^a, \ldots, \delta \tilde{w}_n^a),$$

$$\delta \hat{w} = (\delta \hat{w}_1, \ldots, \delta \hat{w}_j, \ldots, \delta \hat{w}_{n-1}),$$

β — неизвестный вектор длины $3n$ вида $\beta = \left(\beta^a, \tilde{\beta}^a, \hat{\beta}\right)$, $\beta^a = \left(\beta_0^a, \ldots, \beta_j^a, \ldots, \beta_n^a\right)$, $\tilde{\beta}^a = \left(\tilde{\beta}_1^a, \ldots, \tilde{\beta}_j^a, \ldots, \tilde{\beta}_n^a\right)$, $\hat{\beta} = \left(\hat{\beta}_1, \ldots, \hat{\beta}_j, \ldots, \hat{\beta}_{n-1}\right)$.

Тогда с учетом предыдущих обозначений корреляционная матрица $\operatorname{cov}(\delta \overline{w}, \delta \overline{w})$ имеет вид

$$\operatorname{cov}(\delta \overline{w}, \delta \overline{w}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\delta w^a, \delta w^a) & \operatorname{cov}(\delta w^a, \delta \tilde{w}^a) & \operatorname{cov}(\delta w^a, \delta \hat{w}) \\ \operatorname{cov}(\delta w^a, \delta \tilde{w}^a) & \operatorname{cov}(\delta \tilde{w}^a, \delta \tilde{w}^a) & \operatorname{cov}(\delta \tilde{w}^a, \delta \hat{w}) \\ \operatorname{cov}(\delta w^a, \delta \hat{w}) & \operatorname{cov}(\delta \tilde{w}^a, \delta \hat{w}) & \operatorname{cov}(\delta \hat{w}, \delta \hat{w}) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Опишем структуру каждой из шести перечисленных матриц. Итак, рассмотрим гауссовский вектор δw^a, координаты которого определяются равенствами (6), (7). Так как $w(x, y) = 0$ (с вероятностью $P = 1$), если $x = 0$ или $y = 0$ в силу определения винеровского поля, случайные величины δw_j^a, $j = \overline{0, n}$, можно представить в виде приращений винеровского поля по непересекающимся прямоугольникам со сторонами, параллельными координатным осям, следующим образом:

$$\delta w_0^a = w(x_a, y_a) - w(0, y_a) - w(x_a, 0) + w(0, 0),$$

$$\delta w_j^a = w(x_j, y_a) - w(x_{j-1}, y_a) - w(x_j, 0) + w(x_{j-1}, 0), \ j = \overline{1, n}.$$

Поскольку прямоугольники с вершинами в точках с координатами (x_j, y_a), (x_{j-1}, y_a), $(x_j, 0)$, $(x_{j-1}, 0)$, $j = \overline{1, n}$, и (x_k, y_a), (x_{k-1}, y_a), $(x_k, 0)$, $(x_{k-1}, 0)$, $k = \overline{1, n}$, и прямоугольник с вершинами в точках с координатами (x_a, y_a), $(0, y_a)$, $(x_a, 0)$, $(0, 0)$ не пересекаются при $k \neq j$, $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, в силу второго условия в определении винеровского поля случайные величины δw_j^a,

$j=\overline{0,n}$, попарно независимы и, следовательно, $\operatorname{cov}(\delta w_j^a,\ \delta w_k^a)=0,\ k\neq j,\ k=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,n}$, $\operatorname{cov}(\delta w_0^a,\ \delta w_0^a)=x_0y_a$, $\operatorname{cov}(\delta w_j^a,\ \delta w_j^a)=\Delta x_j y_a$, $j=\overline{1,n}$, где $\Delta x_j=x_j-x_{j-1}$, $j=\overline{1,n}$. Таким образом, матрица $\operatorname{cov}(\delta w^a,\ \delta w^a)$ имеет диагональный вид

$$\operatorname{cov}(\delta w^a,\ \delta w^a)=\begin{pmatrix} x_0y_a & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & y_a\Delta x_1 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & y_a\Delta x_j & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & y_a\Delta x_n \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Проведя аналогичные рассуждения для гауссовского вектора $\delta\tilde{w}a$, получим

