УДК 517.925

Л. Г. Просенюк, канд. физ.-мат. наук (Одес. инж.-строит. ин-т)

О СУЩЕСТВОВАНИИ И АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕ РАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

A system of differential equations unresolved with respect to a derivative is considered. The sufficient conditions are found for the existence of solutions with singular initial data. The dimensionality of the set of these solutions and their asymptotic properties are studied.

Розглядається система диференціальних рівнянь, не розв'язних відносно похідної. Вказуються достатні умови існування розв'язків з особливими початковими даними. Вивчаються розмірність множини таких розв'язків і їх асимптотичні властивості.

В настоящей статье рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^p(x)\frac{d\overline{u}}{dx} = A(x)\overline{u} + \overline{\psi}(x) + \overline{F}\left(x,\ \overline{u},\ \frac{d\overline{u}}{dx}\right). \tag{1}$$

Здесь x — независимая вещественная переменная; $\overline{u} = \operatorname{col}(u_i(x))$, $i = \overline{1,\ n}$ — неизвестная векторная функция; $p \geq 2$ — число; $\varepsilon(x) \in C^1(0, x_0)$ — скалярная функция;

$$\frac{d\varepsilon(+0)}{dx} = \varepsilon(+0) = 0, \qquad \frac{d\varepsilon(x)}{dx} > 0;$$

$A(x) = (a_{ik}(x))$ — матрица размерности $n \times n$, $a_{ik}(x) \in C(0, x_0)$, все $a_{ik}(+0)$ — числа; $\overline{\psi}(x) = \operatorname{col}(\psi_i(x))$,

$$\overline{F} = \operatorname{col}\left(f_i\left(x,\ u_1,\ \ldots\ u_n,\ \frac{du_1}{dx},\ \ldots\ \frac{du_n}{dx}\right)\prod_{j=1}^{n} u_j^{\alpha_{ji}}\right),$$

f_i — функции, непрерывные в окрестности нулевых значений своих аргументов и имеющие там непрерывные частные производные по $\frac{du_1}{dx},\ \ldots,\frac{du_n}{dx}$, α_{ij} — целые неотрицательные числа.

Цель работы — изучить вопрос существования и асимптотические свойства решений системы (1) таких, что $\overline{u}(x) \to \overline{0}$, $\frac{d\overline{u}}{dx} \to \overline{0}$, когда $x \to +0$, $\overline{0} = \operatorname{col}(0)$. Подобные вопросы рассматривались и в других работах, например, в [1 – 3]. Здесь рассмотрена система, не изучавшаяся ранее, для которой помимо вопросов существования и асимптотического поведения решения выясняется также и асимптотика их производной.

Изложим основной результат исследований. Предположим:

1) функции $\varepsilon(x)$, $\psi_i(x)\varepsilon^{-1}(x)$, $a_{ik}(x) \in C^N(0, x_0)$ и ограничены вместе с производными до N-го порядка;

2) $$|a_{ii}(+0)| > \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} |a_{ik}(+0)|;$$

3) $$\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} > N + p - 1, \qquad i = \overline{1,\ n}.$$

Введем следующие обозначения: m — количество положительных чисел среди $A_{ii}(+0)$, $i=\overline{1,\ n}$, причем без ограничения общности считаем, что это первые m чисел;

$$\overline{C}_k(x) = \operatorname{col}(c_{ik}(x)), \quad k=\overline{1,\ N}, \quad i=\overline{1,\ n}$$

— векторные функции, удовлетворяющие уравнениям

$$A(x)\overline{C}_1(x) = \varepsilon^{-1}(x)\,\psi(x),$$

$$A(x)\overline{C}_j(x) = \varepsilon^{p-j}(x)\frac{d}{dx}(\varepsilon^{j-1}(x)\,\overline{C}_{j-1}(x)), \quad j=\overline{2,\ N}. \tag{2}$$

Отметим, что в силу сделанных предположений $\det A(+0) \neq 0$, и следовательно, уравнения (2) имеют решения, компоненты которых дифференцируемы и ограничены вместе с производной в некоторой правой полуокрестности точки $x=0$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1 – 3. *Тогда система* (1) *имеет* m-*параметрическое семейство решений, обладающих свойствами*:

$$\left\| \varepsilon^{1-N-p}(x)\left(\overline{u}(x)-\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^k(x)\overline{C}_k(x)\right)\right\| = O(1);$$
$$\left\| \varepsilon^{1-N}(x)\left(\frac{d\overline{u}(x)}{dx}-\sum_{k=1}^{N}\frac{d}{dx}(\varepsilon^k(x)\overline{C}_k(x))\right)\right\| = O(1),\ x\to+0; \tag{3}$$