$$\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a,\ \delta\tilde{w}^a)=\begin{pmatrix} x_a\Delta y_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\ 0 & x_a\Delta y_2 & \dots & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & x_a\Delta y_j & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & x_a\Delta y_n \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Теперь опишем структуру матриц $\operatorname{cov}(\delta w^a,\ \delta\tilde{w}^a)$, $\operatorname{cov}(\delta w^a,\ \delta\hat{w})$, $\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a,\ \delta\hat{w})$. Так как прямоугольники с вершинами в точках с координатами $(x_j,\ y_a)$, $(x_{j-1},\ y_a)$, $(x_j,\ 0)$, $(x_{j-1},\ 0)$, $j=\overline{1,n}$, не пересекаются с любым из прямоугольников с вершинами в точках с координатами $(x_a,\ y_{j-1})$, $(x_a,\ y_j)$, $(0,\ y_{j-1})$, $(0,\ y_j)$, $j=\overline{1,n}$, и $(x_a,\ y_a)$, $(x_a,\ 0)$, $(0,\ y_a)$, $(0,\ 0)$, а также с прямоугольниками, вершины которых имеют координаты $(x_j,\ y_j)$, $(x_j,\ y_a)$, $(x_a,\ y_j)$, $(x_a,\ y_a)$, $j=\overline{1,n-1}$, то любая случайная величина вида δw_j^a, $j=\overline{0,n}$, и любая из случайных величин вида $\delta\tilde{w}_j^a$, $j=\overline{1,n}$, и $\delta\hat{w}_j^a$, $j=\overline{1,n-1}$, попарно независимы и, следовательно, $\operatorname{cov}(\delta w_k^a,\ \delta\tilde{w}_j^a)=0$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,n}$, и $\operatorname{cov}(\delta w_k^a,\ \delta\hat{w}_j)=0$, $j=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,n}$, т. е. матрицы $\operatorname{cov}(\delta w^a,\ \delta\tilde{w}^a)$ и $\operatorname{cov}(\delta w^a,\ \delta\hat{w})$ — нулевые. Проведя аналогичные рассуждения, получим, что матрица $\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a,\ \delta\hat{w})$ также нулевая. Из условия C_2 для функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ следует $x_0\le x_1\le\ldots\le x_n$, $y_0>y_1>\ldots>y_n$. Учитывая эти соотношения и вид корреляционной функции гауссовского процесса (2), получаем

$$\operatorname{cov}(\delta\hat{w},\ \delta\hat{w})=\begin{pmatrix} \delta x_1\delta y_1 & \delta x_1\delta y_2 & \dots & \delta x_1\delta y_{n-1}\\ \delta x_1\delta y_2 & \delta x_2\delta y_2 & \dots & \delta x_2\delta y_{n-1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \delta x_1\delta y_{n-1} & \delta x_2\delta y_{n-1} & \dots & \delta x_{n-1}\delta y_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $\delta x_j=x_j-x_a$, $j=\overline{1,n}$, $\delta y_j=y_j-y_a$, $j=\overline{1,n-1}$.

Итак, с учетом предыдущих обозначений и рассуждений матрица $\operatorname{cov}(\delta\overline{w},\ \delta\overline{w})$ имеет вид

$$\operatorname{cov}(\delta\overline{w},\, \delta\overline{w}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(\delta w^a,\, \delta w^a) & O & O \\ O & \operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a,\, \delta\tilde{w}^a) & O \\ O & O & \operatorname{cov}(\delta\hat{w},\, \delta\hat{w}) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где O — нулевая матрица соответствующего размера, а матрицы $\operatorname{cov}(\delta w^a, \delta w^a)$, $\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a, \delta\tilde{w}^a)$ и $\operatorname{cov}(\delta\hat{w}, \delta\hat{w})$ определяются равенствами (12) – (14). Теперь опишем структуру вектора $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\overline{w})$. Поскольку прямоугольник с вершинами в точках с координатами (u, v), (u, y_a), (x_a, v), (x_a, y_a) не пересекается ни с одним из прямоугольников с вершинами в точках с координатами (x_j, y_a), (x_{j-1}, y_a), $(x_j, 0)$, $(x_{j-1}, 0)$, $j = \overline{1, n}$, а также с прямоугольниками, вершины которых имеют координаты (x_a, y_{j-1}), (x_a, y_j), $(0, y_{j-1})$, $(0, y_j)$, $j = \overline{1, n}$, и (x_a, y_a), $(x_a, 0)$, $(0, y_a)$, $(0, 0)$, то случайная величина $\delta w(u, v)$ не зависит от случайных величин вида $\delta\tilde{w}_j^a$, $j = \overline{1, n}$, и δw_j^a, $j = \overline{0, n}$, и, следовательно, векторы $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta w^a)$ и $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\tilde{w}^a)$ — нулевые. Осталось определить координаты вектора $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\hat{w})$. Рассмотрим сначала случай, когда каждое из уравнений $x(\tau) = u$ и $y(\tau) = v$ имеет единственное решение, которое обозначим через $\tau(u)$ и $\tau(v)$ соответственно (эти уравнения всегда имеют решения в силу непрерывности функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$ на отрезке $[0, 1]$ и того, что $x(0) < u < x(1)$, $y(0) < v < y(1)$). Не умаляя общности можно считать, что для любого $n \geq 1$ существуют τ_q^n и τ_p^n такие, что $\tau_q^n = \tau(v)$ и $\tau_p^n = \tau(u)$ $(p < q)$. Опишем теперь структуру вектора $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\hat{w})$ с учетом этих обозначений и условия C_2:

$$\operatorname{cov}(\delta w(u, v),\, \delta\hat{w}_j) = \begin{cases} \delta x_j \delta v, & j = \overline{1, p-1}; \\ \delta u\, \delta v, & j = \overline{p, q}; \\ \delta u\, \delta y_j, & j = \overline{q+1, n-1}, \end{cases} \tag{16}$$

где $\delta u = u - x_a$, $\delta v = v - y_a$. Найдем решение системы

$$\operatorname{cov}(\delta\hat{w},\, \delta\hat{w})\hat{\beta} = \operatorname{cov}(\delta w(u, v),\, \delta\hat{w}). \tag{17}$$

Над уравнениями системы сделаем следующие преобразования: из j-го уравнения вычтем соответственно $(j-1)$-е, умноженное на $\delta y_j\, \delta y_{j-1}^{-1}$, $j = \overline{2, n-1}$, в результате чего система (17) примет вид

$$Q\hat{\beta} = q. \tag{18}$$

Здесь

$$Q = \begin{pmatrix} \delta x_1\, \delta y_1 & \delta x_1\, \delta y_2 & \ldots & \delta x_1\, \delta y_{n-1} \\ 0 & \delta y_1^{-1}\, \delta y_2 \varphi_2 & \ldots & \delta y_1^{-1}\, \delta y_{n-1} \varphi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \delta y_{n-2}^{-1}\, \delta y_{n-1} \varphi_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$q_j = \begin{cases} \delta x_1\, \delta v, & j = 1; \\ \delta v\, \delta y_j^{-1} \varphi_j, & j = \overline{2, p-1}; \\ \delta u\, \delta v\, \delta y_{j-1}^{-1}\, \Delta y_j, & j = \overline{p, q}; \\ 0, & j = \overline{q+1, n-1}, \end{cases}$$

где $\varphi_j = \delta x_j \delta y_{j-1} - \delta x_{j-1} \delta y_j$, $j = \overline{2, n-1}$.

Отметим, что $\det\operatorname{cov}(\delta\hat{w}, \delta\hat{w}) = \delta x_1 \delta y_{n-1} \prod_{j=2}^{n-1} \varphi_j$ и поэтому в силу условий C_1 и C_2 для функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ на отрезке [0, 1] следует, что $\det\operatorname{cov}(\delta\hat{w}, \delta\hat{w}) \neq 0$ и, следовательно, система (17) имеет единственное решение. Для того чтобы найти это решение, преобразуем систему (17) следующим образом: из j-го уравнения ($j = \overline{1, n-2}$) вычтем соответственно $(j+1)$-е, умноженное на $\delta y_j \delta y_{j-1}^{-1} \varphi_{j+1}^{-1} \varphi_j$, $j = \overline{2, n-2}$, из первого уравнения вычтем второе, умноженное на $\delta y_1 \varphi_2^{-1}$, и для коэффициентов $\hat{\beta}_j$, $j = \overline{1, n-1}$, получим следующие выражения:

$$\hat{\beta}_j = 0, \; j = \overline{1, p-1}, \; j = \overline{p+1, p-1}, \tag{19}$$

$$\hat{\beta}_p = \frac{\delta v}{\delta y_p}\left(1 + \frac{\Delta y_{p+1} \delta u}{\varphi_{p+1}}\right), \qquad \hat{\beta}_q = -\frac{\delta u \delta v}{\delta y_q}\frac{\Delta y_q}{\varphi_q}, \tag{20}$$

$$\hat{\beta}_j = -\frac{\delta u \delta v}{\delta y_j}\left(\frac{\Delta y_{j+1}}{\varphi_{j+1}} - \frac{\Delta y_j}{\varphi_j}\right), \qquad j = \overline{p+1, q-1}. \tag{21}$$

Итак, мы нашли решение системы $\operatorname{cov}(\delta\hat{w}, \delta\hat{w})\hat{\beta} = \operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\hat{w})$, а нам необходимо найти решение системы $\operatorname{cov}(\delta\overline{w}, \delta\overline{w})\beta = \operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\overline{w})$. Во-первых, из структуры матрицы $\operatorname{cov}(\delta\overline{w}, \delta\overline{w})$ (15) следует

$$\det\operatorname{cov}(\delta\overline{w}, \delta\overline{w}) = \det\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a, \delta\tilde{w}^a)\det\operatorname{cov}(\delta w^a, \delta w^a)\det\operatorname{cov}(\delta\hat{w}, \delta\hat{w}).$$

Из (12), (13) вытекает $\det\operatorname{cov}(\delta w^a, \delta w^a) = x_a y_a^{n+1} \prod_{j=1}^{n} \Delta x_j$ и $\det\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a, \delta\tilde{w}^a) = x_a^n \prod_{j=1}^{n-1} \Delta y_j$ и в силу условий C_1 и C_2 для функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ на отрезке [0, 1] имеем $\det\operatorname{cov}(\delta w^a, \delta w^a) \neq 0$ и $\det\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a, \delta\tilde{w}^a) \neq 0$ и, следовательно, $\det\operatorname{cov}(\delta\overline{w}, \delta\overline{w}) \neq 0$ (ранее было показано, что $\det\operatorname{cov}(\delta\hat{w}, \delta\hat{w}) \neq$ $\neq 0$), т. е. система (10) имеет единственное решение. Напомним, что искомый вектор β имеет вид $\beta = \left(\beta^a, \tilde{\beta}^a, \hat{\beta}\right)$. Учитывая матрицу $\operatorname{cov}(\delta\overline{w}, \delta\overline{w})$ (15), равенства (12) и (13) для матриц $\operatorname{cov}(\delta w^a, \delta w^a)$ и $\operatorname{cov}(\delta\tilde{w}^a, \delta\tilde{w}^a)$, а также то, что векторы $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta w^a)$ и $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\tilde{w}^a)$ нулевые и найденное единственное решение системы (17) задается равенствами (19)–(21), получаем, что единственным решением системы (10) является вектор β, у которого векторы β^a и $\tilde{\beta}^a$ нулевые, а координаты вектора $\hat{\beta}$ определяются равенствами (19)–(21). Таким образом, учитывая, что $\beta = [\operatorname{cov}(\delta\overline{w}, \delta\overline{w})]^{-1}\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\overline{w})$, согласно теореме о нормальной корреляции из [5] получаем

$$\delta\overline{m}_n(u, v) = \sum_{j=p}^{q} \hat{\beta}_j \delta\hat{w}_j, \tag{22}$$

где $\hat{\beta}_j$ определяются равенствами (19)–(21).

Подставим полученные выражения для $\hat{\beta}_j$ в (22) и преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$\delta\overline{m}_n(u, v) = \sum_{j=p}^{q} \hat{\beta}_j \delta\hat{w}_j =$$

$$= \frac{\delta v}{y(\tau(u)) - y_a}\delta\hat{w}_p - \delta u \delta v\left[\sum_{j=p+1}^{q} \frac{\Delta y_j}{\delta y_j \varphi_j}\delta\hat{w}_j - \sum_{j=p}^{q-1} \frac{\Delta y_{j+1}}{\delta y_j \varphi_{j+1}}\delta\hat{w}_j\right] =$$