Доказательство. В системе (1) векторные функции $\overline{u}$ и $\dfrac{d\overline{u}}{dx}$ заменим на новые переменные $\overline{z} = \operatorname{col}(z_i)$, $\overline{W} = \operatorname{col}(W_i)$, $i=\overline{1,\ n}$, согласно формулам

$$\overline{u} = \sum_1^N \varepsilon^k(x)\,\overline{C}_k(x) + \varepsilon^{N+p-1}(x)\,\overline{Z}(x), \tag{4}$$

$$\frac{d\overline{u}}{dx} = \sum_1^N \frac{d}{dx}(\varepsilon^k(x)\,\overline{C}_k(x)) + \varepsilon^{N-1}(x)\,\overline{W}(x,\ \overline{z}), \tag{5}$$

где $\overline{C}_k$ определены из условий (2). После подстановки и элементарных упрощений получим равенство вида

$$\overline{W} = A(x)\,\overline{Z} + \Phi(x,\ \overline{Z},\ \overline{W}), \tag{6}$$

где

$$\overline{\Phi} = \operatorname{col}(\Phi_i), \quad \Phi_i = -NC_{iN}(x)\frac{d\varepsilon(x)}{dx} - \varepsilon(x)\frac{dC_{iN}(x)}{dx} +$$
$$+\ \varepsilon^{\alpha_i-N-p+1}(x)\prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^{k-1}(x)c_{jk}(x)+\varepsilon^{N+p-2}(x)z_j\right)^{\alpha_{ji}} \times$$
$$\times\ f_i\left(x,\ \sum_1^N\varepsilon^k(x)\overline{C}_k(x)+\varepsilon^{N+p-1}(x)\overline{Z},\ \sum_1^N\frac{d}{dx}(\varepsilon^k(x)\overline{C}_k(x))+\varepsilon^{N-1}(x)\overline{W}\right).$$

Очевидно, что к (6) уже применима классическая теорема о существовании неявной функции $\overline{W}(x,\ \overline{Z})$, непрерывной в окрестности точки $x=+0$, $z_1=\ldots=$

$= z_n = 0$, такой, что $\overline{W}(+0, \overline{0}) = \overline{0}$. Представим эту функцию в виде

$$\overline{W}(x, \overline{Z}) = A(x)\overline{Z} + \overline{W}_1(x, \overline{Z}) \tag{7}$$

и остановимся на некоторых свойствах $\overline{W}_1 = \mathrm{col}\,(W_{1i}(x))$, $i = \overline{1, n}$. Последняя будет также непрерывной в окрестности указанной точки и $\overline{W}_1(+0, \overline{0}) = \overline{0}$. Кроме того, подставив (7) в (6), получим

$$\overline{W}_1(x, \overline{Z}) \equiv \overline{\Phi}(x, \overline{Z}, A(x)\overline{Z} + \overline{W}_1(x, \overline{Z})).$$

Отсюда, учитывая выражение для $\overline{\Phi}$, заключаем, что $\overline{W}_1(x, \overline{Z}) \to \overline{0}$, когда $x \to +0$, а $|z_k| \le \delta$, где δ — достаточно малое число, $k = \overline{1, n}$.

Продифференцируем по x правую часть формулы (4) и полученное приравняем к правой части (5), где под $\overline{W}$ понимается найденная выше неявная функция. Принимая во внимание (7), получаем относительно $\overline{Z}$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\varepsilon^{p}(x)\frac{d\overline{Z}}{dx} = B(x)\overline{Z} + \overline{W}_1(x, \overline{Z}), \tag{8}$$

где

$$B(x) = A(x) - (N + p - 1)\,\varepsilon^{p-1}(x)\,\frac{d\varepsilon(x)}{dx}E,$$

E — единичная матрица размерности $n \times n$. При этом, очевидно, каждое решение системы (8) со свойством $|z_k| \le \delta$, $k = \overline{1, n}$, после подстановки в (4) дает решение системы (1), а в (5) — производную последнего. Поэтому задача сводится к тому, чтобы доказать существование решений системы (8) с нужным свойством.