$$= \frac{\delta v}{y(\tau(u)) - y_a}\delta\hat{w}_p -$$

$$- \delta u \delta v\left[\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta y_j}{\delta y_j \varphi_j}(\delta\hat{w}_j - \delta\hat{w}_{j-1}) + \sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta y_j}{\delta y_j \varphi_j}\delta\hat{w}_{j-1} - \sum_{j=p}^{q-1}\frac{\Delta y_{j+1}}{\delta y_j \varphi_{j+1}}\delta\hat{w}_j\right] =$$

$$= \frac{\delta v}{y(\tau(u)) - y_a}\delta\hat{w}_p -$$

$$- \delta u \delta v\left[\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta y_j}{\delta y_j \varphi_j}(\delta\hat{w}_j - \delta\hat{w}_{j-1}) + \sum_{j=p+1}^{q}\left(\frac{\Delta y_j}{\delta y_j \varphi_j} - \frac{\Delta y_j}{\delta y_{j-1} \varphi_j}\right)\delta\hat{w}_{j-1}\right],$$

$$\delta\overline{m}_n(u, v) = \frac{\delta v}{y(\tau(u)) - y_a}\delta\hat{w}_p -$$

$$- \delta u \delta v\left[\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\Delta y_j}{\delta y_j \varphi_j}(\delta\hat{w}_j - \delta\hat{w}_{j-1}) - \sum_{j=p+1}^{q}\frac{(\Delta y_j)^2}{\delta y_j\, \delta y_{j-1} \varphi_j}\delta\hat{w}_{j-1}\right]. \qquad (23)$$

Далее, в силу условия C_1 для функций $x(\tau)$, $y(\tau)$ на отрезке [0, 1], согласно теореме о среднем, имеем

$$\Delta y_j = \dot{y}(\sigma_j)\Delta\tau_j, \quad \text{где } \sigma_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \qquad (24)$$

$$\Delta x_j = \dot{x}(\xi_j)\Delta\tau_j, \quad \text{где } \xi_j \in [\tau_{j-1}, \tau_j], \qquad (25)$$

$$\varphi_j = (\dot{x}(\xi_j)\delta y_{j-1} - \dot{y}(\sigma_j)\delta x_{j-1})\Delta\tau_j = \overline{\varphi}_j\Delta\tau_j, \quad j = \overline{2, n-1}. \qquad (26)$$

Подставляя равенства (24), (25) в (23) и сокращая каждое слагаемое на $\Delta\tau_j$, $j = \overline{1, n-1}$, находим

$$\delta\overline{m}_n(u, v) = \frac{\delta v}{y(\tau(u)) - y_a}\delta\hat{w}_p -$$

$$- \delta u \delta v\left[\sum_{j=p+1}^{q}\frac{\dot{y}(\sigma_j)}{\delta y_j \overline{\varphi}_j}(\delta\hat{w}_j - \delta\hat{w}_{j-1}) - \sum_{j=p+1}^{q}\frac{(\dot{y}(\sigma_j))^2\Delta\tau_j}{\delta y_j\, \delta y_{j-1} \overline{\varphi}_j}\delta\hat{w}_{j-1}\right]. \qquad (27)$$

Переходя в (27) к l.i.m. при $n \to \infty$ и учитывая (5), получаем выражение, стоящее в правой части равенства (3). Далее, вспоминая, что $k(n)$ переобозначили через n, и учитывая определение разбиения отрезка [0, 1], имеем

$$G_{k(1)} \subseteq G_{k(2)} \subseteq \ldots \subseteq G_{k(n)} \subseteq \ldots \subseteq G, \quad \text{где } G = \sigma\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{k(n)}, n = 1, 2, \ldots\right\},$$

и так как ранее было показано, что $F_{k(n)} = G_{k(n)}$ для $n = 1, 2, \ldots$, то $F = G$ и, следовательно, согласно теореме Леви из [7], получим

$$\delta\overline{m}_{k(n)}(u, v) \xrightarrow[n \to \infty]{} \delta\overline{m}(u, v) \quad (\text{с вероятностью } P = 1).$$

Поскольку

$$M\{(\delta w(u, v) - \delta\overline{m}_{k(n)}(u, v))^2 \mid G\} \le M\{(\delta w(u, v) - \delta\overline{m}_{k(1)}(u, v))^2 \mid G\}$$

$$\text{для} \quad n = 1, 2, \ldots$$

то

$$\underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}}\, \delta\overline{m}_{k(n)}(u, v) = \delta\overline{m}(u, v). \qquad (28)$$

Из (28), учитывая (5), получаем левую часть равенства (3). Формула (4) для $d(u, v)$ доказывается аналогично.

Осталось рассмотреть случай, когда уравнения $x(\tau) = u$ и $y(\tau) = v$ имеют не единственное решение, т.е. $x(\tau) = u$ $\forall\tau$: $\tau'(u) \le \tau \le \tau''(u)$ и $y(\tau) = v$ $\forall\tau$: $\tau'(v) \le \le \tau \le \tau''(v)$. Пусть $\tau'(u) = \tau_p^n$, $\tau''(u) = \tau_l^n$ и $\tau'(v) = \tau_m^n$, $\tau''(v) = \tau_q^n$, тогда вектор $\operatorname{cov}(\delta w(u, v), \delta\hat{w})$, как и в предыдущем случае, имеет вид (16) и соответственно коэффициенты $\hat{\beta}_j$, $j = \overline{1, n-1}$, задаются равенствами (19) – (21). Рассмотрим коэффициенты $\hat{\beta}_j, j = \overline{p, l}$. В этом случае $\Delta x_j = 0, j = \overline{p+1, l}$, и поэтому $\varphi_j = \delta x_j \delta y_{j-1} - \delta x_{j-1}\delta y_j = -\delta x_{j-1}\Delta y_j$, $j = \overline{p+1, l}$, и, следовательно, $\hat{\beta}_j = 0$, $j = \overline{p+1, l}$, а $\hat{\beta}_l = \dfrac{\delta v}{\delta y_p}\left(1 + \dfrac{\Delta y_{l+1}\delta u}{\varphi_{l+1}}\right)$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $\hat{\beta}_j$, $j = \overline{m, q}$. Поскольку $\Delta y_j = 0$, $j = \overline{m+1, q}$, то очевидно $\hat{\beta}_j = 0$, $j = \overline{m+1, q}$, а из (21) имеем $\hat{\beta}_m = = -\dfrac{\delta v\,\delta u}{\delta y_m}\dfrac{\Delta y_m}{\varphi_m}$.

Таким образом, ненулевыми остались коэффициенты $\hat{\beta}_j$, $j = \overline{l, m}$, т. е. в (3), (4) пределы интегрирования будут от $\tau(u) = \max\limits_{x(\tau)=u} \tau$ и до $\tau(v) = \min\limits_{y(\tau)=v} \tau$, $\tau \in [0, 1]$. Теорема доказана.

Замечания. **1.** Теорема доказана при условии, что функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке [0, 1], но она верна и в случае, когда на отрезке [0, 1] существует конечное число точек, в которых функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ не имеют производной, а имеют только конечные правосторонние и левосторонние производные. В этом случае в формулах (3) и (4) вместо каждого интеграла будет стоять сумма интегралов по участкам кривой γ, на которых функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ непрерывно дифференцируемы.

2. Результаты, описанные в [3, 4], можно получить как следствие из доказанной теоремы и замечания 1.

1. *Розанов Ю. А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – М.: Наука, 1989. – 312с.
2. *Шевляков А. Ю.* О восстановлении винеровского поля по его реализациям на кривой// Теория случайн. процессов. – 1988. – Вып.16. – С. 87 – 93.
3. *Золотая А. В., Шевляков А. Ю., Шевляков Ю. А.* О восстановлении винеровского поля по его значениям на треугольнике. – Донецк, 1994. – 8 с. – Деп. в ГНТБ Украины; №451.
4. *Золотая А. В., Шевляков А. Ю.* О восстановлении винеровского поля по его значениям на прямоугольнике. – Донецк, 1992. – 7 с. – Деп. в ГНТБ Украины; №512.
5. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. – М.: Наука, 1974. – 696 с.
6. *Huang T.S., Cambanis S.* Stochastic and multiple Wiener integrals for Gaussian processes // Ann. Probab. – 1983. – **6**, №4. – P. 112–127.
7. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М: Наука, 1989. – 640 с.

Получено 15.05.97,
после доработки — 19.08.97