Рассмотрим область

$$\Lambda = \{(x, z_1, \dots, z_n):\ x - x_0 \equiv \omega_0 < 0,\ z_i^2 - \delta^2 \equiv \omega_i < 0,\ i = \overline{1, n}\}.$$

Определим производную вдоль траекторий системы (8) от функций ω_i. Имеем

$$\frac{d\omega_0}{dx} = 1,$$

$$\frac{d\omega_i}{dx} = 2\varepsilon^{-p}(x)\left[\left(a_{ii}(x) - (N + p - 1)\varepsilon^{p-1}(x)\frac{d\varepsilon(x)}{dx}\right)z_i^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} a_{ij}(x)z_j z_i + W_{1i}(z, z_1, \dots, z_n)z_i\right].$$

Пусть Λ_0, Λ_i, $i = \overline{1, n}$, означают множества

$$\Lambda_0 = \{(x, z_1, \dots, z_n):\ \omega_0 = 0,\ \omega_i \le 0,\ i = \overline{1, n}\},$$

$$\Lambda_i = \{(x, z_1, \dots, z_n):\ \omega_i = 0,\ \omega_j \le 0,\ j \ne i,\ j = \overline{0, n}\}.$$

При достаточно малом изначально x_0 знак $\dfrac{d\omega_i}{dx}$ на соответствующем множестве определяется знаком $a_{ii}(+0)$. В этом можно убедиться, элементарно оценив правую часть (9) с учетом свойств функций $\varepsilon(x)$, $a_{ik}(x)$, $\overline{W_1}$. Таким образом,

$$\operatorname{Sgn} \frac{d\omega_i}{dx} = \begin{cases} +1, & i = \overline{0,\ m}, \\ -1, & i = \overline{m+1,\ n}. \end{cases}$$

Поменяв направление оси x на противоположное и применив лему [4, с. 336], приходим к выводу, что все точки выхода из Λ — суть точки строгого выхода, образуют множество

$$\Lambda^0 = \bigcup_{i=m+1}^{n} \Lambda_i \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \Lambda_i.$$

Возьмем множество

$$S = \{(x, z_1^0, \ldots, z_m^0, z_{m+1}, \ldots, z_n): (z_k^0)^2 < \delta^2,$$
$$k = \overline{1,\ m}, \quad z_j^2 \le \delta^2, \quad j = \overline{m+1,\ n}\}.$$

В этом случае

$$S \cap \Lambda^0 = \{(x_0, z_1^0, \ldots, z_m^0, z_{m+1}, \ldots, z_n): (z_k^0)^2 < \delta^2,\ k = \overline{1,\ m},$$
$$z_\beta^2 = \delta^2, \quad z_j^2 \le \delta^2, \quad j \ne \beta, \quad j, \beta = \overline{m+1,\ n}\}.$$

Множество $S \cap \Lambda^0$ образует границу S и не является ретрактом S (это вытекает из (3.6) работы [5]). В то же время, легко удостовериться, что $S \cap \Lambda^0$ — ретракт Λ^0. Значит, выполнены все условия следствия из теоремы Важевского [4, с. 337], и значит, имеется решение системы (8) с начальными данными из $S \cup \Lambda^0$, находящееся на интервале $(0, x_0)$ в Λ. Поскольку $z_1^0, \ldots, z_m^0$ — произвольно фиксированные числа при $|z_k^0| < \delta$, то и решений будет m-параметрическое семейство. При подстановке их в (4), (5) получим, как указывалось, решение и его производную системы (1). Из этих же выражений следуют и соотношения (3). Теорема доказана.

1. *Запорожец Г. И.* Исследование однородного дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной // Дифференц. уравнения. – 1961. – **1**, № 5. – С. 567 – 581.
2. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решений систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9. – С. 79 – 85.
3. *Ricceri B.* Solutions lipschitziennez diffe'rentielles Sous forme implicite // C. r. Acad. Sci. Sér. 1. – 1982. – **295**, № 3. – P. 245 – 248.
4. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.
5. *Борсук К.* Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 291 с. .

Получено 24.06.92